n.v.

OS 86 n.v.
~~II 132~~
~~524.~~

A 274

3. 24

Planimetrie

und

Constructionslehre

für

Real-, Berg-, Gewerbe- und Fortbildungsschulen

von

Chr. Rauch, Dr. phil.
Lehrer an der königlichen Bergschule in Essen.

A 274

STRAUBING

Mit 834 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Hannover.
Carl Rümpler.
1861.

131 551 604

Staatl. Bibliothek Passau

Druck von August Grimpe in Hannover.

Vorwort.

Das Studium der Mathematik hat im Allgemeinen einen doppelten Zweck; man will nämlich dadurch entweder nur das Denkvermögen üben, oder sich Kenntnisse sammeln, welche auf das practische Leben angewandt werden können. Zur Erreichung verschiedener Zwecke aber muß man verschiedene Mittel gebrauchen; und daher müssen auch die mathematischen Wissenschaften nach verschiedenen Methoden gelehrt werden.

Die nachfolgende Arbeit nun hat den Zweck, die Planimetrie so vorzutragen, daß sie sogleich auf's practische Leben angewandt werden kann; daher gibt sie die constructive Lösung aller Aufgaben und beweis't dazu die Richtigkeit des Verfahrens. Diese neue Behandlungsweise der Planimetrie hat den Vortheil, daß sie dem Schüler die vorgetragenen Lehren vollständig zum geistigen Eigenthume macht, welches er nach seinem freien Willen ge=

brauchen, d. h. auf's Leben anwenden kann. Eine mehrjährige Erfahrung hat mich überzeugt, daß diese Lehrmethode die zweckmäßigste sei, und ich bin daher der Hoffnung, daß sie sich Anerkennung und Eingang verschaffen werde.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

I. Theil.

Von den geradlinigen Figuren.

I. Abschnitt.

Von den Punkten, Linien und Winkeln.

II. Abschnitt.

Von der Congruenz der geradlinigen Figuren.

III. Abschnitt.

Von der Inhaltsgleichheit (Berechnung) und Verwandlung der geradlinigen Figuren.

IV. Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

II. Theil.

Die Theorie des Kreises.

I. Abschnitt.

Der Kreis in Verbindung mit geraden Linien.

II. Abschnitt.

Der Kreis in Verbindung mit Winkeln.

III. Abschnitt.

Der Kreis in Verbindung mit geradlinigen Figuren.

IV. Abschnitt.

Berechnung des Kreises und seiner Theile.

Einleitung.

§. 1.

Begriff.

Die Geometrie ist diejenige reine mathematische Wissenschaft, welche sich mit den Raumgrößen beschäftigt. Jeder Körper nun ist begrenzt von Flächen, jede Fläche von Linien, jede Linie von Punkten; die Punkte aber begrenzen sich selbst und haben gar keine Ausdehnung im Raume, sind indessen für die Geometrie von der größten Wichtigkeit, weil sie eben die Gestalt und Größe aller Raumgrößen bestimmen. Denken wir uns also gar keine Ausdehnung im Raume, sondern nur einen Ort, so erhalten wir den mathematischen Punkt; denken wir uns aber blos eine Länge, z. B. die Entfernung von Berlin nach Cöln, so erhalten wir eine Linie; denken wir uns aber Länge und Breite im Raume, z. B. die Länge und Breite dieses Zimmers, so erhalten wir den Begriff Fläche; denken wir uns endlich alle drei möglichen Dimensionen des Raumes, nämlich Länge, Breite und Höhe (Dicke), so erhalten wir den Begriff eines Körpers. Aus dieser Betrachtung geht hervor, daß man die Geometrie in vier Theile eintheilen muß, nämlich:

1) in Punktologie, die Lehre von den Punkten;
2) in Longimetrie, die Lehre von den Linien;
3) in Planimetrie, die Lehre von den Flächen;
4) in Stereometrie, die Lehre von den Körpern.

Weil aber die Lehre von den Punkten und Linien mit der Lehre von den Flächen ganz genau verwandt ist und nicht gut davon getrennt werden kann, so hat man die Punktologie und Longimetrie mit in die Planimetrie aufgenommen und demnach das ganze Gebiet der Geometrie in Planimetrie und Stereometrie eingetheilt, d. h., in Flächen- und Körperrechnung. Die Planimetrie hat also den Zweck, die Größe der Flächen zu bestimmen, während die Stereometrie die Größe der Körper untersucht. Findet man in der

Planimetrie die Größe der Figuren oder ihrer Theile durch Zeichnung, so hat man Planimetrie im engeren Sinne; findet man aber diese Theile durch Rechnung, so hat man Trigonometrie. Demnach werden wir unsere Geometrie in drei Theile eintheilen, nämlich in:

1) Planimetrie,
2) Trigonometrie,
3) Stereometrie.

§. 2.

Methode der Geometrie.

Den Inhalt der Geometrie bilden die Raumgrößen; die Form der Geometrie und der ganzen Mathematik aber sind Lehrsätze und Aufgaben. Jeder mathematische Lehrsatz besteht aus drei Theilen: aus Bedingung, Behauptung und Beweis; jede mathematische Aufgabe aber besteht aus vier Theilen: aus der Aufgabe selbst, aus der Auflösung, aus der Behauptung und aus dem Beweis. Die Lehrsätze hat man wieder in Theoreme und Axiome eingetheilt. Theoreme sind die eigentlichen Lehrsätze; Axiome hingegen sind solche Sätze, deren Richtigkeit man nicht beweisen kann, wofür aber auch kein Beweis nöthig ist, da jeder gesunde Menschenverstand die Richtigkeit des Axioms ohne Weiteres einsieht, z. B. jede Größe ist sich selbst gleich. Die eigentlichen Aufgaben nennt man Probleme; wenn aber zur Lösung einer Aufgabe keine Auflösung und kein Beweis nothwendig ist, so heißt eine solche Forderung ein Postulat, z. B. eine gerade Linie zu ziehen.

§. 3.

Eintheilung der Planimetrie.

I. Theil.

Von den geradlinigen Figuren.

I. Abschnitt. Von den Punkten, Linien und Winkeln.

II. Abschnitt. Von der Congruenz ($\cong$) der geradlinigen Figuren.

III. Abschnitt. Von der Inhaltsgleichheit ($=$) und Verwandlung der geradlinigen Figuren.

IV. Abschnitt. Von der Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren ($\sim$).

I. Theil.

Von den geradlinigen Figuren.

I. Abschnitt.

Von den Punkten, Linien und Winkeln.

§. 1.

Von den Punkten.

In diesem ersten Abschnitt soll sich der Schüler im Gebrauche der mathematischen Instrumente üben, und sich mit den Gegenständen, aus welchen mathematische Figuren gebildet werden, bekannt machen.

Die Bestandtheile einer jeden Figur aber sind: Punkte, Linien und Winkel. Die mathematischen Punkte haben gar keine Ausdehnung im Raume, sind bloße Gedankendinge, Grenzen der Linien; mithin sind alle mathematischen

Punkte einander gleich und können sich nur durch ihre Lage im Raume von einander unterscheiden; so kann z. B. ein Punkt in der Mitte, ein Punkt oberhalb, ein anderer unterhalb, ein anderer links, ein anderer rechts, ein anderer außerhalb, ein anderer innerhalb u. s. w. liegend gedacht werden.

. außerhalb
. oberhalb
. innerhalb
. links . Mitte . rechts
. unterhalb.

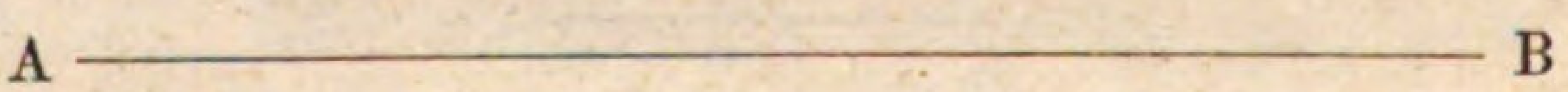
Mit den mathematischen Punkten darf ja nicht der physische Punkt verwechselt werden; dieser ist immer ein Körper, und hat alle Eigenschaften der Körper an sich; er ist z. B. schwer, theilbar, undurchdringlich, porös, im Raume ausgedehnt u. s. w.

§. 2.

Entstehung und Arten von Linien.

Eine Linie entsteht, wenn man zwei Punkte mit einander verbindet.

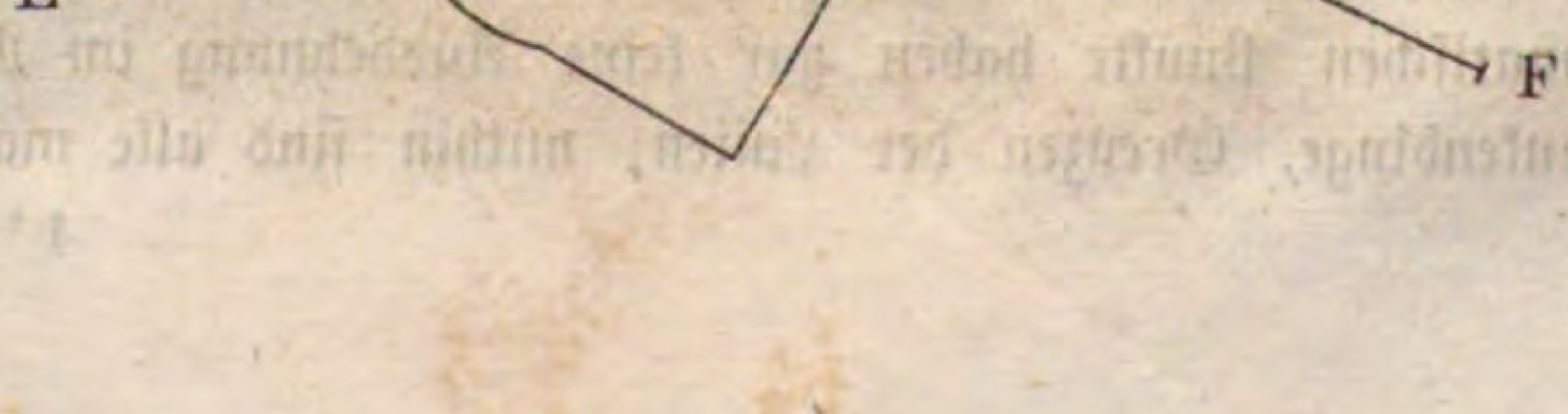
Nimmt man den nächsten Weg von einem Punkt zum andern, so entsteht eine gerade Linie; zwischen zwei Punkten ist also nur eine gerade Linie möglich, denn es liegt in dem Begriff des Superlativs, daß nur ein Weg der nächste sein kann, z. B. A B.



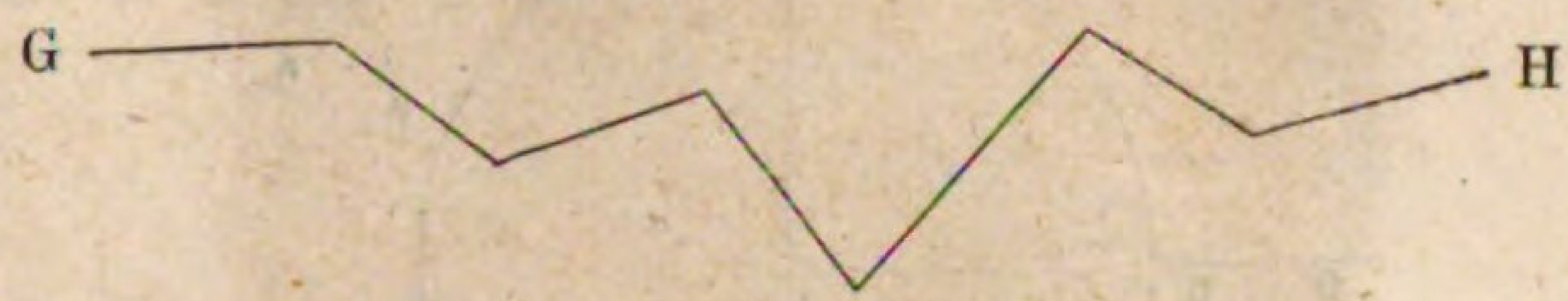
Nimmt man von einem Punkte zu einem andern in jedem Augenblick einen entferntern Weg, so entsteht eine krumme Linie; zwischen zwei Punkten sind also unendlich viele krumme Linien möglich, denn die Umwege können unendlich verschieden sein, z. B. C D.



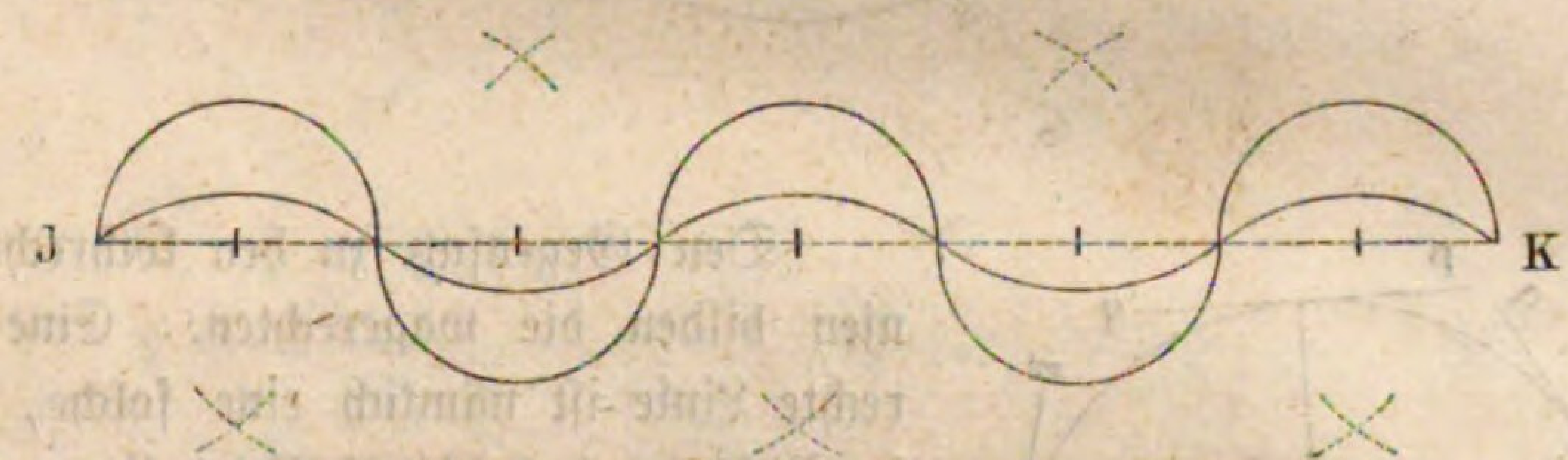
Setzt man eine Linie aus geraden und krummen zusammen, so entsteht eine gemischte Linie, z. B. E F.



Die gemischte Linie darf aber ja nicht mit der gebrochenen verwechselt werden; diese besteht nämlich aus lauter geraden Linien, welche nur eine verschiedene Lage und Richtung im Raume haben, z. B. G H.



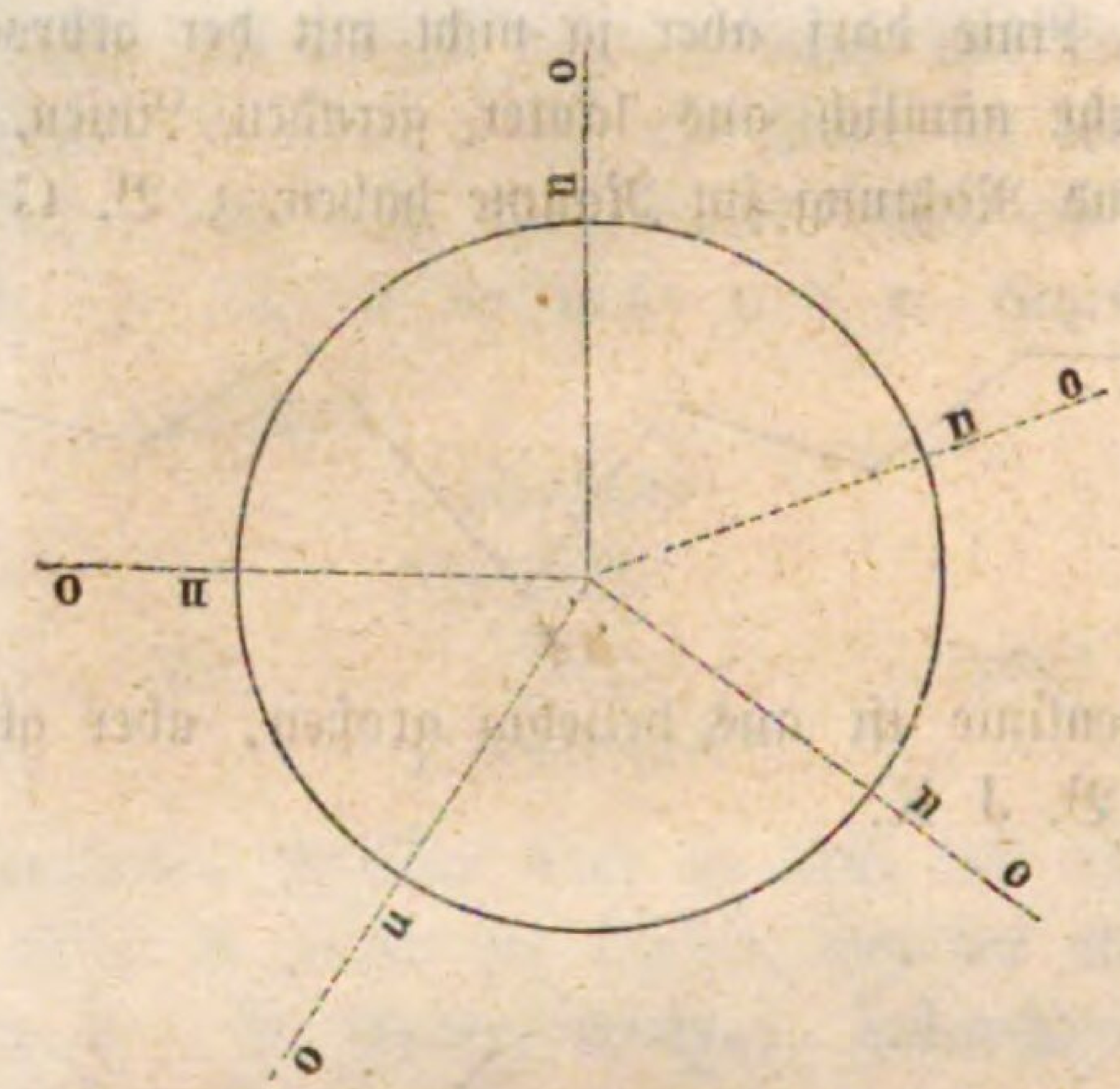
Eine Schlangenlinie ist aus beliebig großen, aber gleichen Kreisbogen zusammengesetzt, z. B. J K.

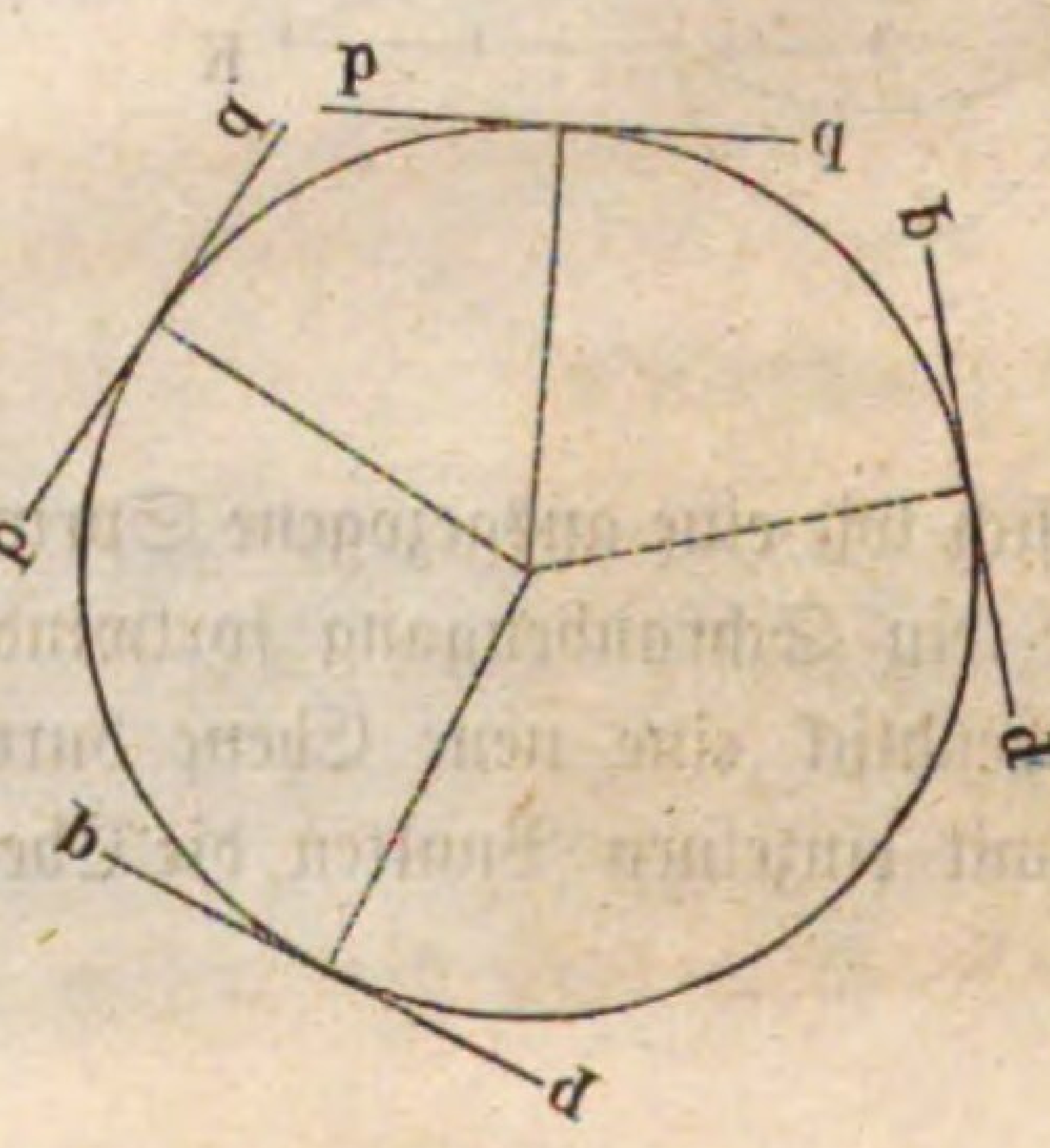


Eine Spirallinie ist eine solche, welche sich wie eine ausgezogene Springfeder, oder wie eine Wendeltreppe, oder wie ein Schraubengang fortwindet und, wenn sie senkrecht steht, in jedem Augenblick eine neue Ebene durchschneidet, und wenn sie wagerecht liegt, nur mit einzelnen Punkten die Ebene berührt, z. B. L M.



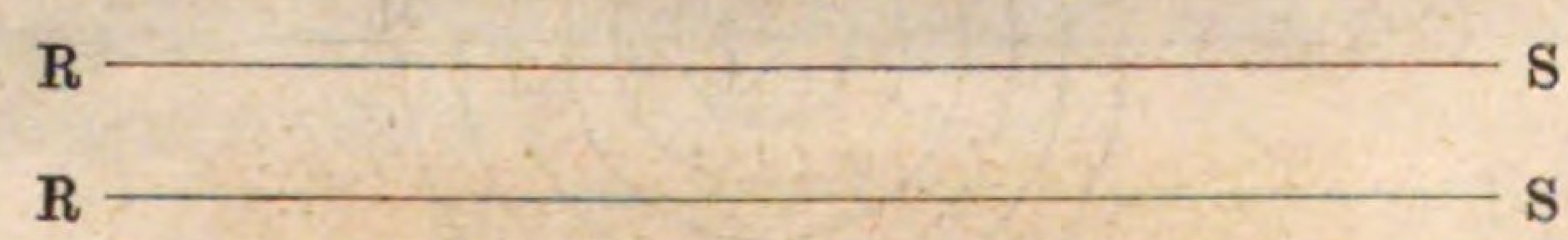
In Rücksicht auf ihre Lage erhalten die Linien noch verschiedene Namen: eine lothrechte, senkrechte oder perpendikulare Linie ist eine solche, welche in Richtung des Bleiloths, des Senkblei's oder des stillstehenden Perpendikels nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet ist. Die senkrechten Linien folgen also der Richtung der Erdradien, z. B. O N.

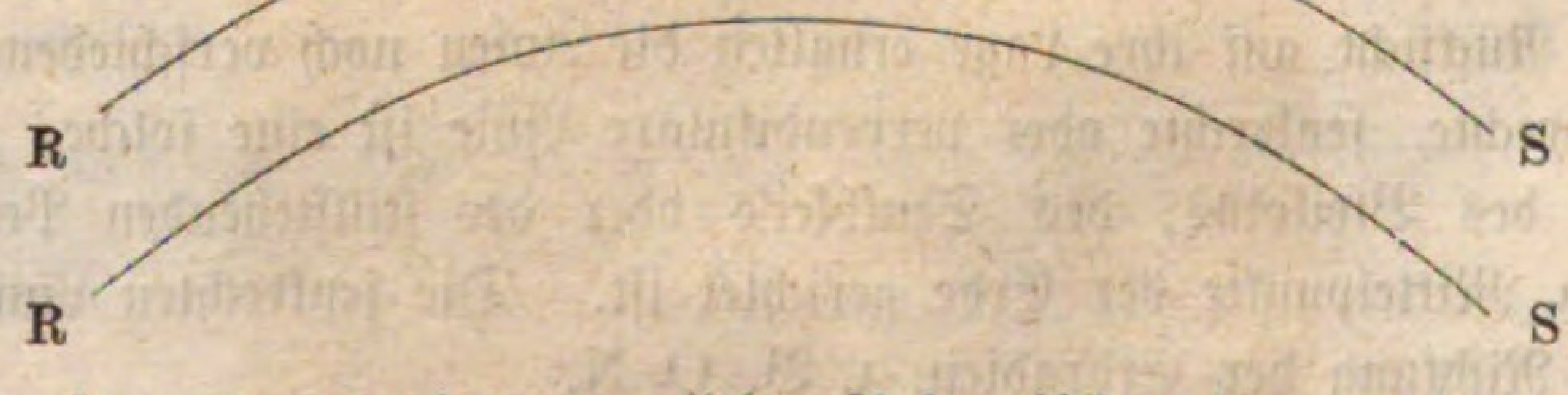




Den Gegensatz zu den lothrechten Linien bilden die wagerechten. Eine wagerechte Linie ist nämlich eine solche, welche in Richtung des Wagebalkens liegt, oder in Richtung des stillstehenden Wassers, oder noch genauer, eine solche Linie, welche mit dem Erdradius zwei rechte Winkel bildet, z. B. p q.

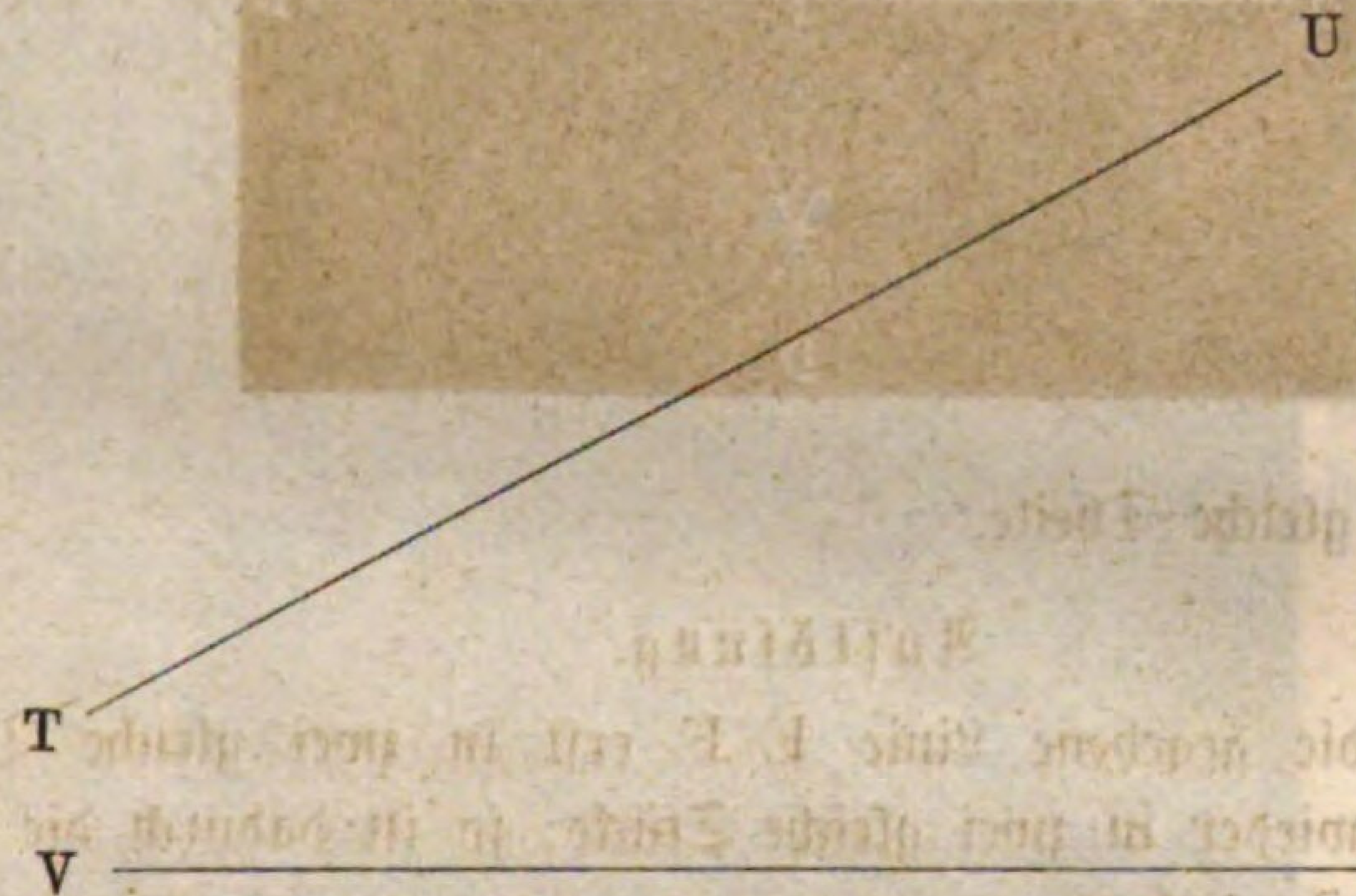
Wenn zwei gerade oder krumme Linien eine solche Lage gegeneinander haben, daß, wenn sie auch ins Unendliche verlängert werden, sie sich doch nie schneiden, sondern stets gleich weit auseinander bleiben, so werden sie parallele Linien genannt, z. B. R S.

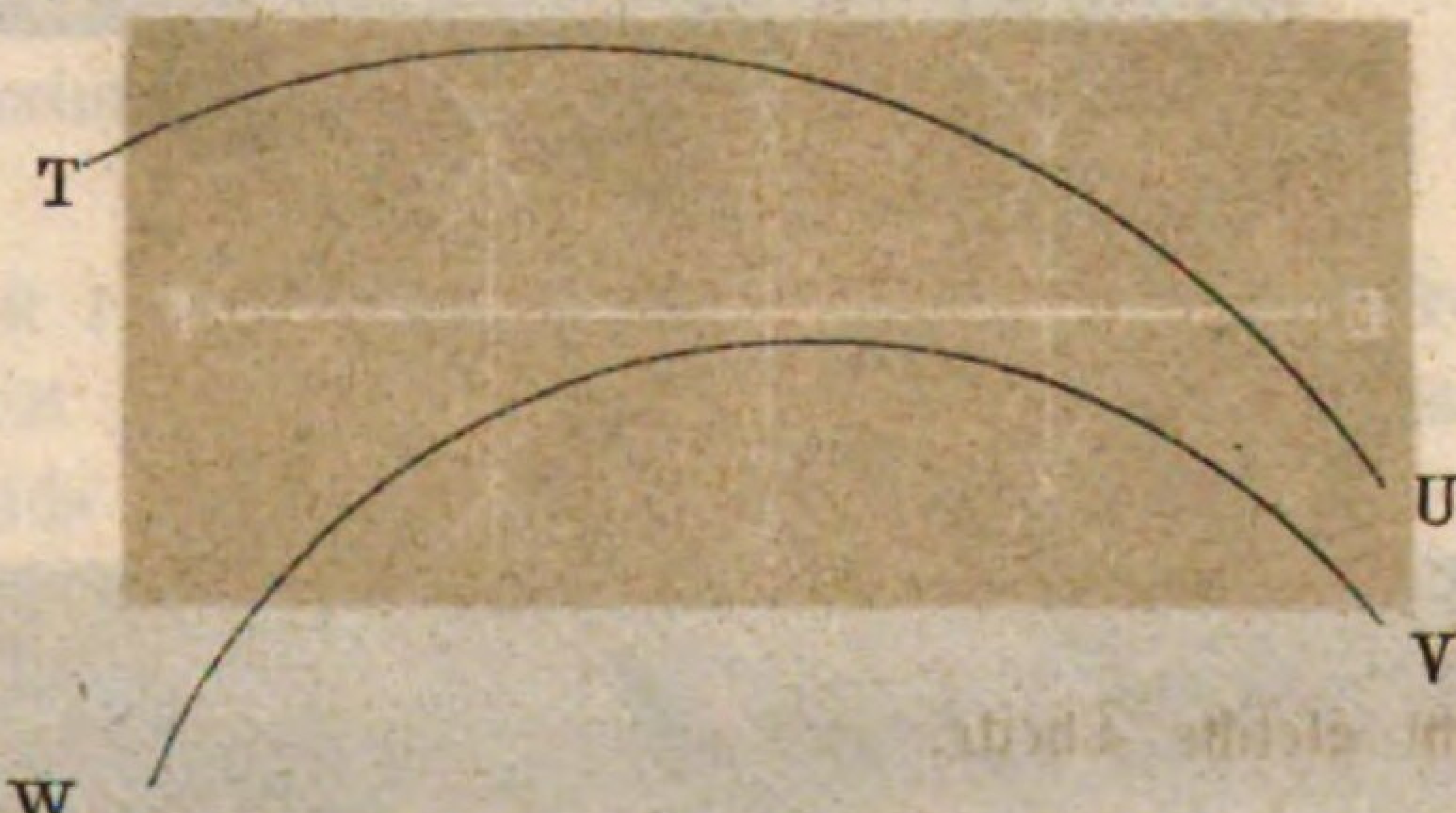




Den Gegensatz zu den parallelen Linien bilden die convergirenden und divergirenden Linien. Haben nämlich zwei gerade oder zwei krumme Linien eine solche Lage gegen einander, daß, wenn man sie verlängert, sie

nach der einen Seite hin immer näher zusammen kommen, nach der andern Seite hin immer weiter auseinander gehen, so nennt man sie wegen des Näherkommens convergirende, und wegen des Auseinandergehens divergirende Linien, z. B. T U und V W.





§. 3.

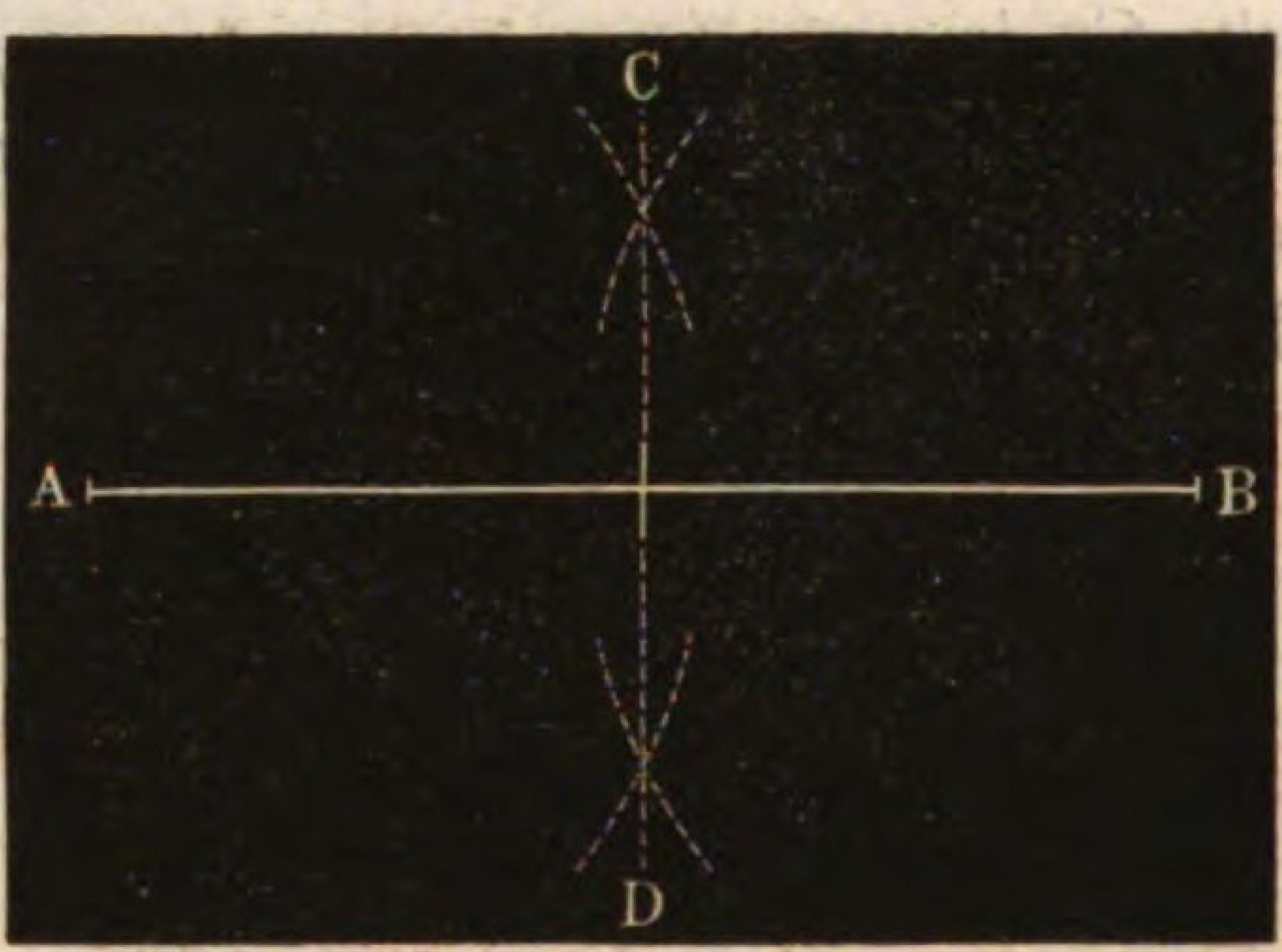
Linienconstructionen.

I. Theile durch Halbiren eine gerade Linie in zwei, vier, acht, sechszehn und zweiunddreißig gleiche Theile.

1) In zwei gleiche Theile.

Auflösung.

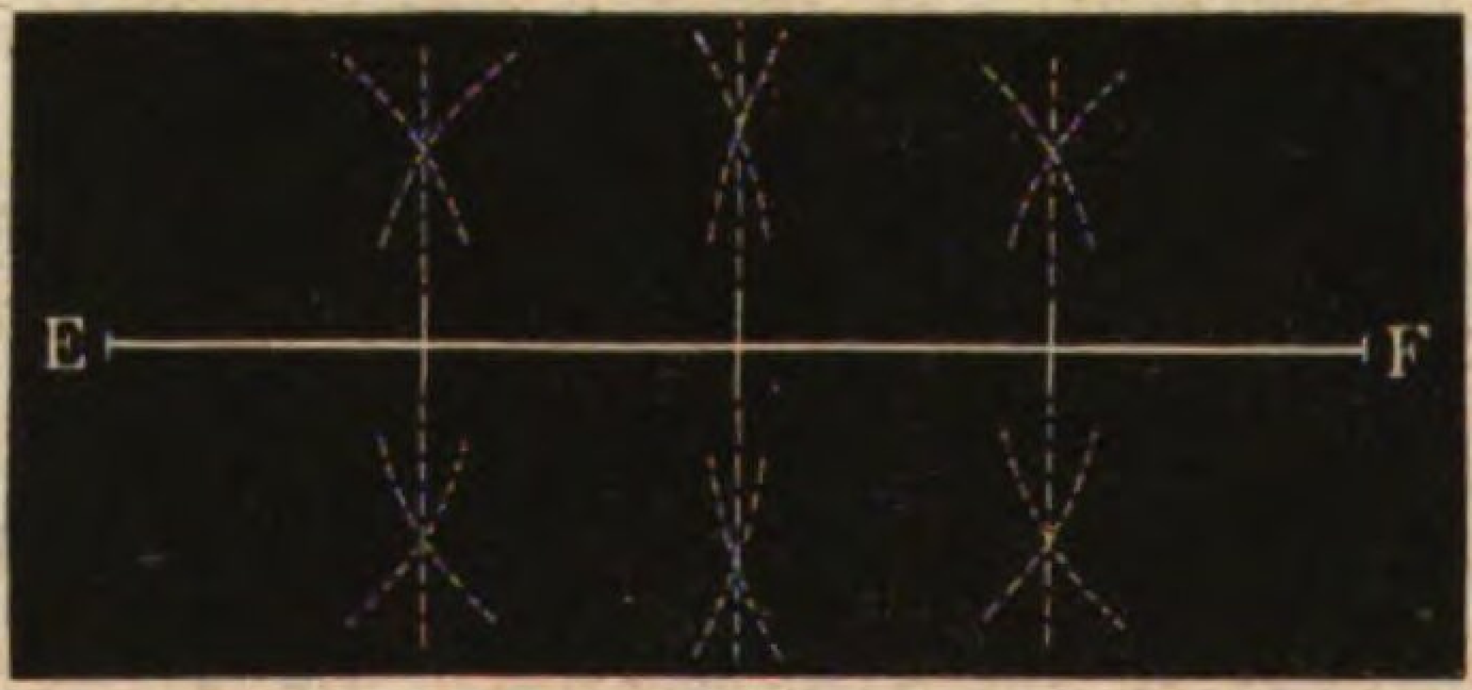
Man schlage aus beiden Endpunkten der gegebenen Linie, aus A und B, oberhalb und unterhalb derselben mit gleicher Eröffnung des Zirkels Kreisbogen und verbinde die Durchschnittspunkte beider, C und D, durch eine gerade Linie mit einander; so theilt diese die gegebene Linie AB in zwei gleiche Theile.



2) In vier gleiche Theile.

Auflösung.

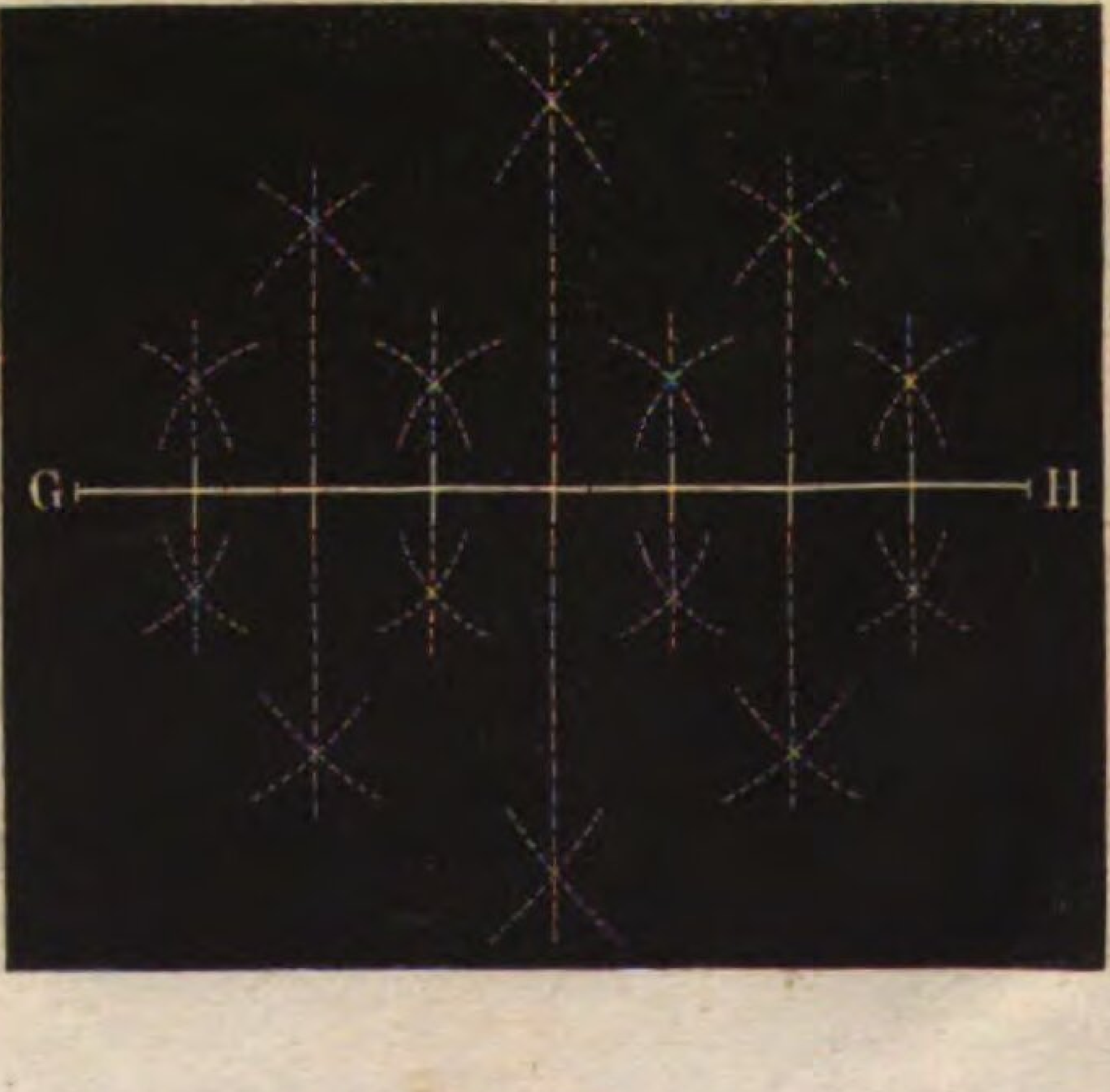
Man theile die gegebene Linie E F erst in zwei gleiche Theile und dann jeden Theil wieder in zwei gleiche Stücke; so ist dadurch die Linie E F in vier gleiche Theile zerlegt.

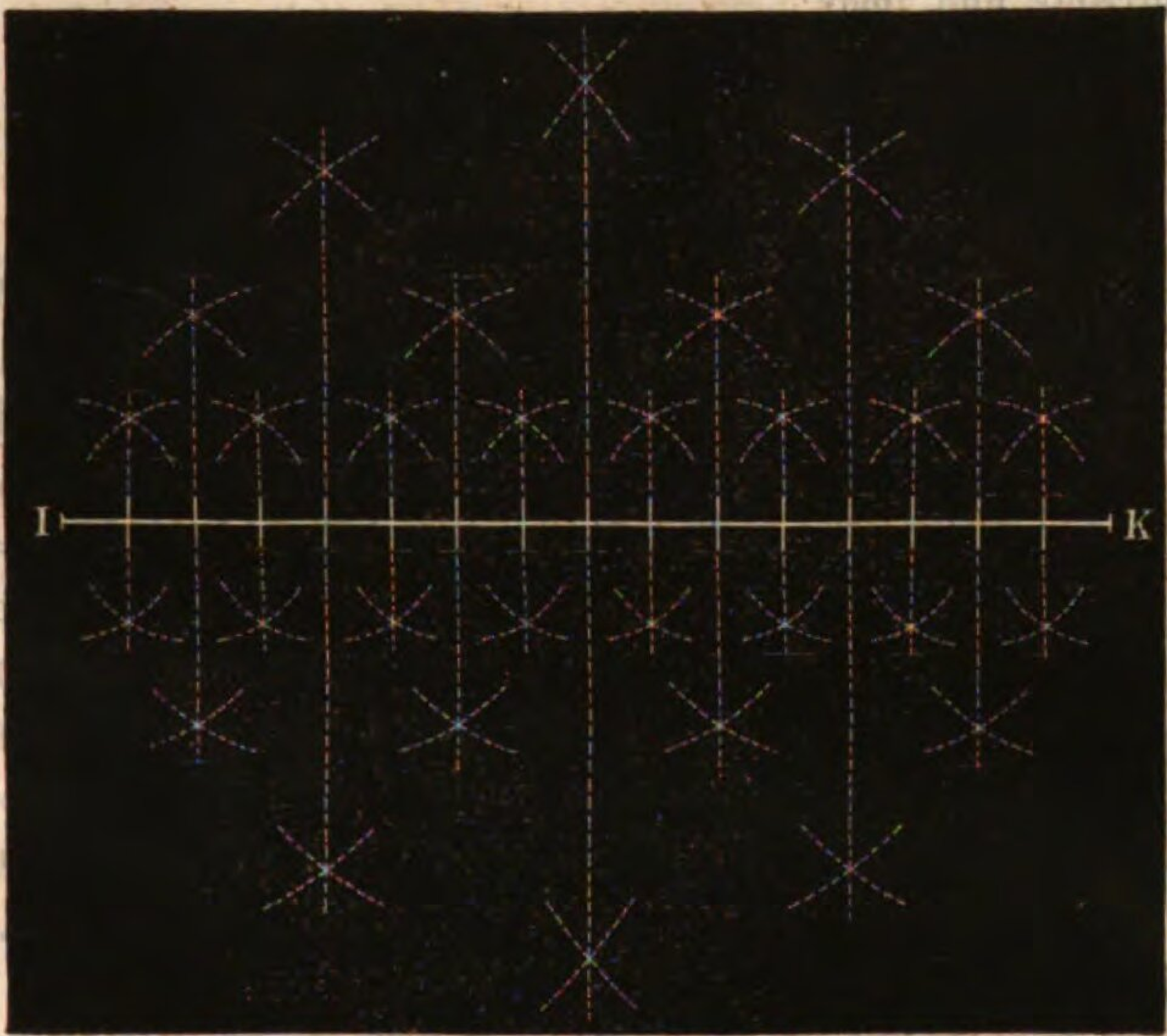


3) In acht gleiche Theile.

Auflösung.

Zerlege zuerst nach der angegebenen Weise die Linie G H in vier gleiche Theile und theile dann jedes gleiche Viertel noch ein Mal.





4) In sechszehn gleiche Theile.

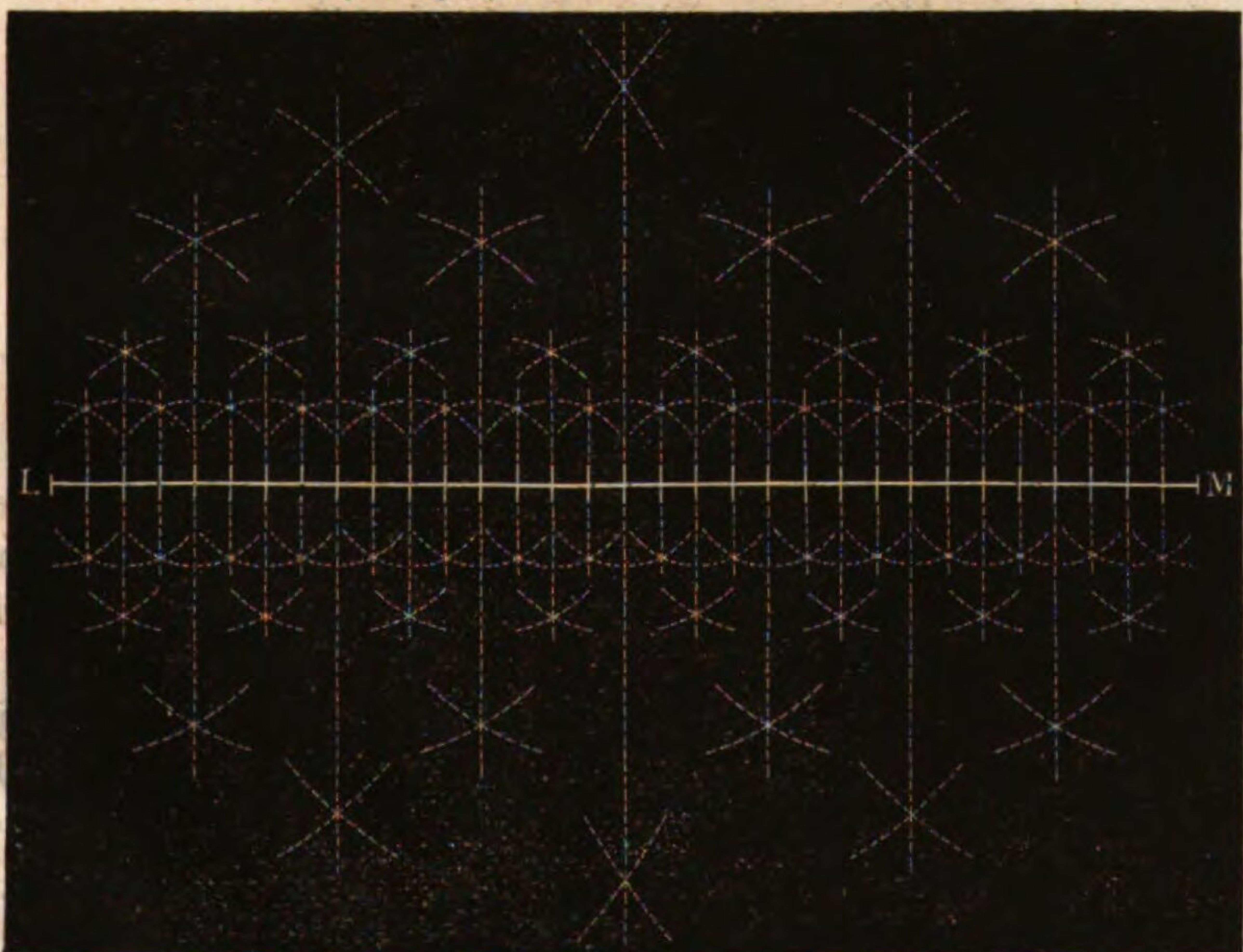
Auflösung.

Die Linie J K wird erst in acht gleiche Theile getheilt, und dann jedes gleiche Achtel halbirt.

5) In zweiunddreißig gleiche Theile.

Auflösung.

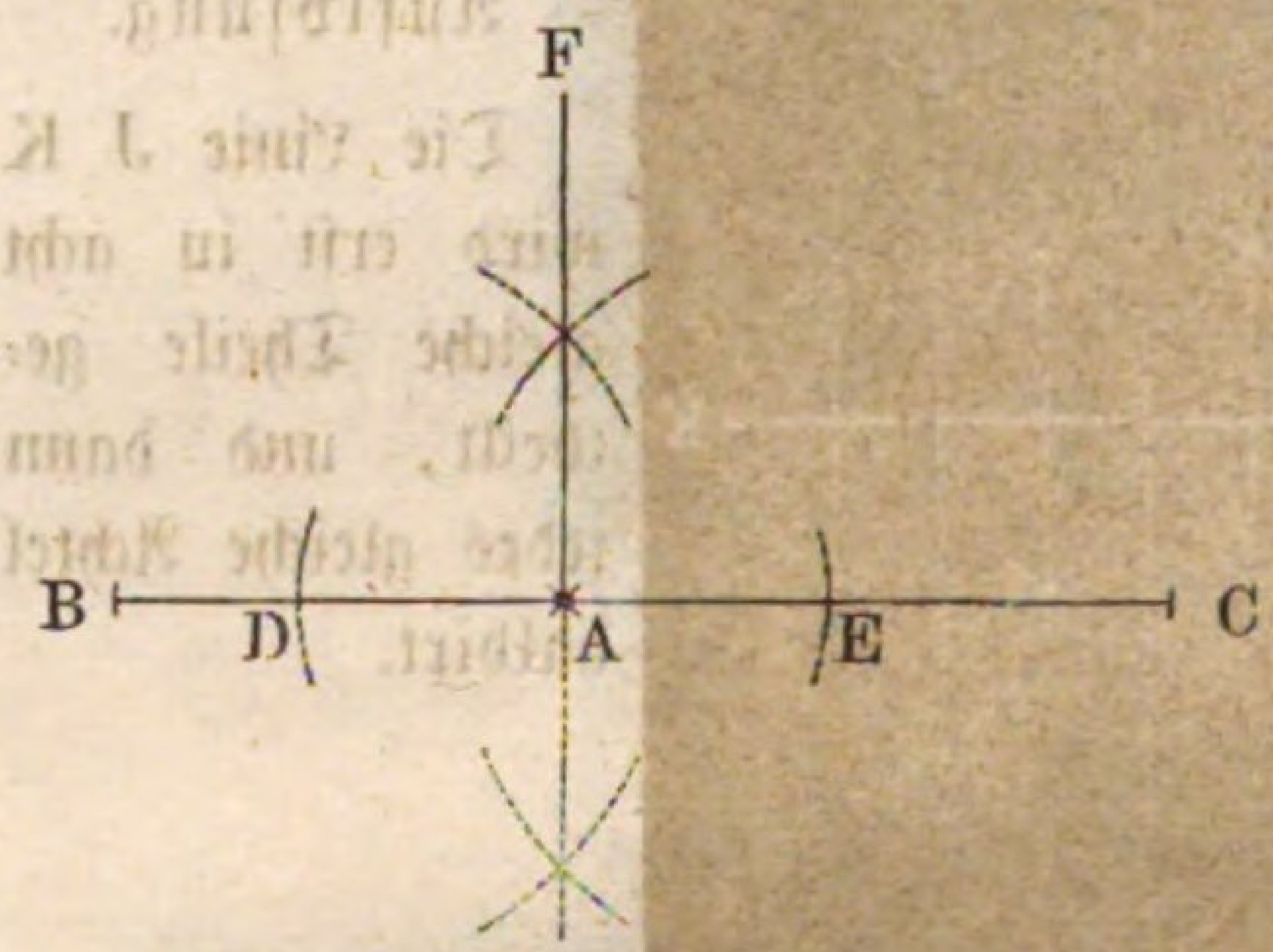
Halbire erst die ganze Linie L M, dann ihre Hälfte, darauf das Viertel, ferner das Achtel und endlich das Sechszehntel; so wird dadurch die ganze Linie in 32 gleiche Theile getheilt.



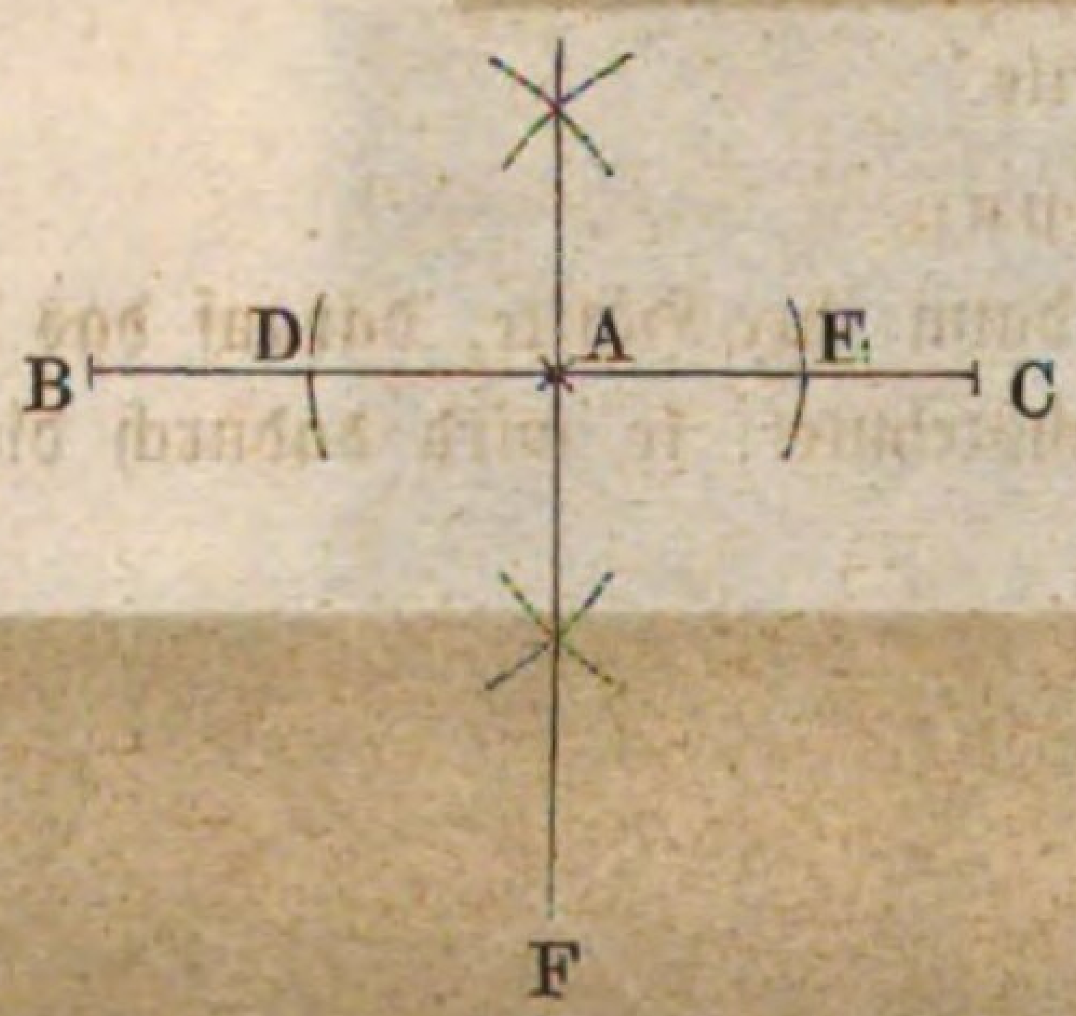
II. Errichte Senkrechte und zwar:

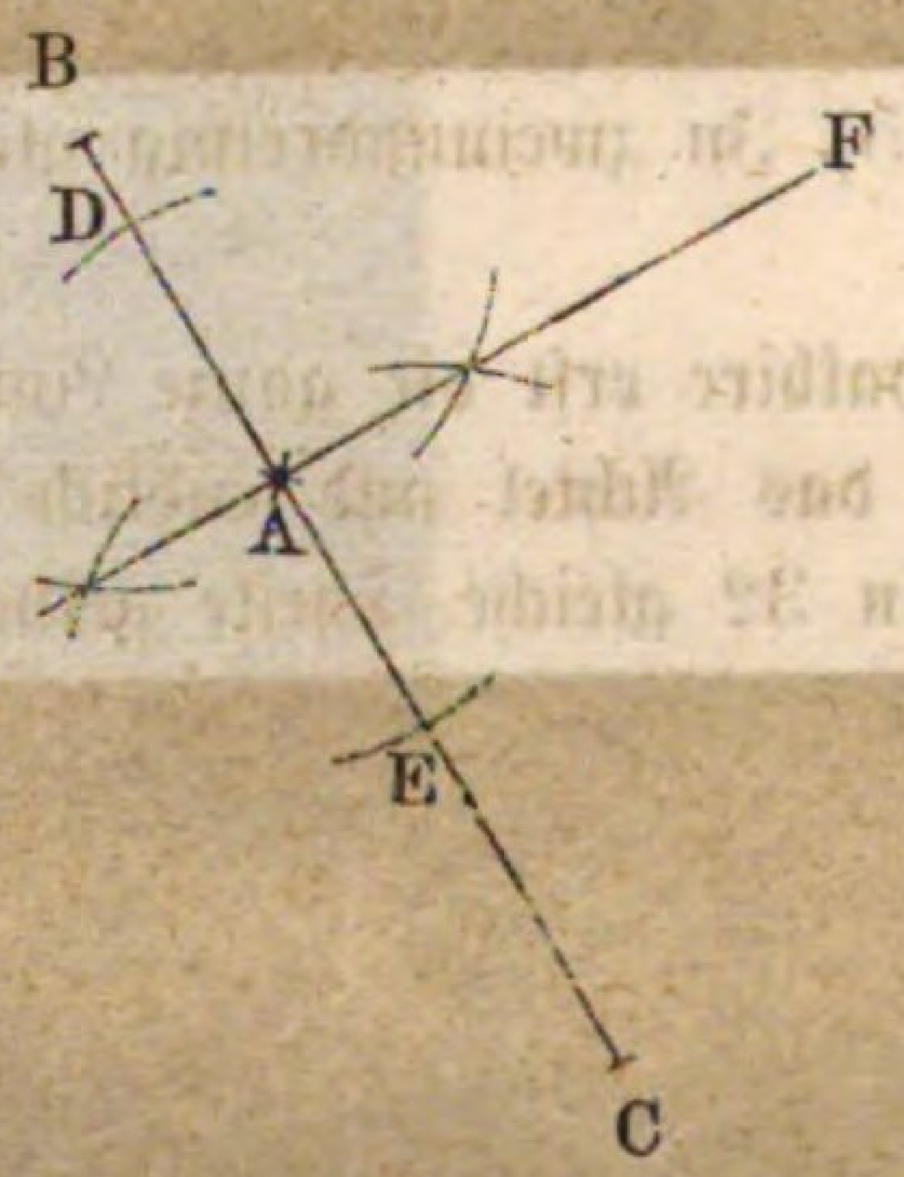
1) Von einem Punkte A in der geraden Linie B C.

Auflösung.



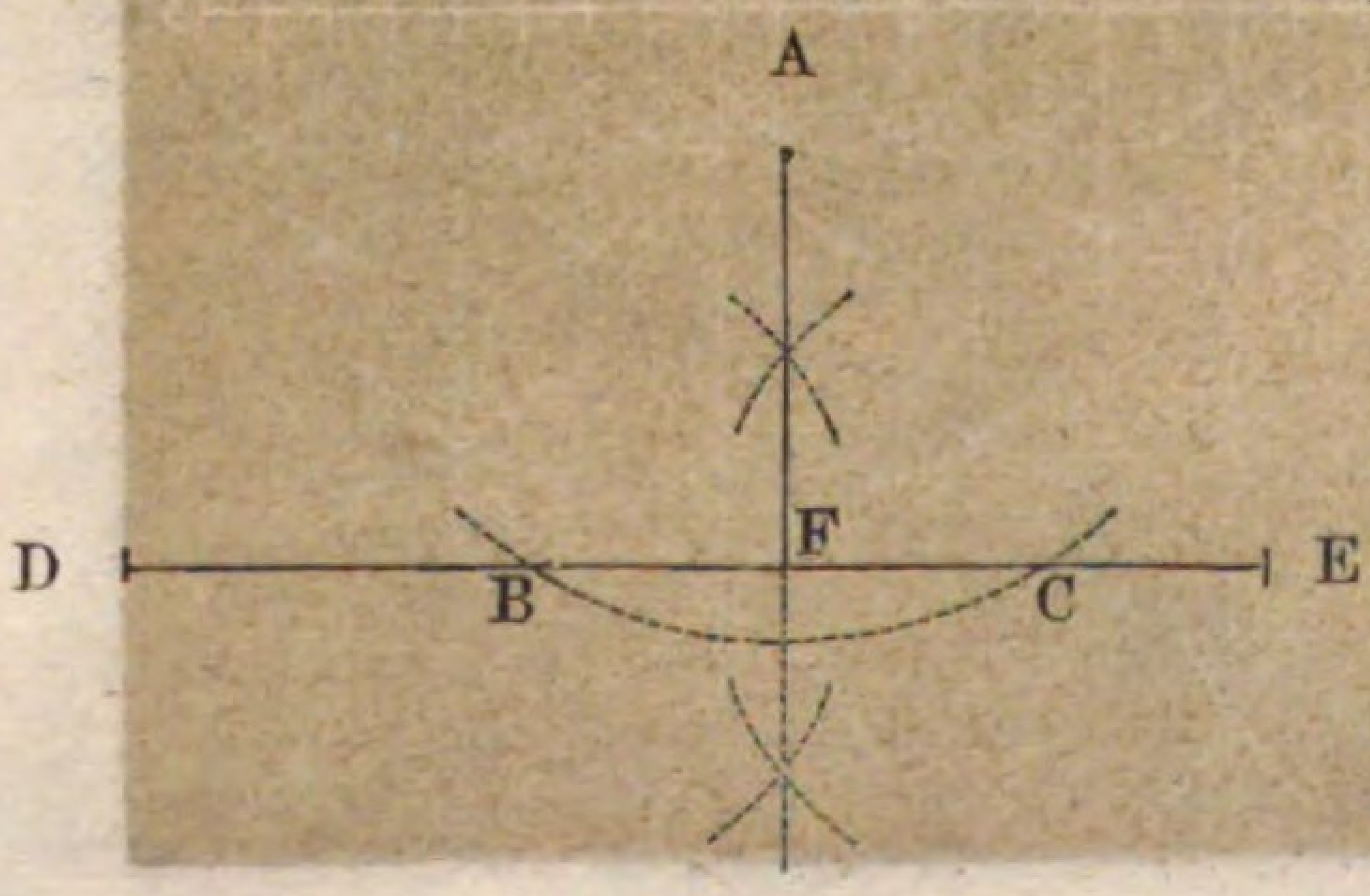
Man setze den einen Fuß des Zirkels in den gegebenen Punkt A und schneide mit dem anderen zwei gleiche Stücke A D und A E ab; alsdann schlage man mit gleicher Zirkelöffnung aus D und E über oder unter B C, oder besser nach beiden Seiten, sich schneidende Kreisbogen und ziehe endlich durch die Durchschnittspunkte derselben und durch den gegebenen Punkt A eine gerade Linie; so ist A F die verlangte Senkrechte.



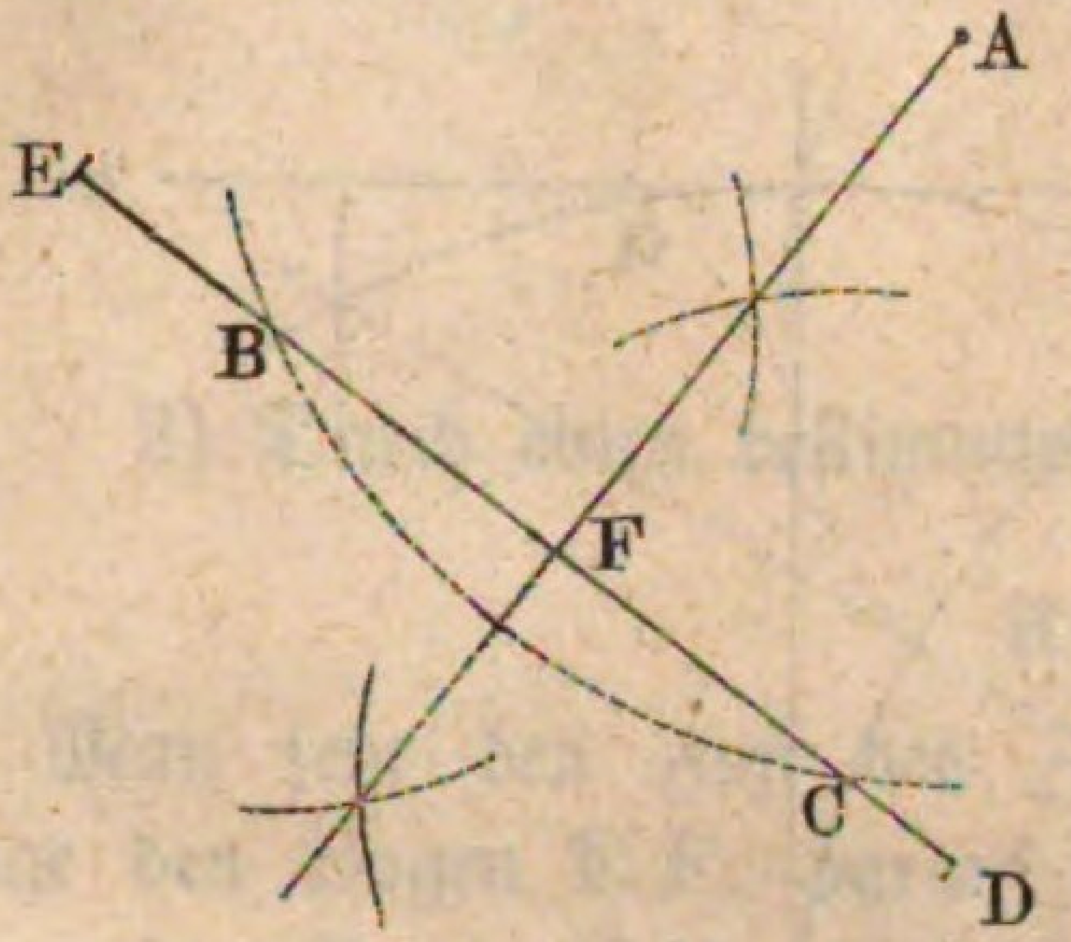


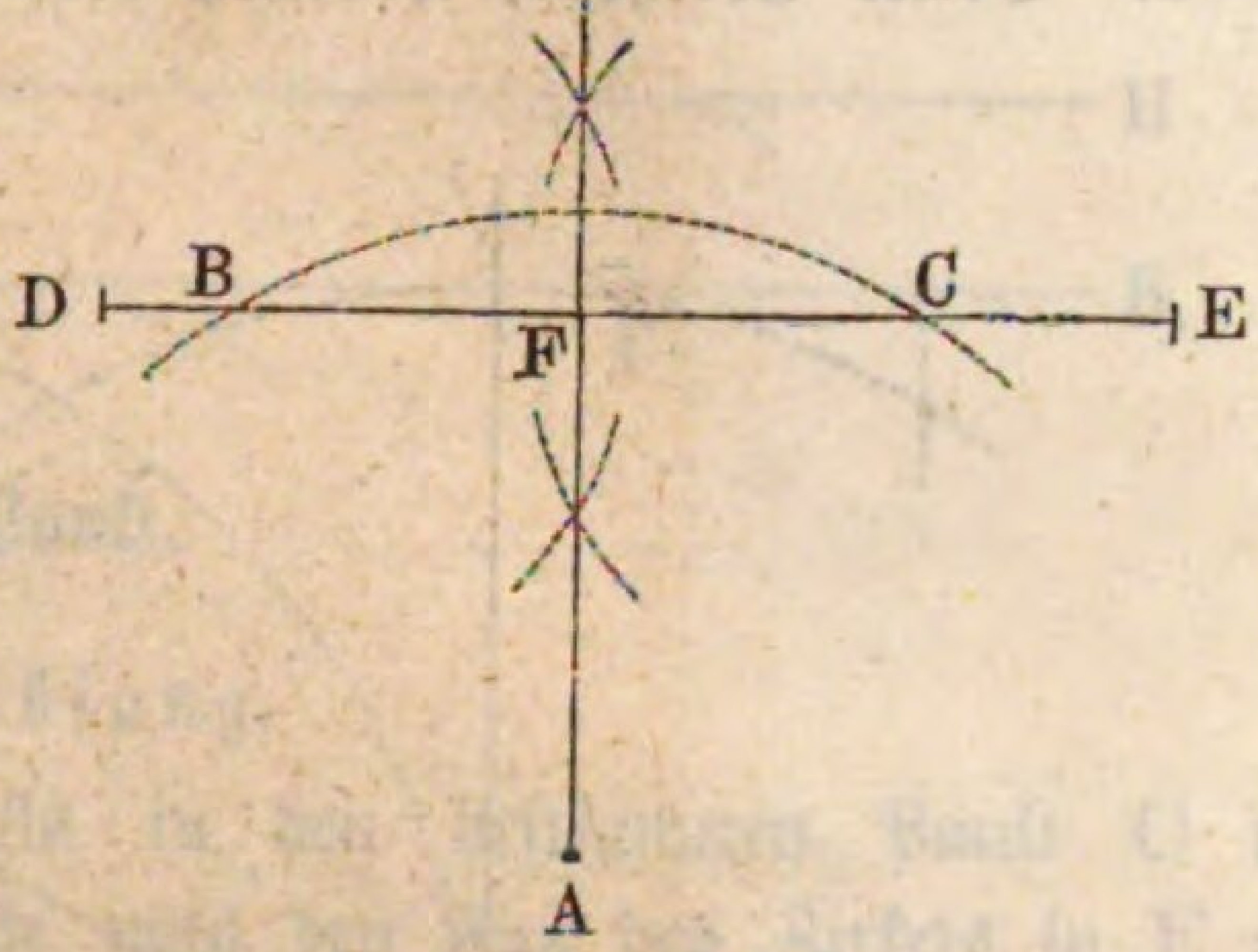
2) Von einem Punkte außerhalb einer geraden Linie.

Auflösung.



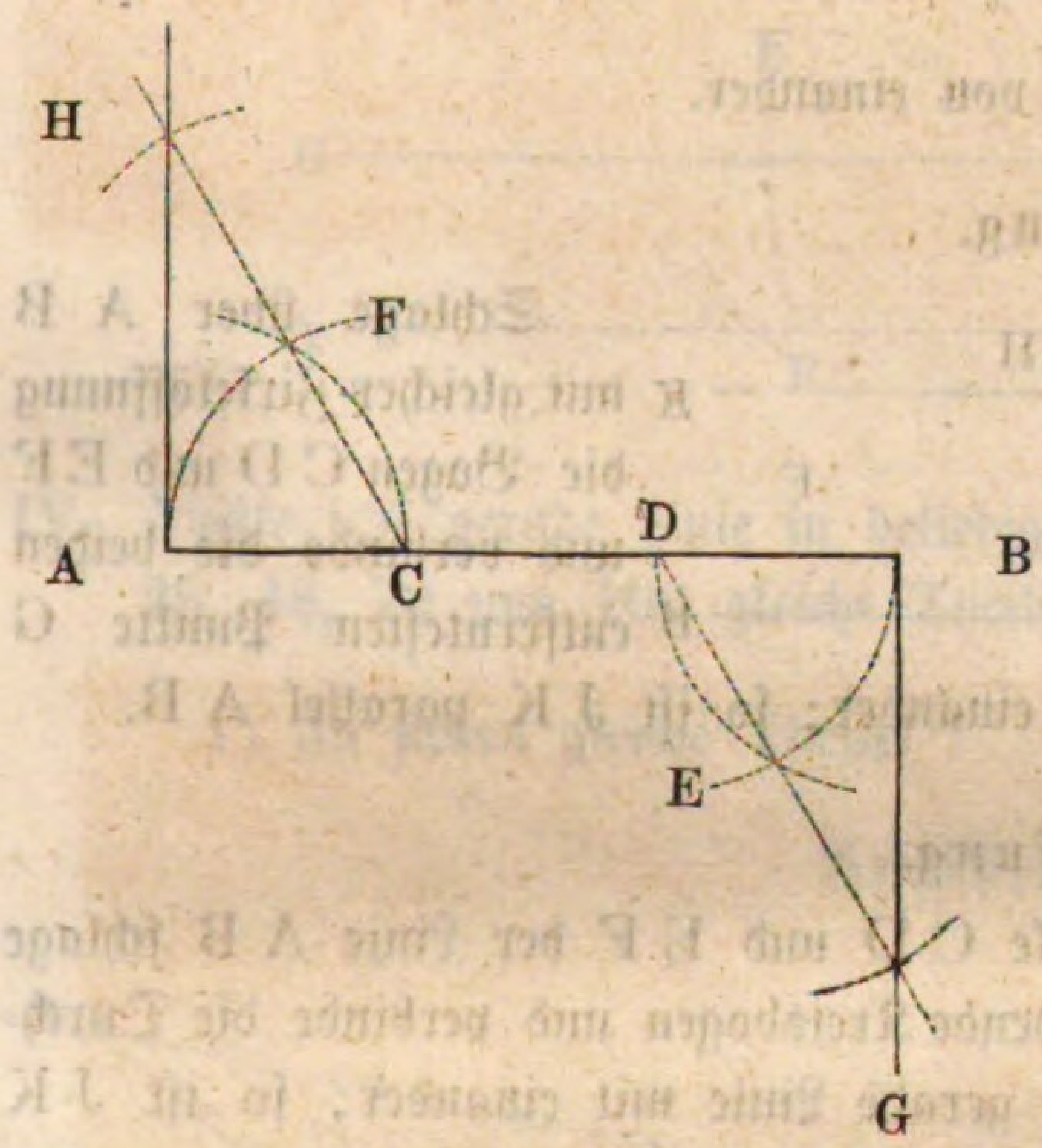
Setze den Fuß des Zirkels in den gegebenen Punkt A, schlage durch die Linie D E den Kreisbogen B C und von B und C aus sich schneidende Kreisbogen über und unter der Linie D E; endlich ziehe A F, so ist diese die gesuchte Senkrechte.





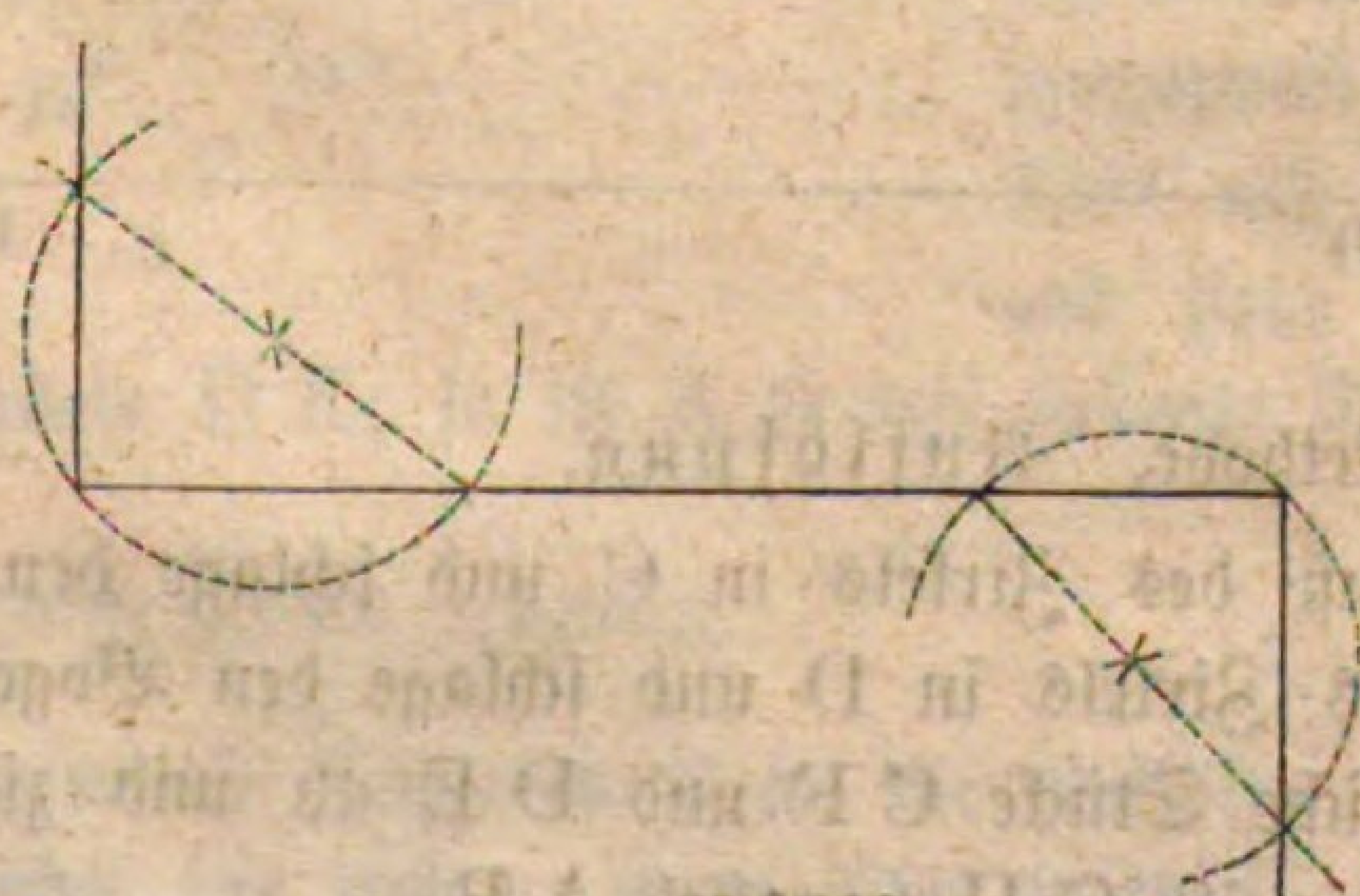
3) Auf das Ende einer geraden Linie, ohne diese zu verlängern.

a. Erste Methode. Auflösung.

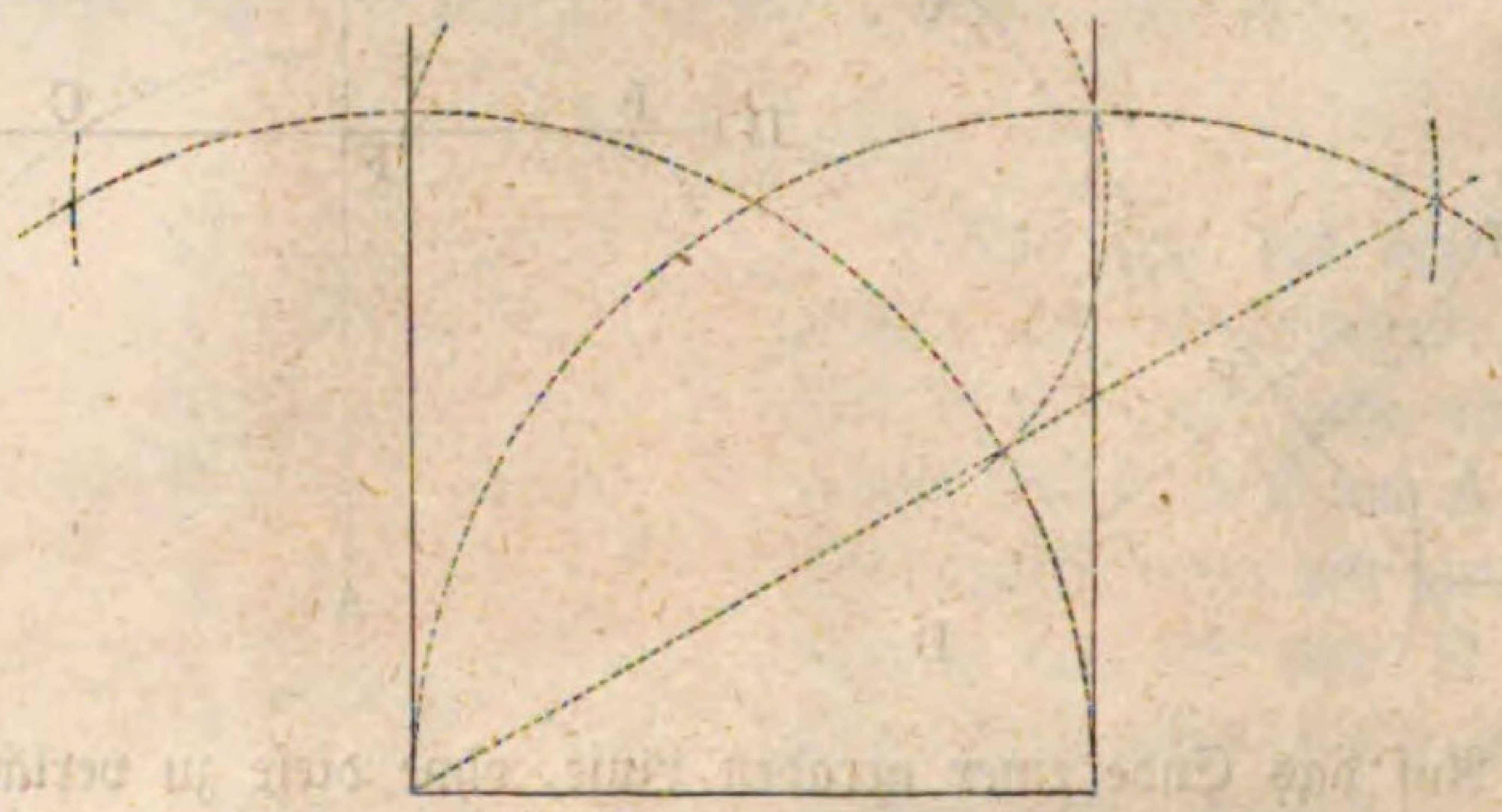


Schneide aus A das beliebige Stück A C ab, mache F A, F C und F H = A C und ziehe die gerade Linie A H; so ist diese die verlangte Senkrechte.

b. Zweite Methode, der ersten ähnlich.



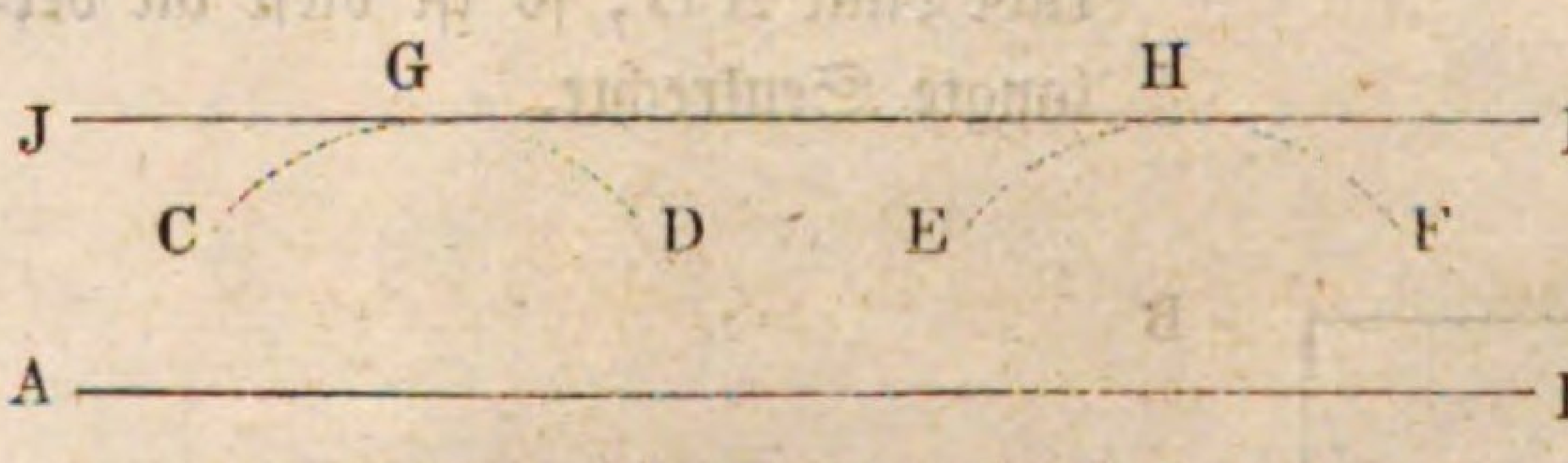
c. Dritte Methode, wodurch verschieden?



III. Construire parallele Linien und zwar:

1) In beliebiger Entfernung von einander.

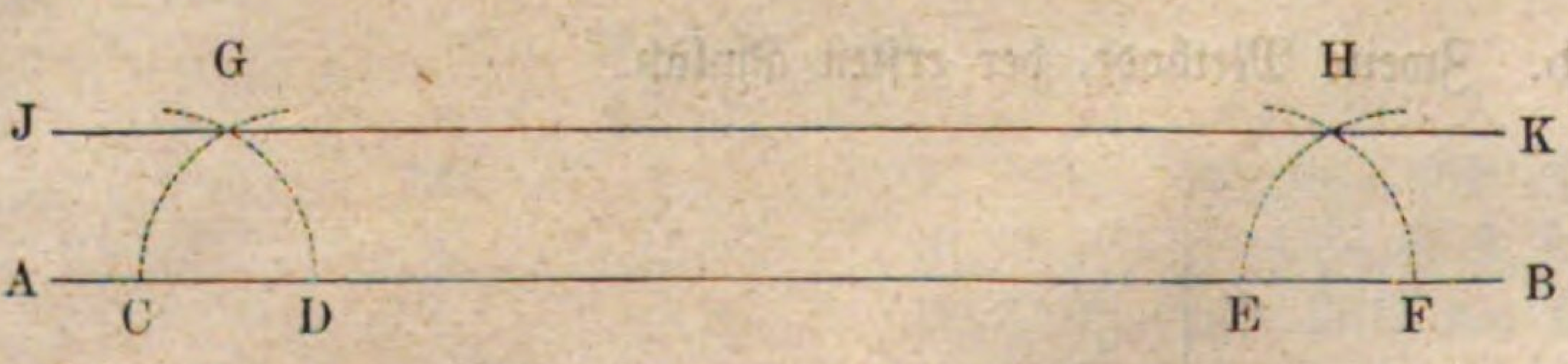
a. Erste Methode. Auflösung.



Schlage über A B mit gleicher Zirkelöffnung die Bogen C D und E F und verbinde die beiden entferntesten Punkte G und H durch eine gerade Linie mit einander; so ist J K parallel A B.

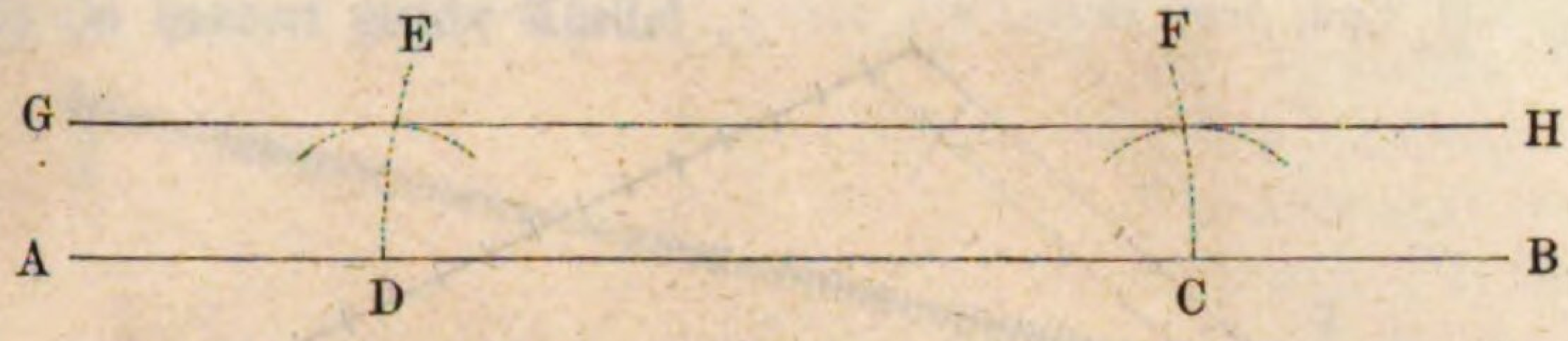
b. Zweite Methode. Auflösung.

Ueber die beiden gleichen Stücke C D und E F der Linie A B schlage mit gleicher Zirkelöffnung sich schneidende Kreisbogen und verbinde die Durchschnittspunkte G und H durch eine gerade Linie mit einander; so ist J K parallel A B.



c. Dritte Methode. Auflösung.

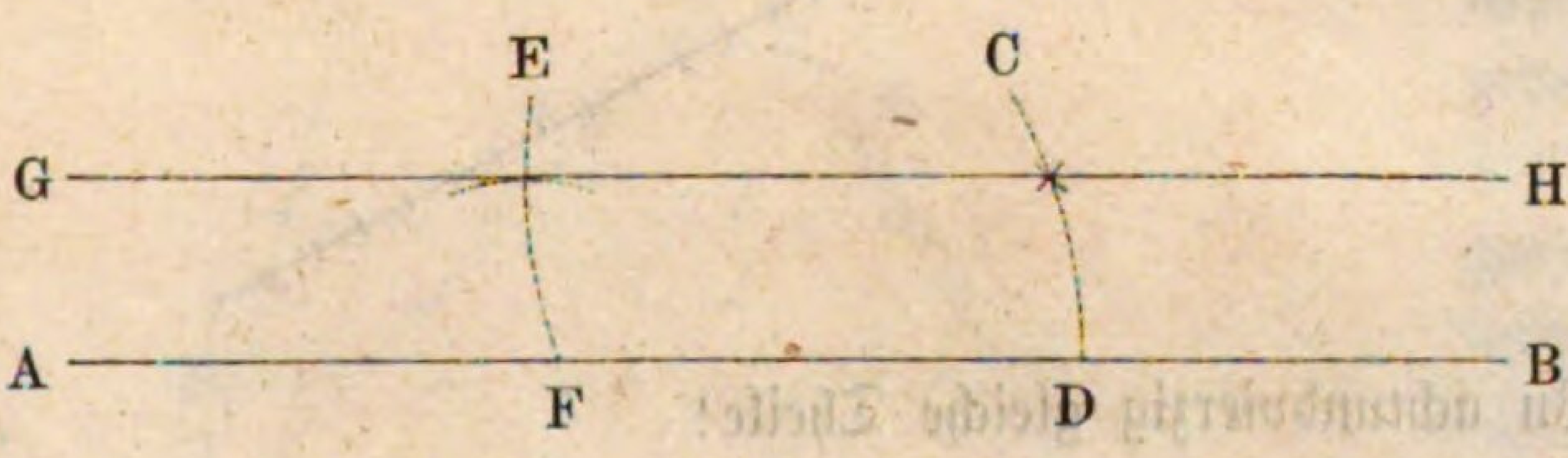
Setze den Fuß des Zirkels in C und schlage den Bogen D E, stelle dann den Fuß des Zirkels in D und schlage den Bogen C F, von beiden Bogen schneide gleiche Stücke C F und D E ab und ziehe durch E und F eine gerade Linie; so ist G H parallel A B.



2) Durch einen bestimmten Punkt.

Auflösung.

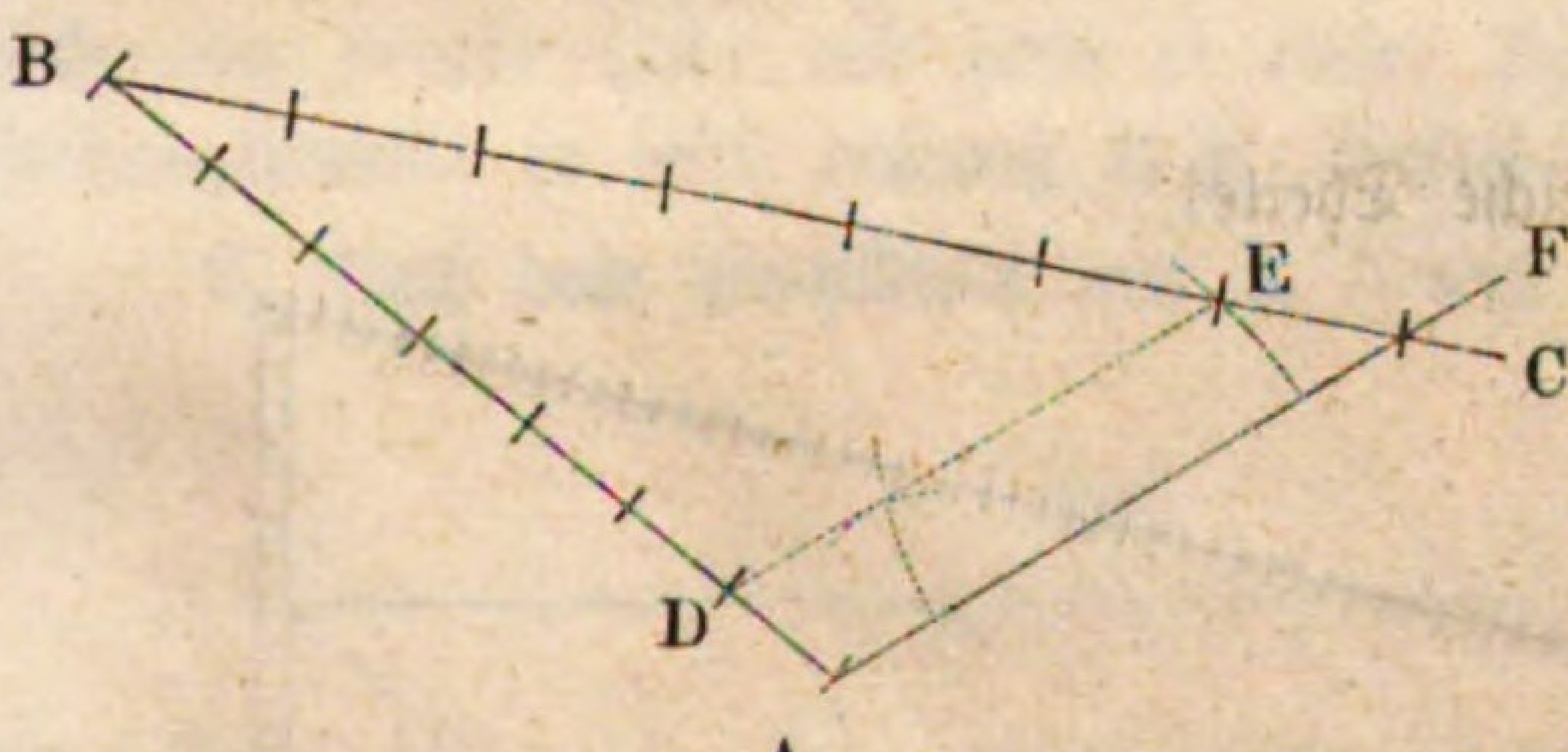
Man setze den Fuß des Zirkels in den bestimmten Punkt C und schlage den Bogen E F, darauf stelle man den Fuß des Zirkels in F und schlage den Bogen C D, alsdann mache man E F = C D und ziehe durch E und C die gerade Linie G H; so ist diese A B parallel und geht durch den gegebenen Punkt C.



IV. Theile jede gerade Linie in beliebig viele gleiche Theile, etwa in 7, 16, 25, 48, 72 und 100 gleiche Theile!

1) In sieben gleiche Theile!

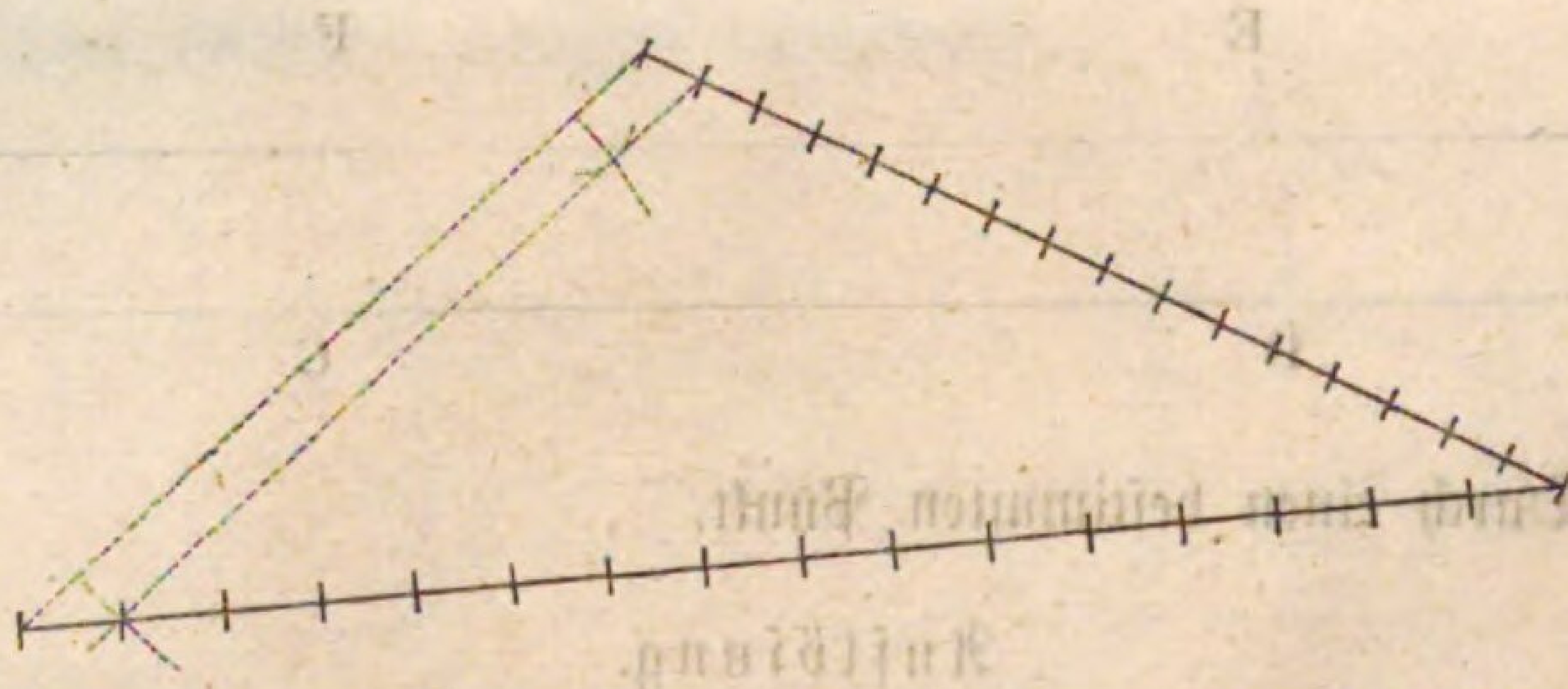
Auflösung:



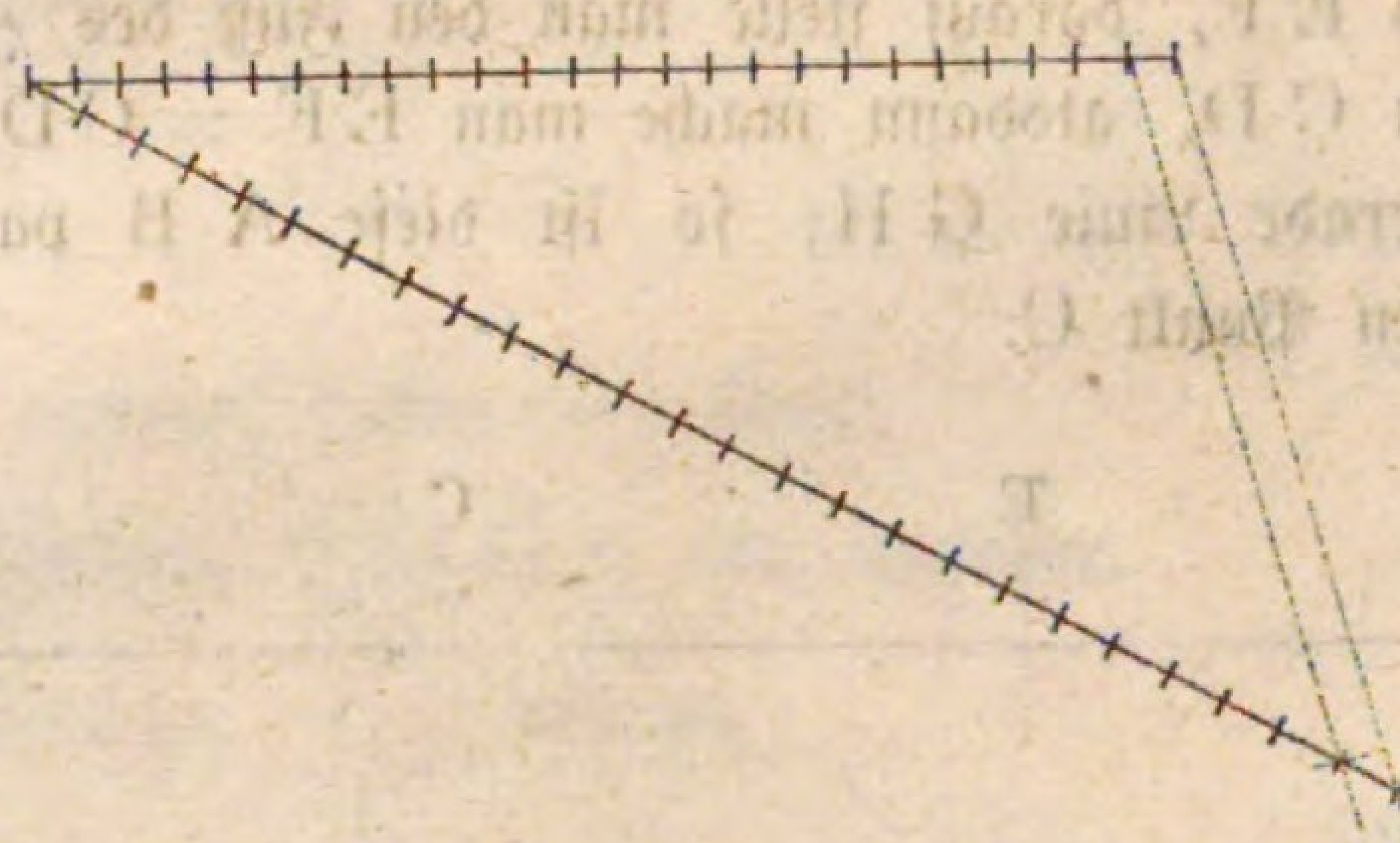
Man lege an die zu theilende Linie AB unter einem beliebigen Winkel B eine gerade Linie B C, stecke von B aus auf dieser 7 gleiche Stücke ab, verbinde den letzten Theilungspunkt F durch eine gerade Linie mit dem Endpunkte A und ziehe zu A F durch den Punkt E eine Parallele D E; so ist A D der siebente Theil von A B.

2) In sechszehn gleiche Theile!

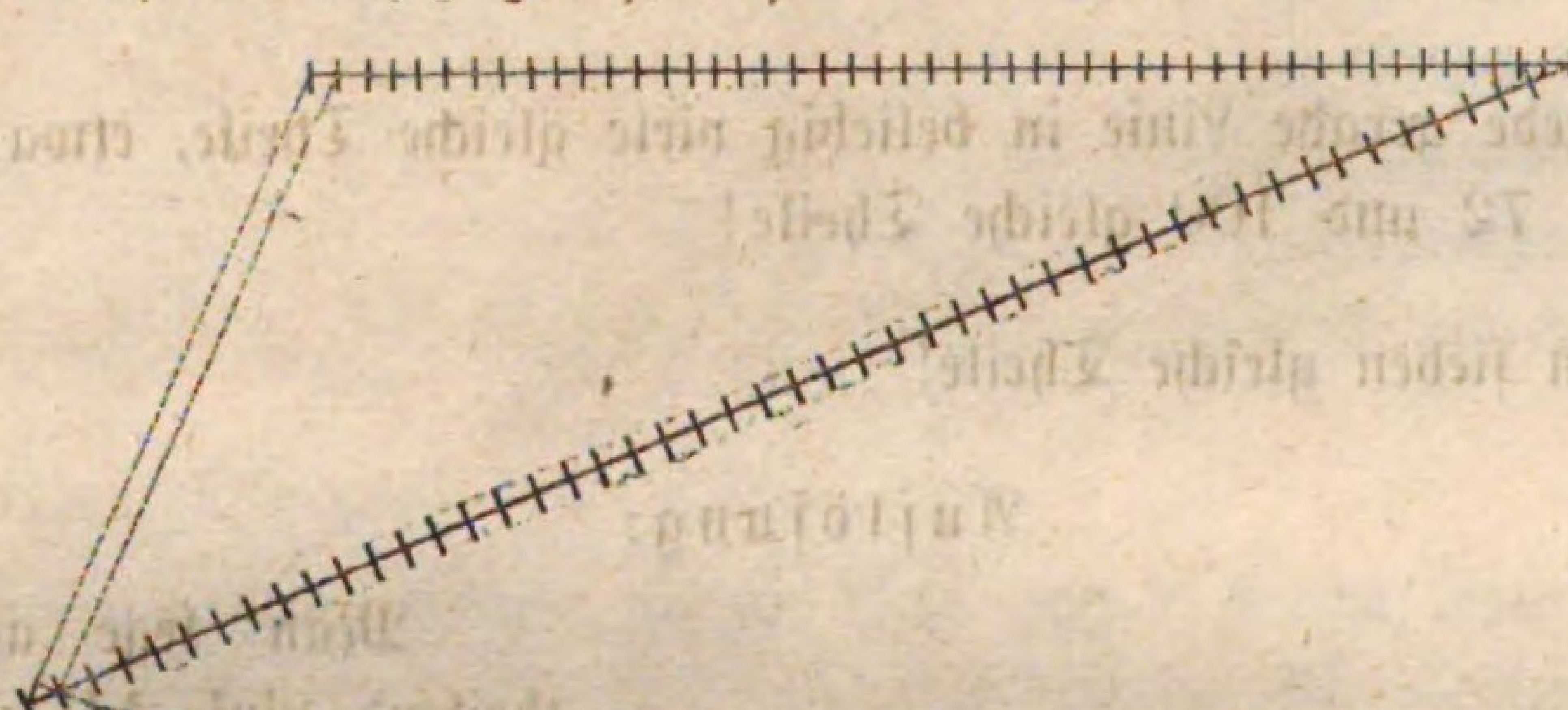
Für die folgenden 5 Aufgaben bleibt die Auflösung dieselbe; die Constructionen müssen aber zur Uebung ausgeführt werden.



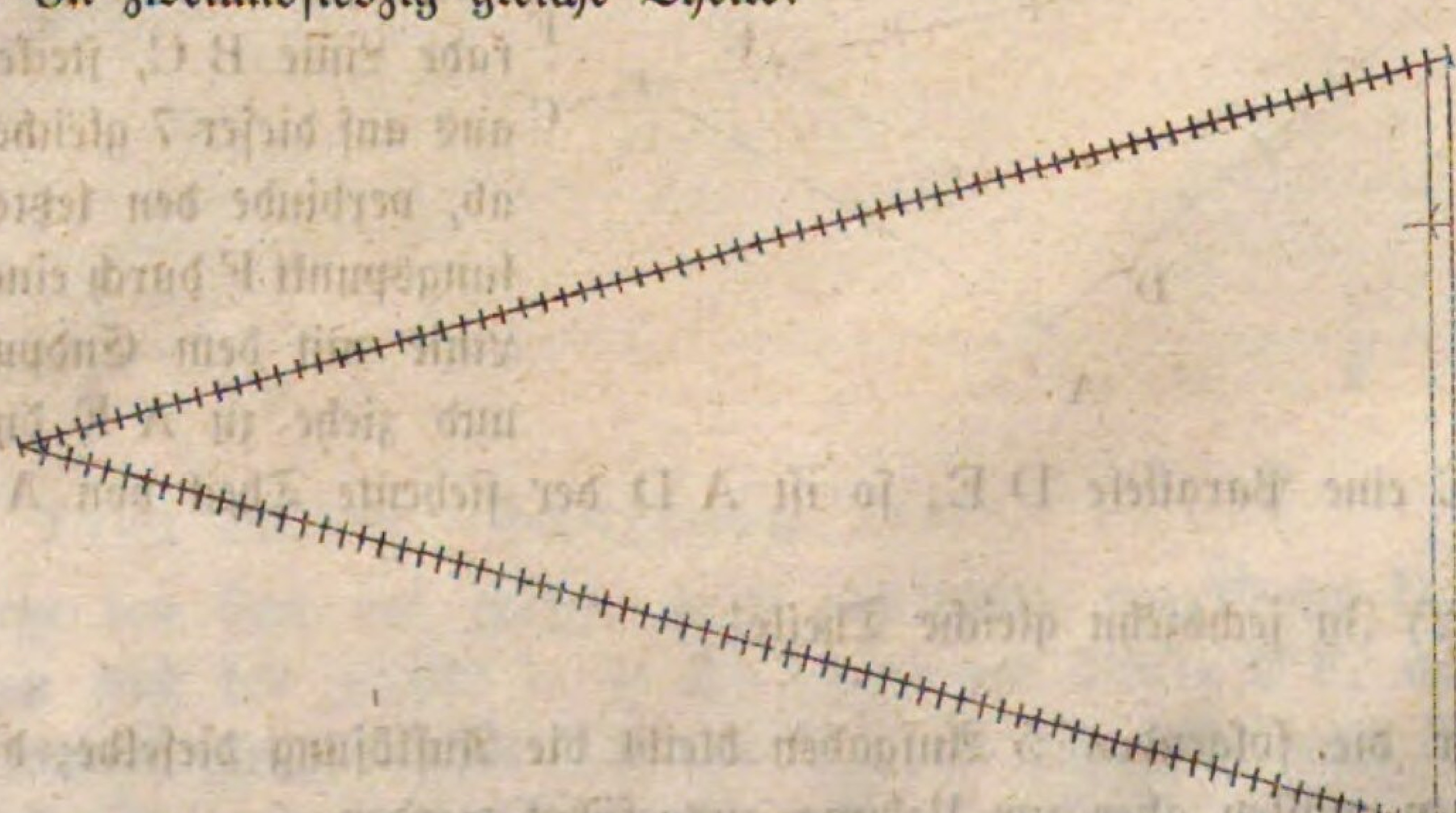
3) In fünfundzwanzig gleiche Theile!



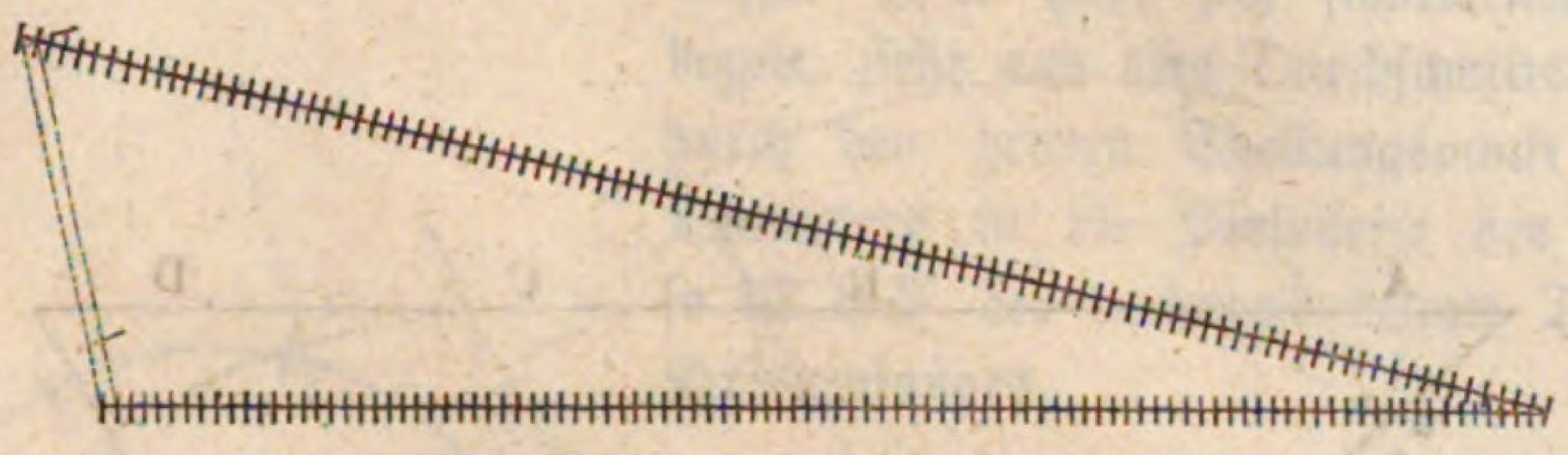
4) In achtundvierzig gleiche Theile!



5) In zweiundsiebzig gleiche Theile!



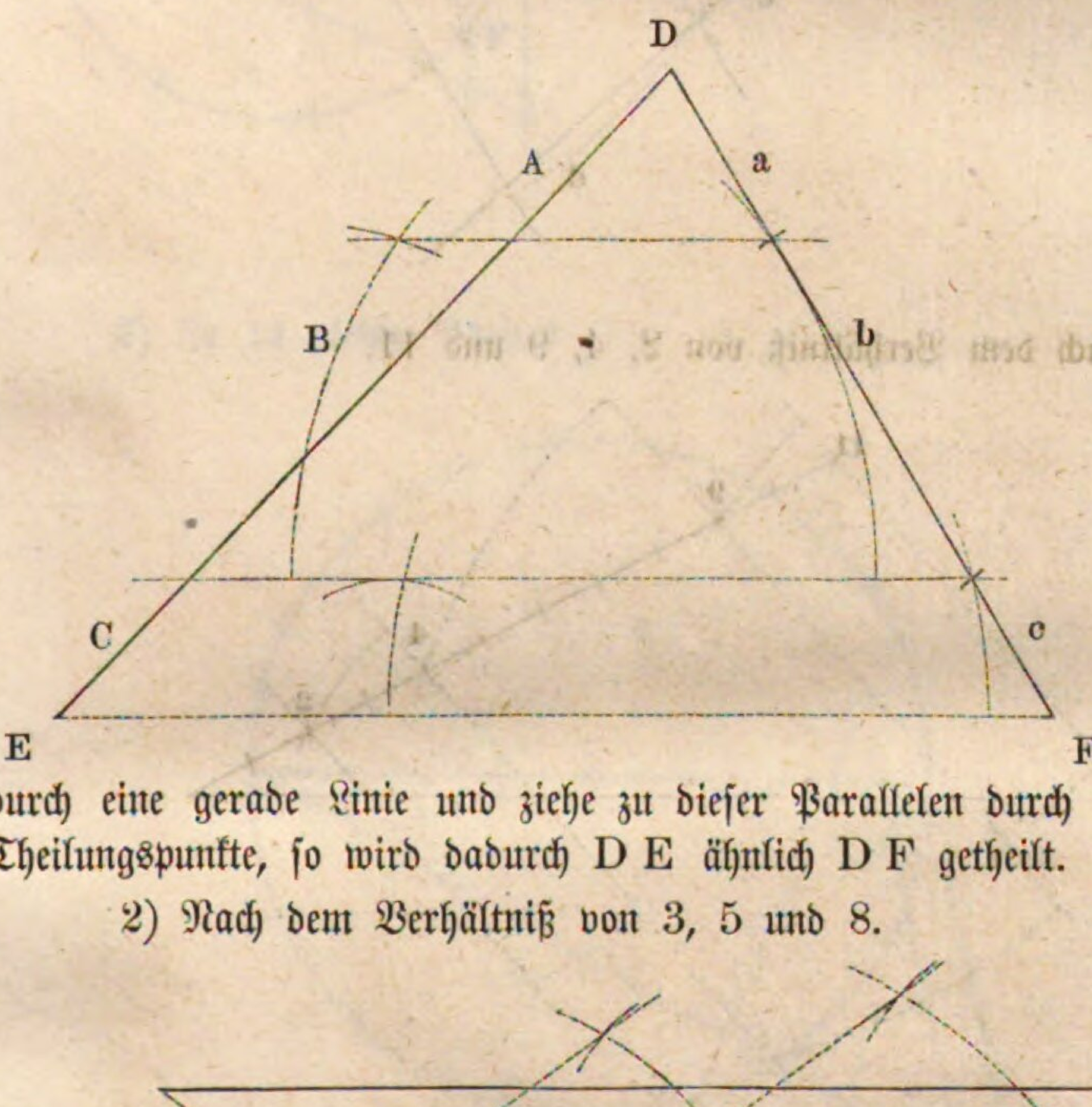
6) In hundert gleiche Theile!



V. Theile eine gerade Linie in ähnliche oder proportionale Theile und zwar:

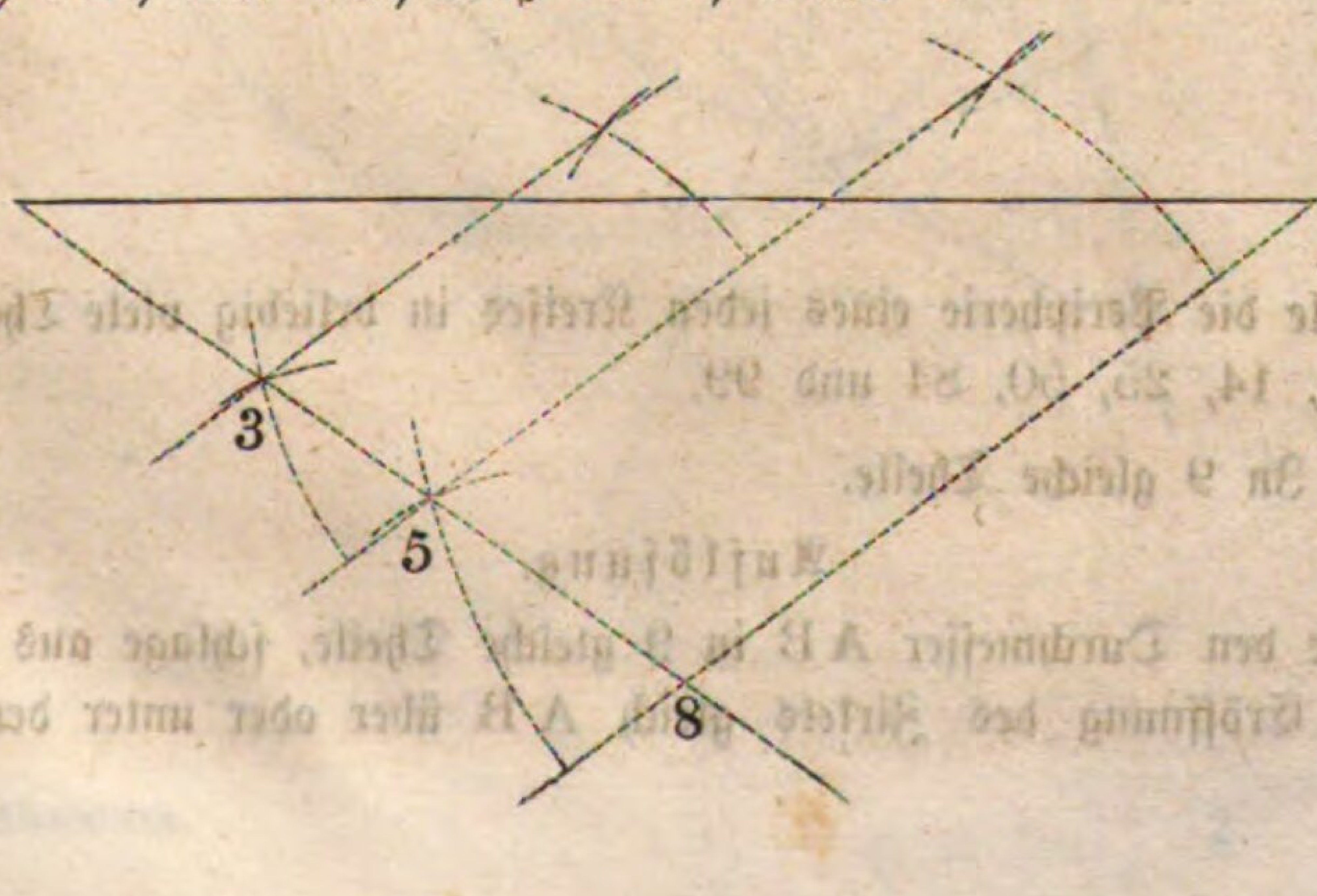
1) Nach dem Verhältniß von a, b und c.

Auflösung:

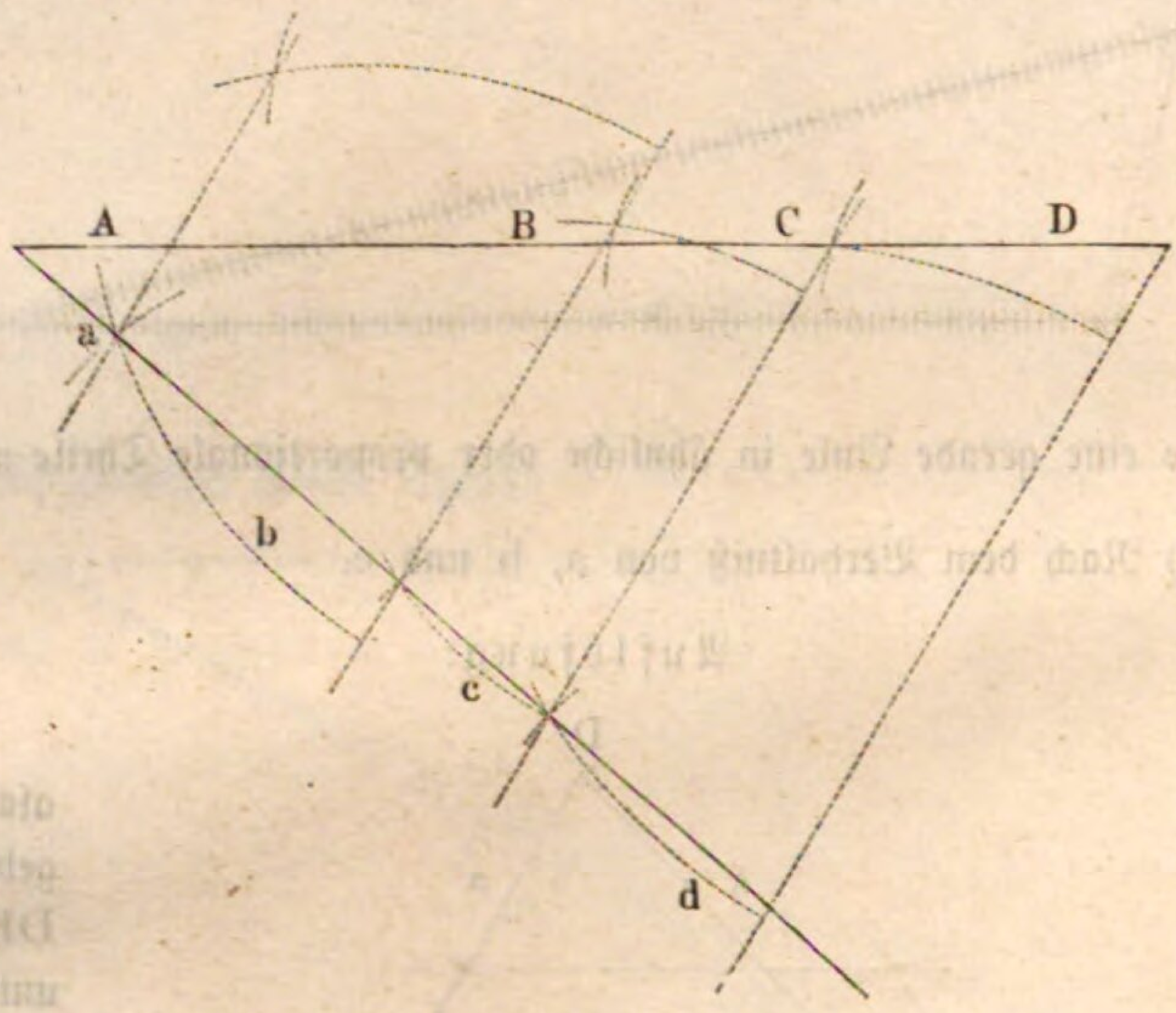


An die als Maß gegebene Linie DF lege man unter einem beliebigen Winkel D die proportional zu theilende Linie D E, verbinde die Endpunkte beider Linien, E und F durch eine gerade Linie und ziehe zu dieser Parallelen durch die gegebenen Theilungspunkte, so wird dadurch D E ähnlich D F getheilt.

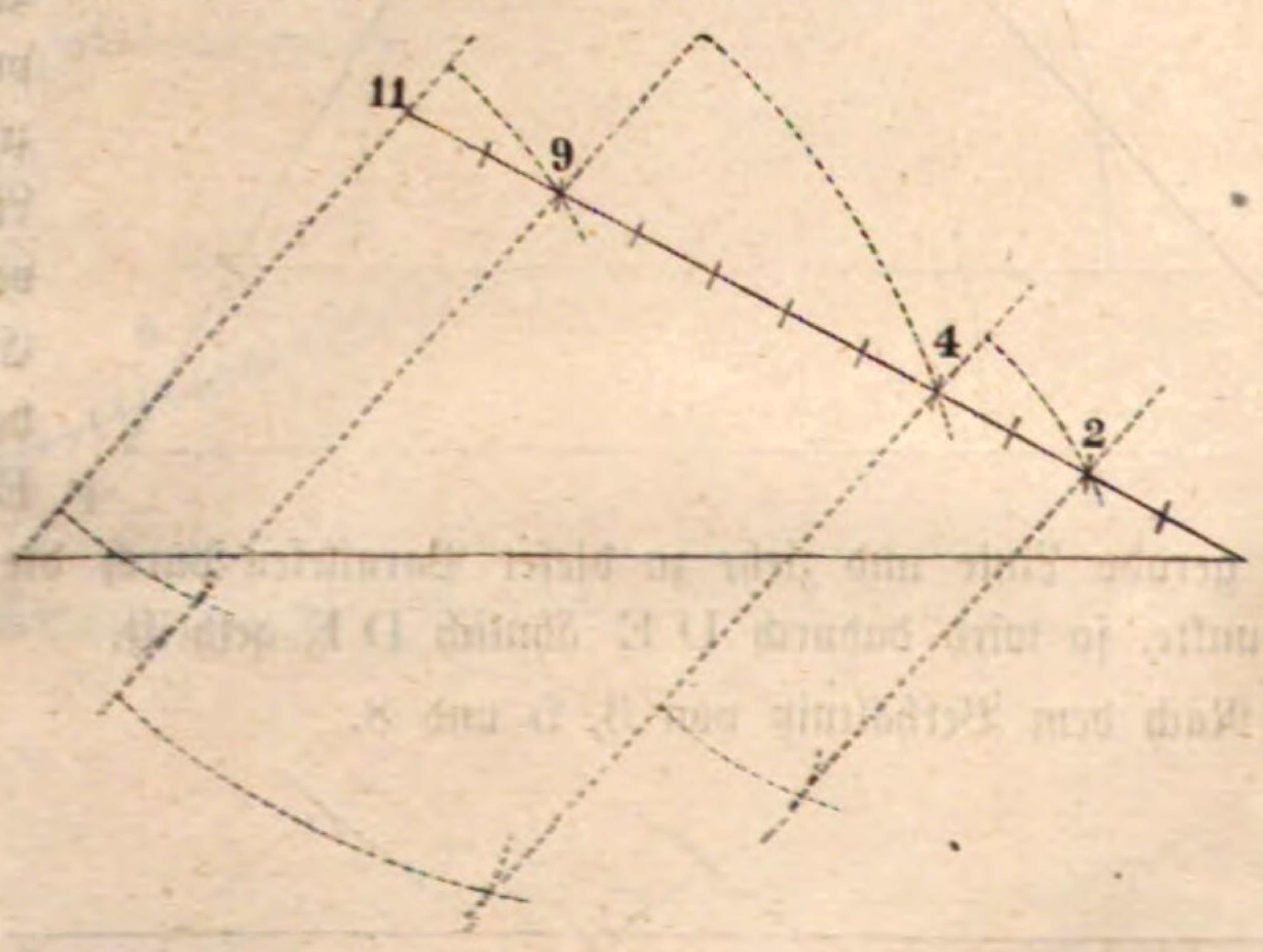
2) Nach dem Verhältniß von 3, 5 und 8.



3) Nach dem Verhältniß von a, b, c und d.



4) Nach dem Verhältniß von 2, 4, 9 und 11.

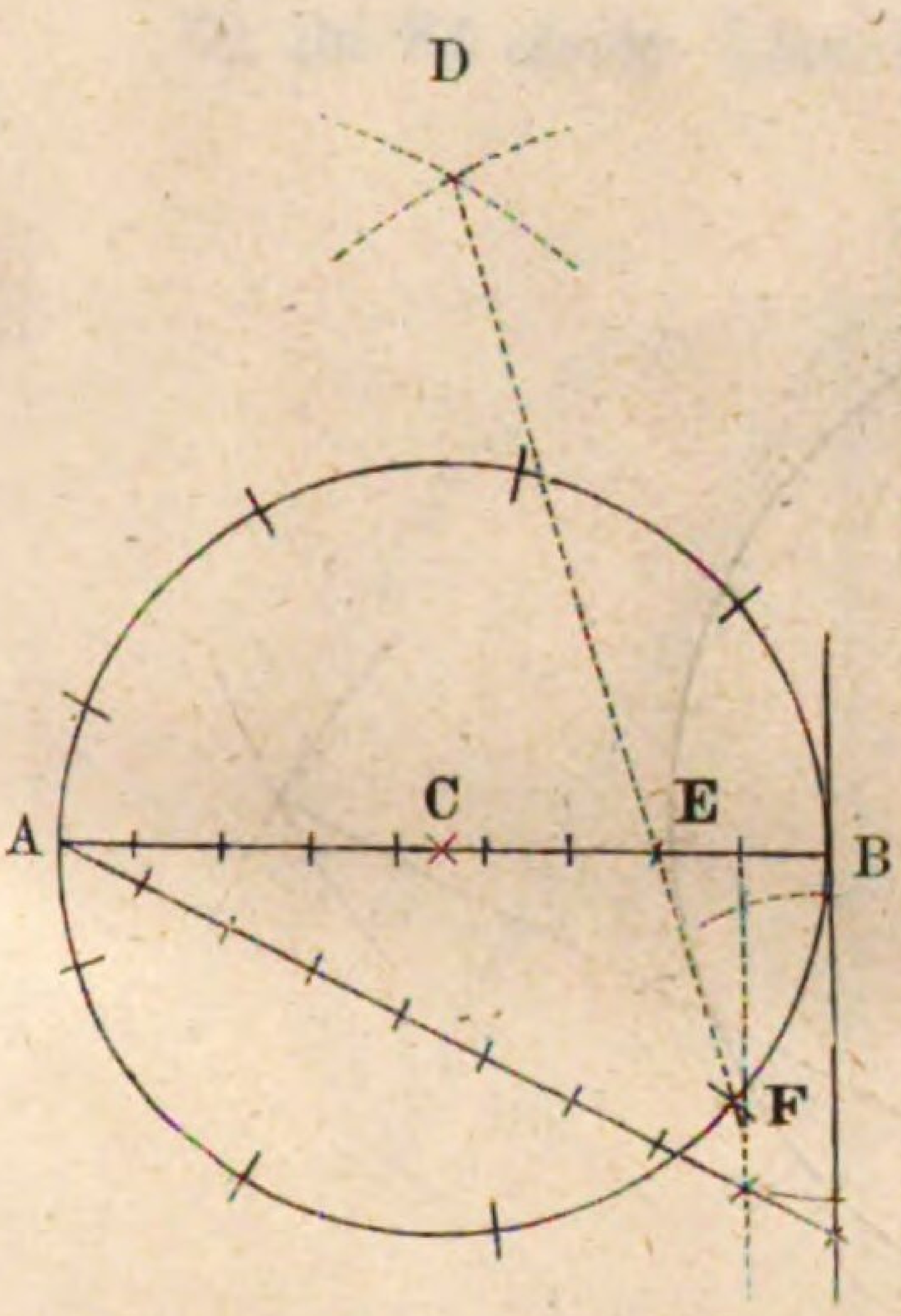


VI. Theile die Peripherie eines jeden Kreises in beliebig viele Theile, etwa in 9, 14, 25, 50, 84 und 99.

1) In 9 gleiche Theile.

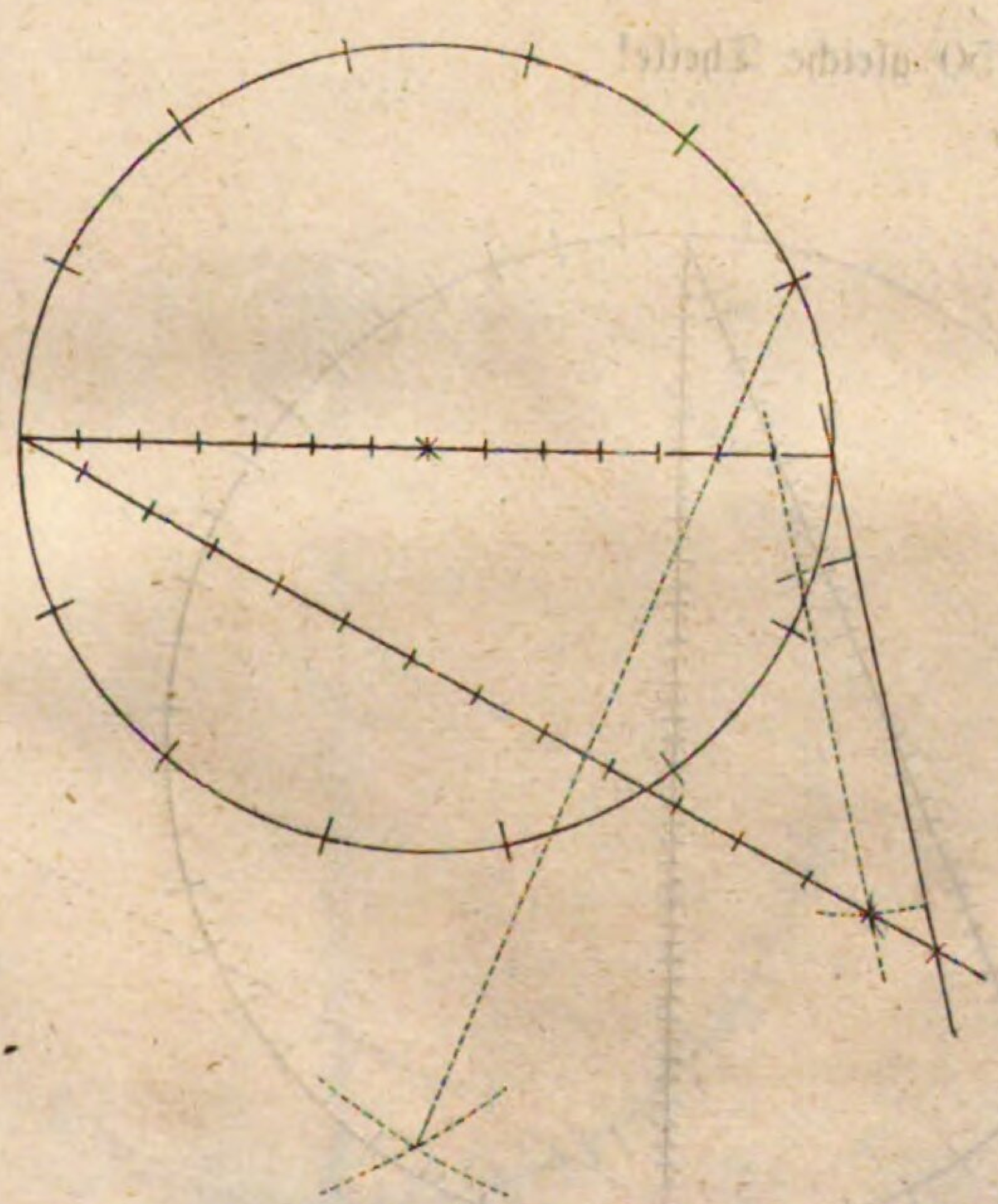
Auflösung.

Theile den Durchmesser AB in 9 gleiche Theile, schlage aus A und B mit einer Eröffnung des Zirkels gleich AB über oder unter dem Durch-

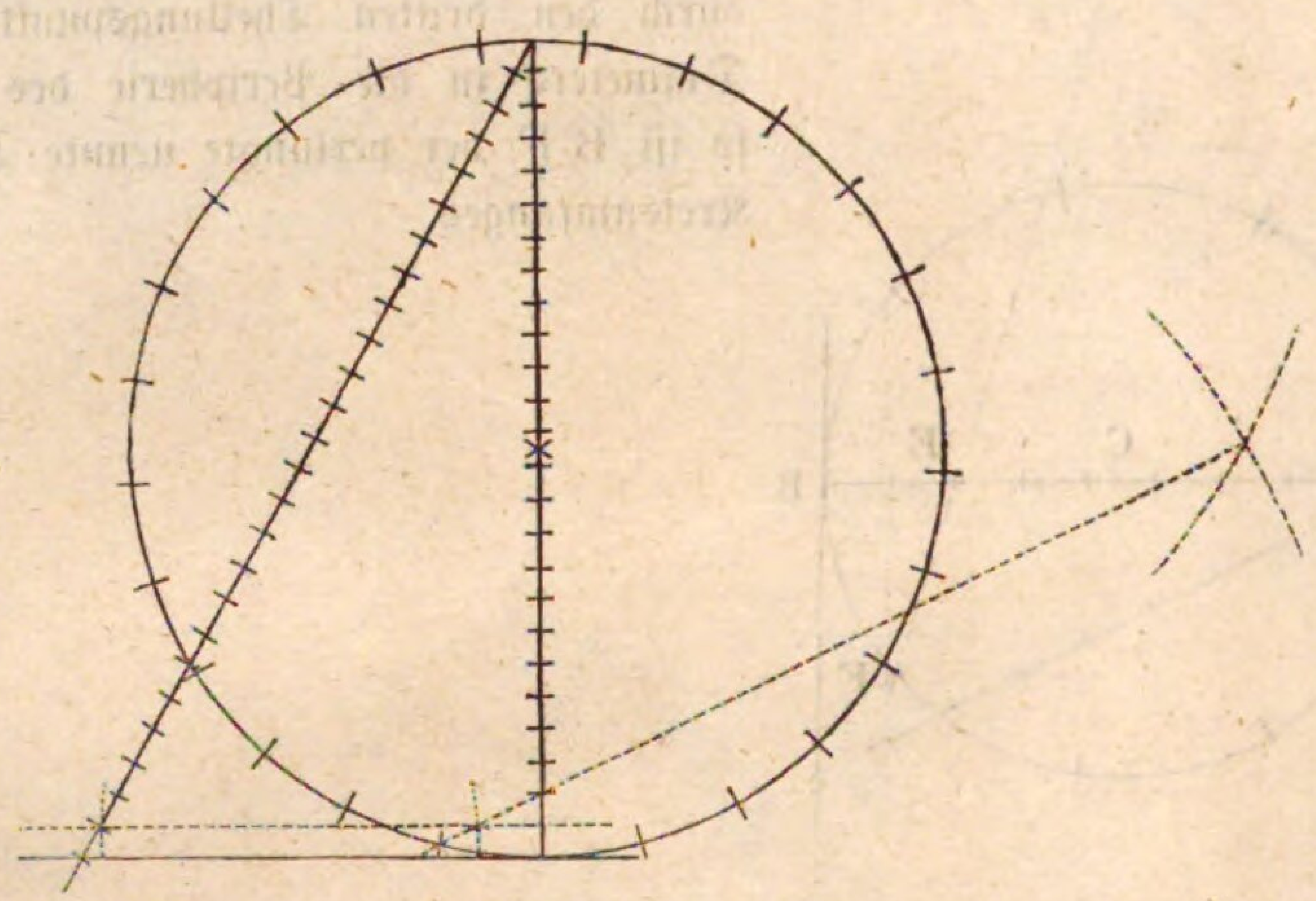


messer A B zwei sich schneidende Kreisbogen, ziehe aus dem Durchschnittspunkte D durch den dritten Theilungspunkt E des Diameters in die Peripherie des Kreises; so ist B F der verlangte neunte Theil des Kreisumfanges.

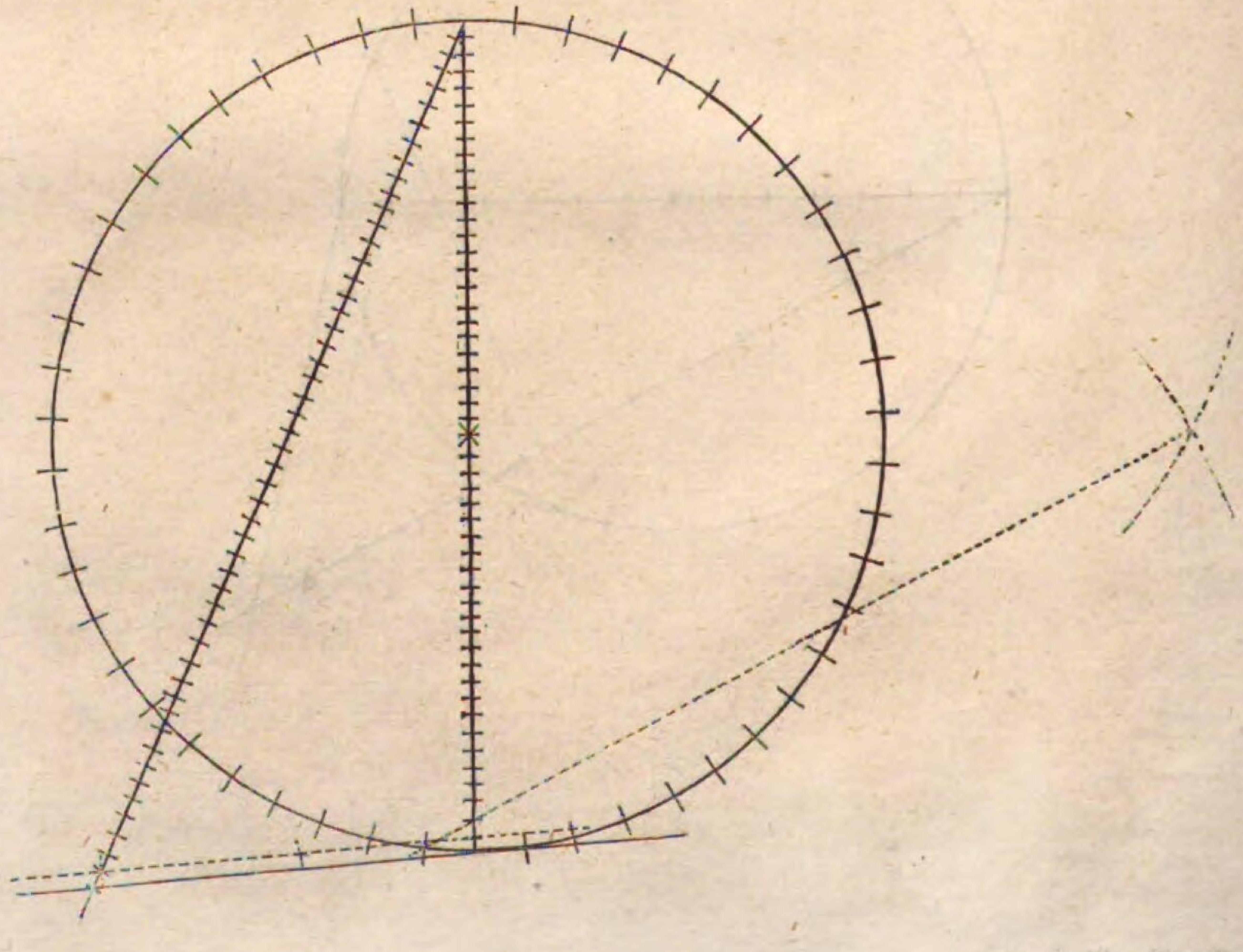
2) In 14 gleiche Theile!



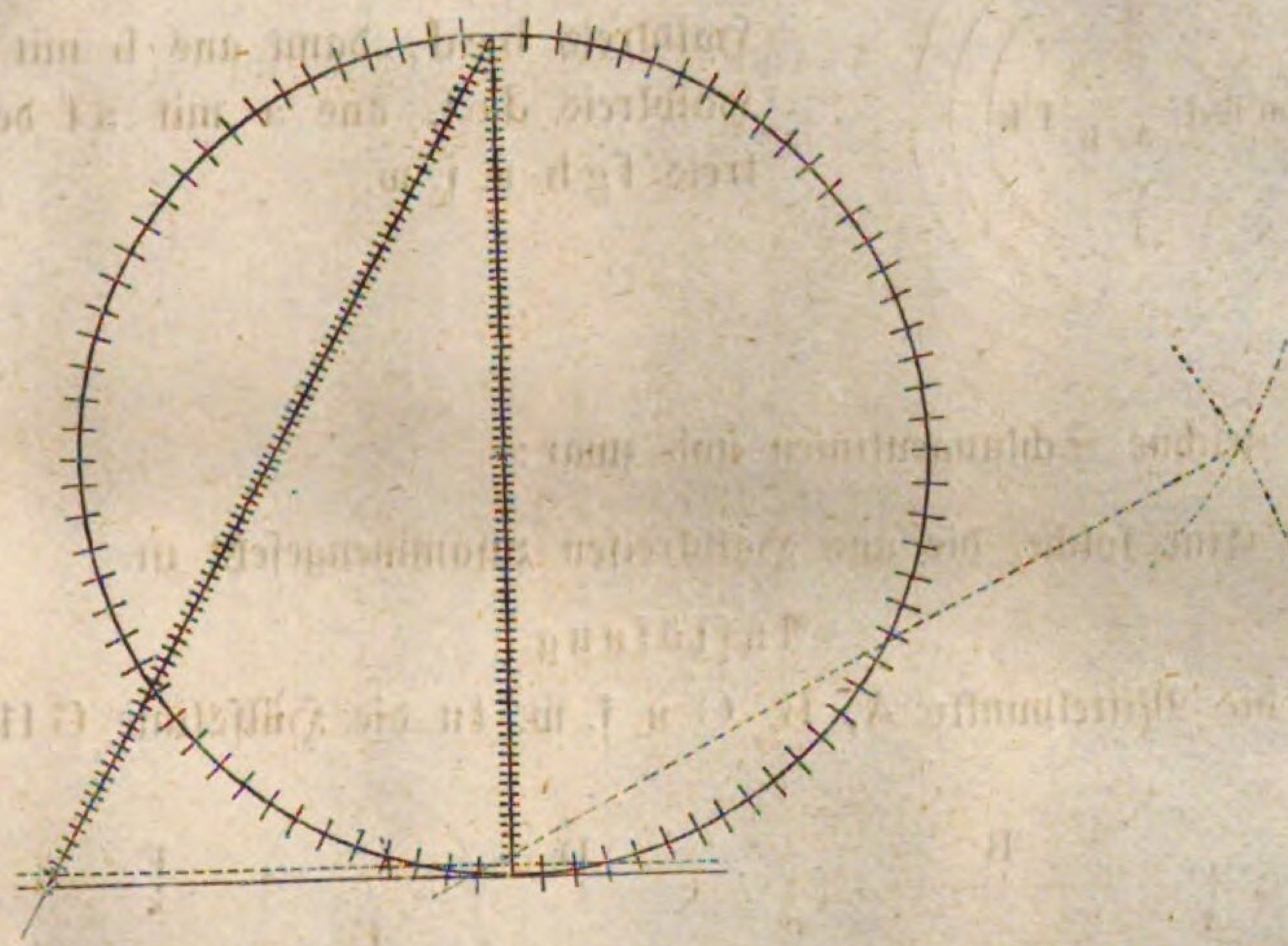
3) In 25 gleiche Theile!



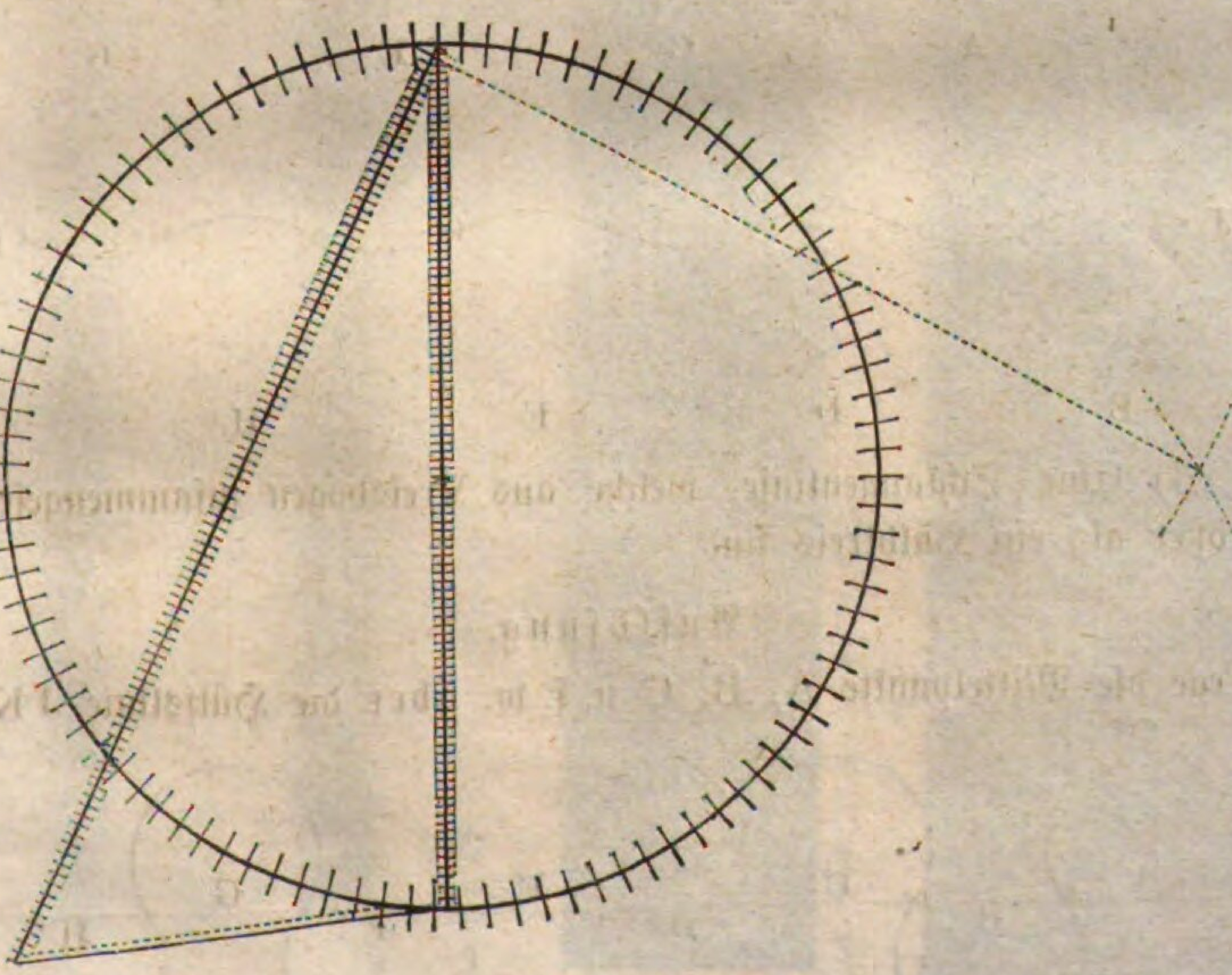
4) In 50 gleiche Theile!



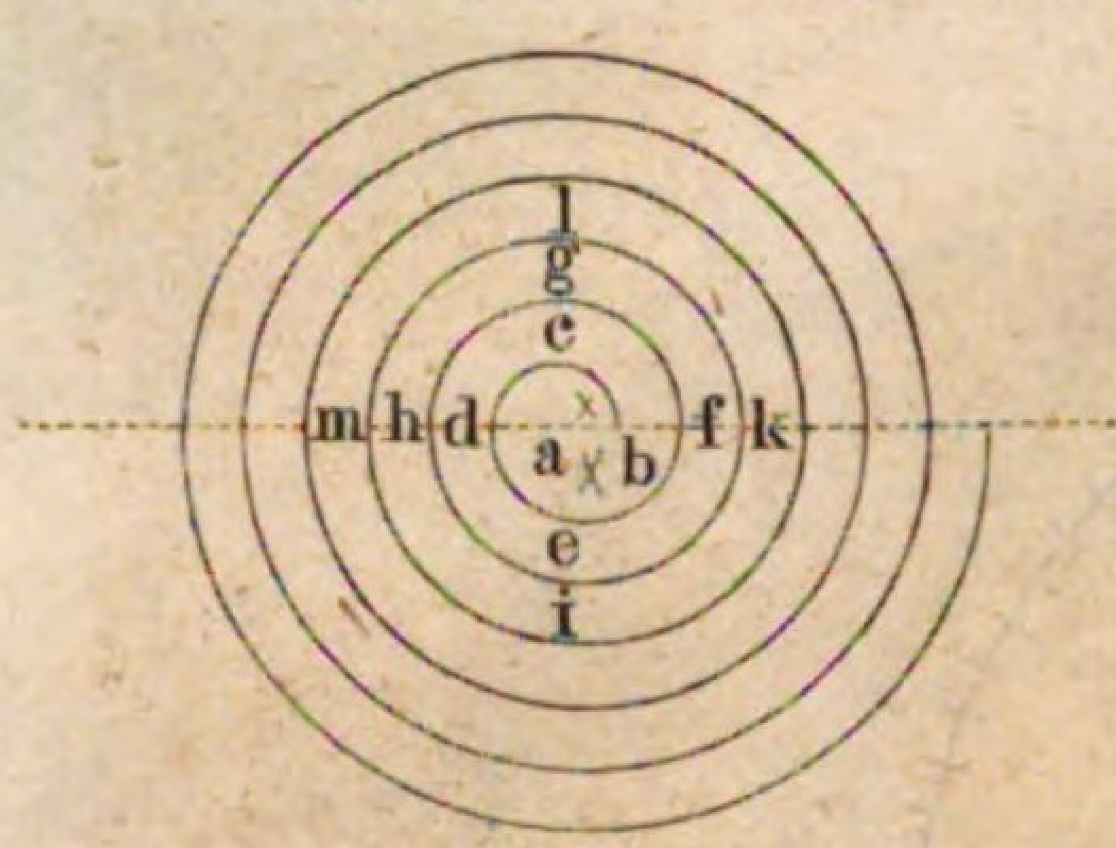
5) In 84 gleiche Theile!



6) In 99 gleiche Theile!



VII. Zeichne eine Spirallinie!



Auflösung.

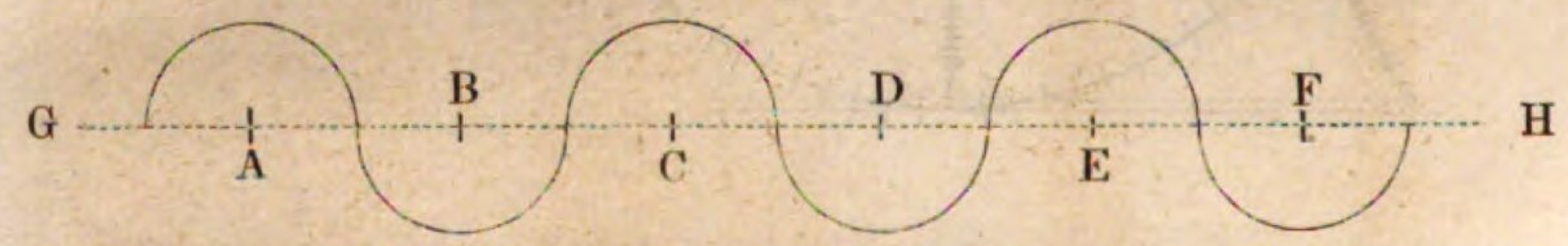
Man beschreibe aus a mit a b den Halbkreis b c d, dann aus b mit b d den Halbkreis d e f, aus a mit a f den Halbkreis f g h u. s. w.

VIII. Zeichne Schlangenlinien und zwar:

1) Eine solche, die aus Halbkreisen zusammengesetzt ist.

Auflösung.

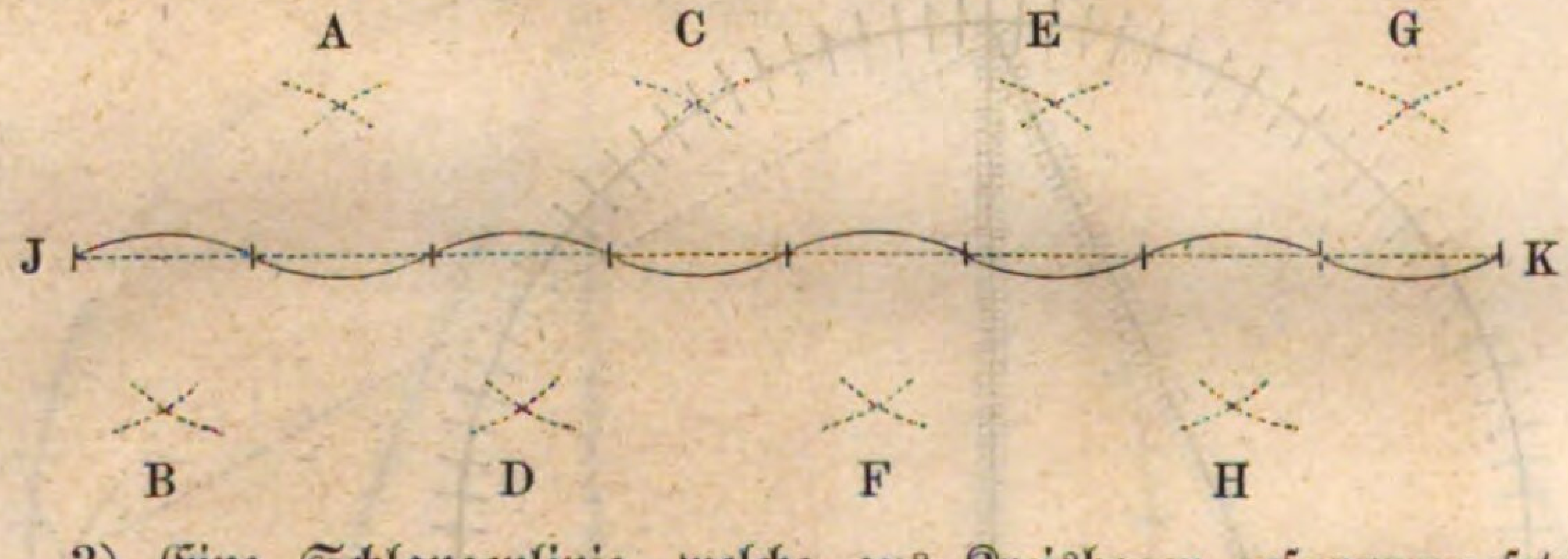
Lege die Mittelpunkte A, B, C u. s. w. in die Hülfslinie G H.



2) Eine Schlangenlinie, die aus Kreisbogen zusammengesetzt ist, die kleiner als ein Halbkreis sind.

Auflösung.

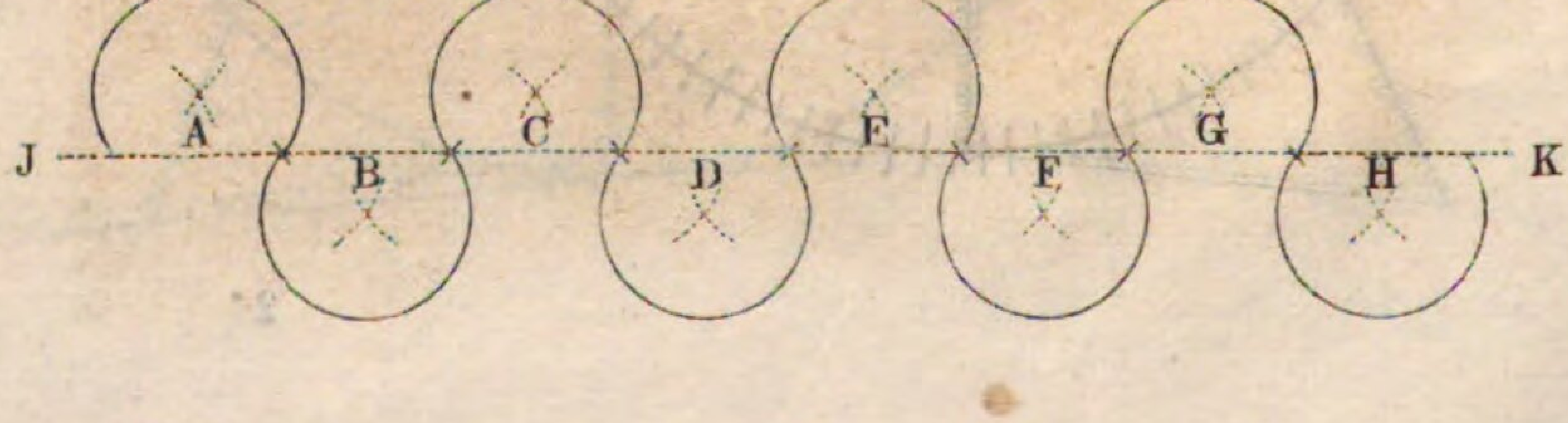
Lege die Mittelpunkte A, B, C u. s. w. unter die Hülfslinie J K.



3) Eine Schlangenlinie, welche aus Kreisbogen zusammengesetzt ist, die größer als ein Halbkreis sind.

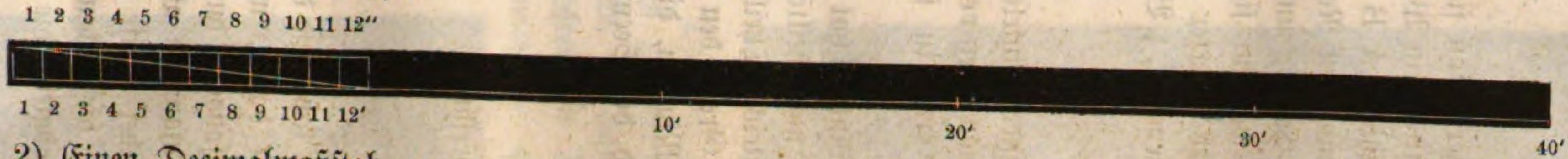
Auflösung.

Lege die Mittelpunkte A, B, C u. s. w. über die Hülfslinie J K.

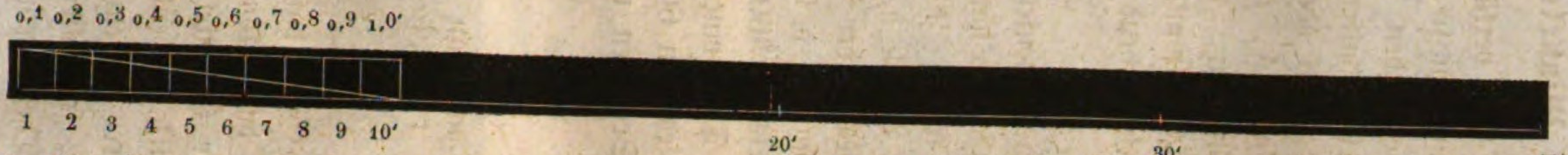


IX. Construire Maßstäbe und zwar:

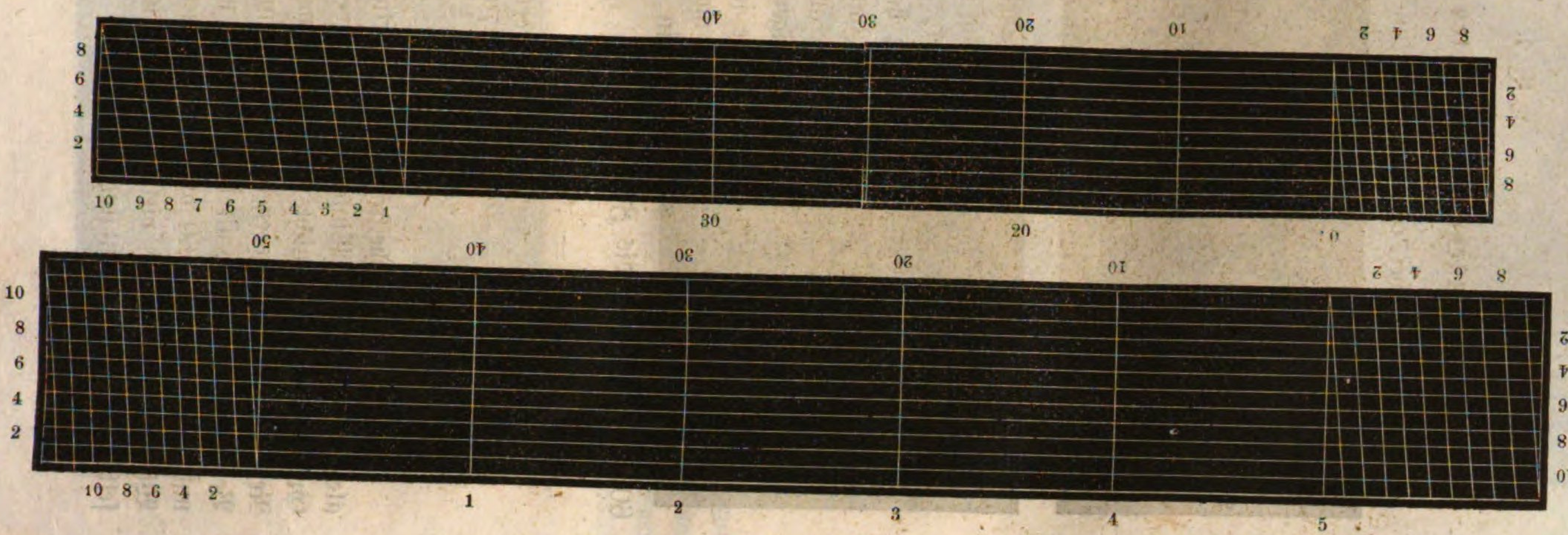
1) Einen Duodecimalmaßstab.



2) Einen Decimalmaßstab.



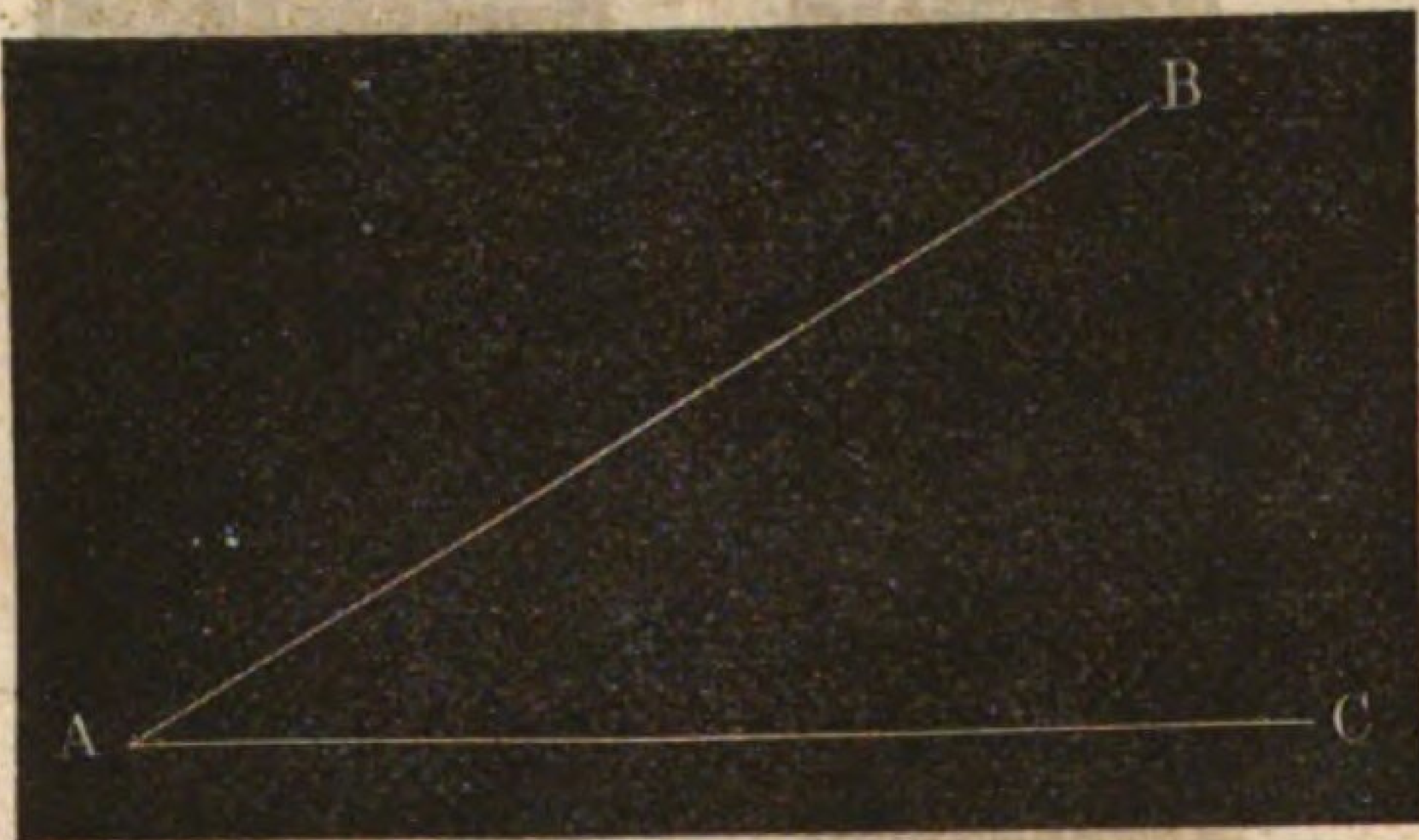
3) Beliebige andere Arten von Maßstäben.

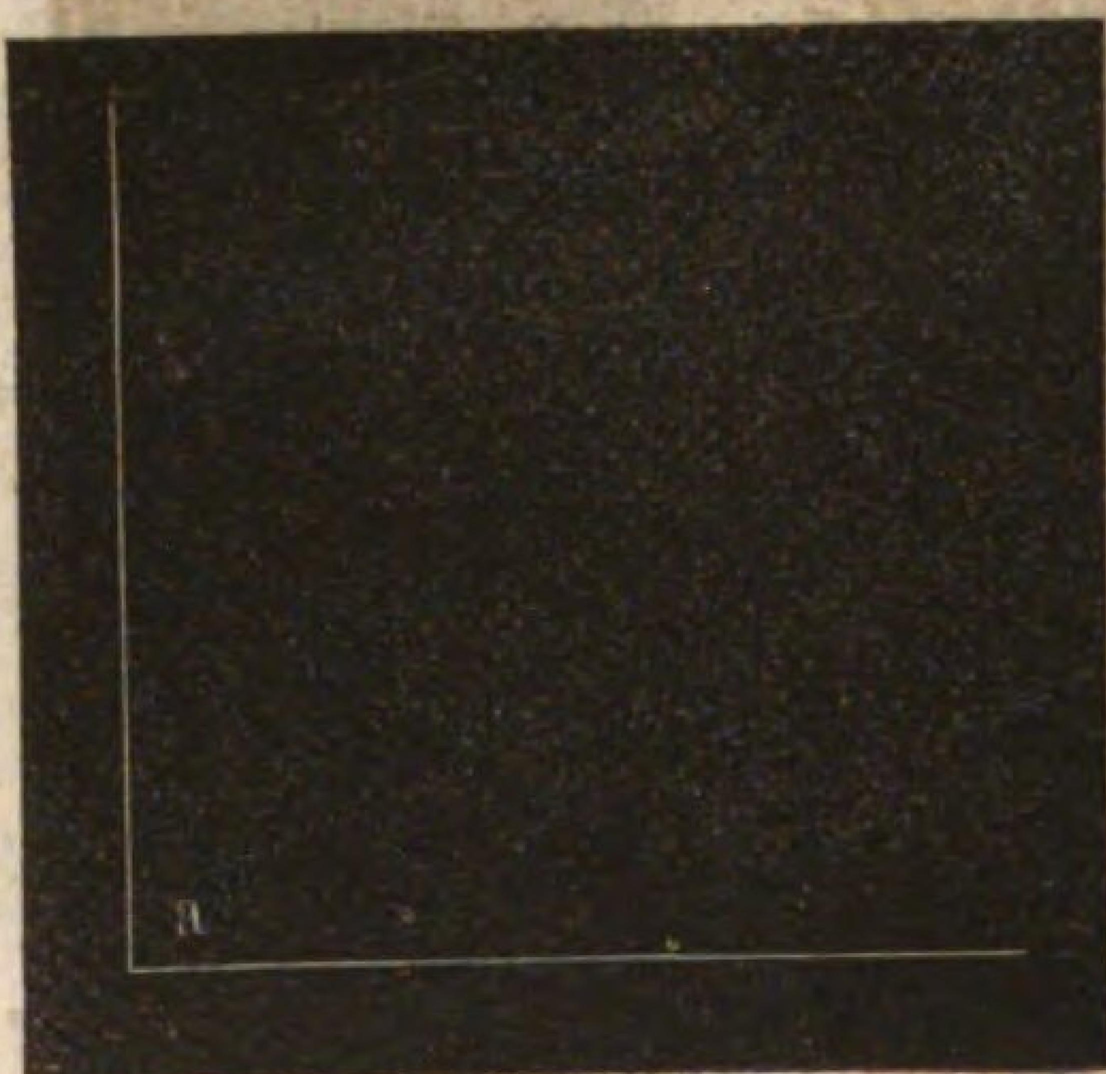


§. 4.

Entstehung und Arten von Winkeln.

Wenn man zwei convergirende Linien so weit verlängert, daß sie sich schneiden, so entsteht ein Winkel; die beiden Linien A B und A C erhalten nun den Namen: Schenkel oder Crura, und der Punkt A, in welchem sie sich schneiden, wird Vertex oder Scheitelpunkt genannt, z. B. (wie nebenstehend).





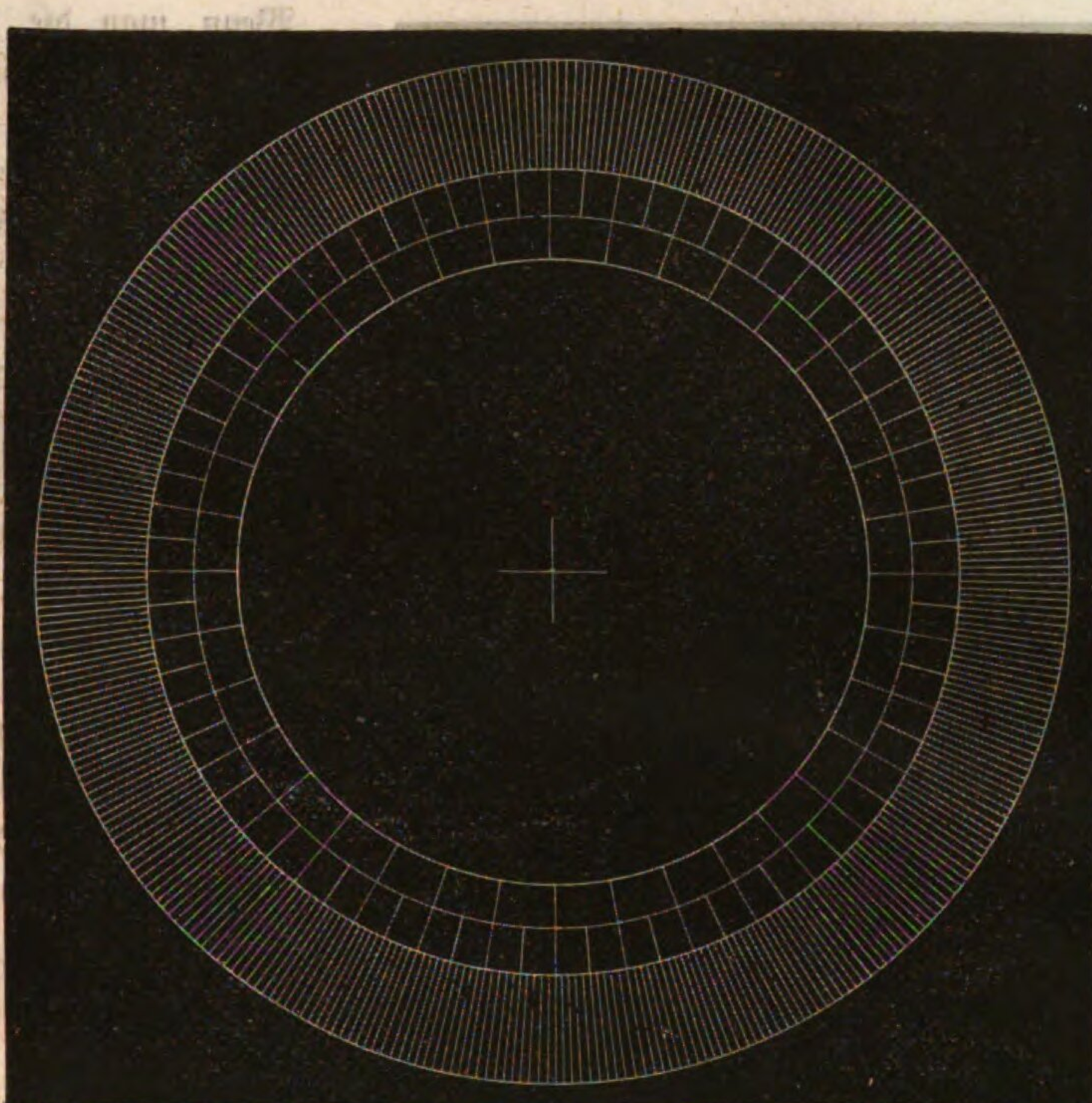
Stehen die Schenkel eines Winkels senkrecht auf einander, so hat man einen rechten Winkel, der immer 90 Grad zu seinem Maße hat, z. B. ∢ a.

Zum Maße der Winkel hat man Grade angenommen, d. h., man theilte einen beliebigen Kreis in 360 gleiche Theile und nannte jeden Theil einen Grad; den Grad theilt man wieder in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden und die Secunde in 60 Tertien, wofür die Zeichen:

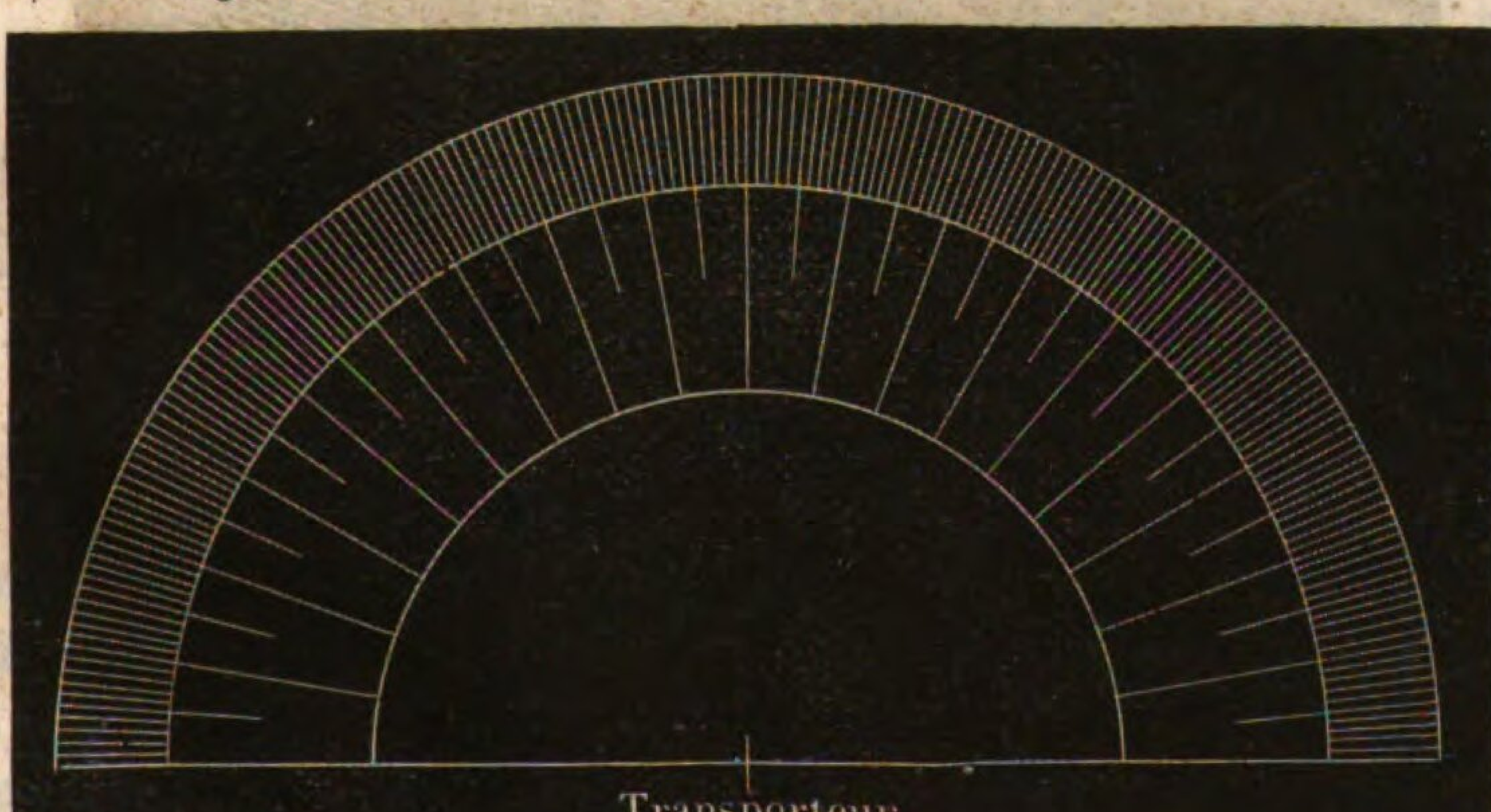
Grad = ^{0}
Minute = $'$
Secunde = $''$
Tertie = $'''$

gesetzt werden, so daß man schreibt:
∢ a = $47^0\ 15'\ 17''\ 53'''$.

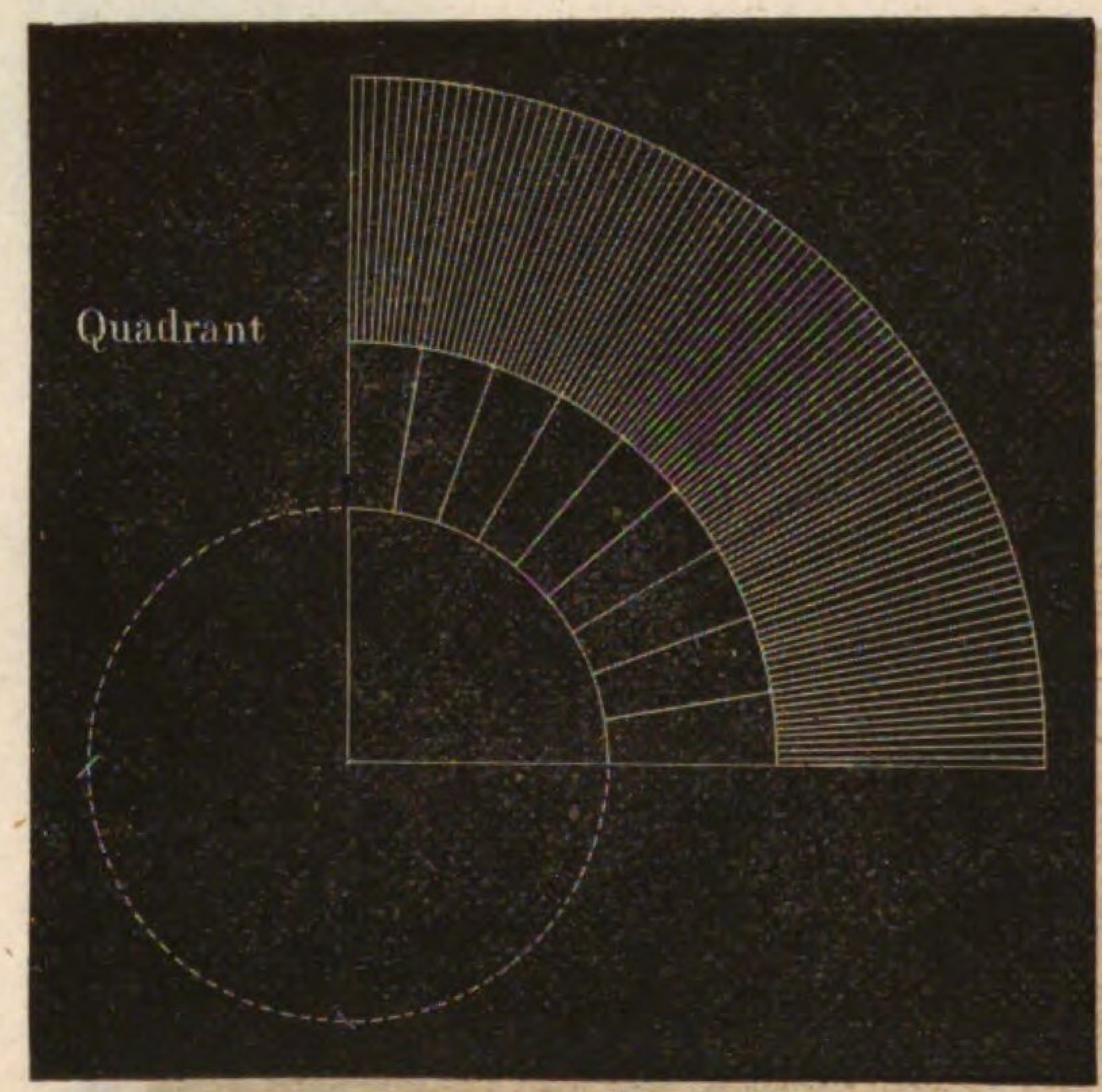
Daß der eingetheilte Kreis eine beliebige Größe haben kann und dennoch als Maß für alle Winkel gebraucht werden darf, kommt daher, weil die Größe der Winkel nicht durch die Länge der Schenkel, sondern durch die Neigung derselben gegeneinander bestimmt wird. Denkt man sich also den Vertex eines Winkels in dem Centrum mehrerer concentrischer Kreise liegend und alle Kreise in 360 gleiche Theile getheilt, so schließen die Schenkel des Winkels immer gleich viele von den gleichen Theilen ein, obgleich die Theile selbst verschieden groß sind.



Da man aber alle Winkel, ausgenommen den überhobenen, direct mit einem Halbkreis messen kann und auch durch Subtraction den überhobenen Winkel zu bestimmen im Stande ist, so hat man als Winkelmaß einen Halbkreis in 180 gleiche Theile getheilt und dieses Meßinstrument einen Transporteur genannt.

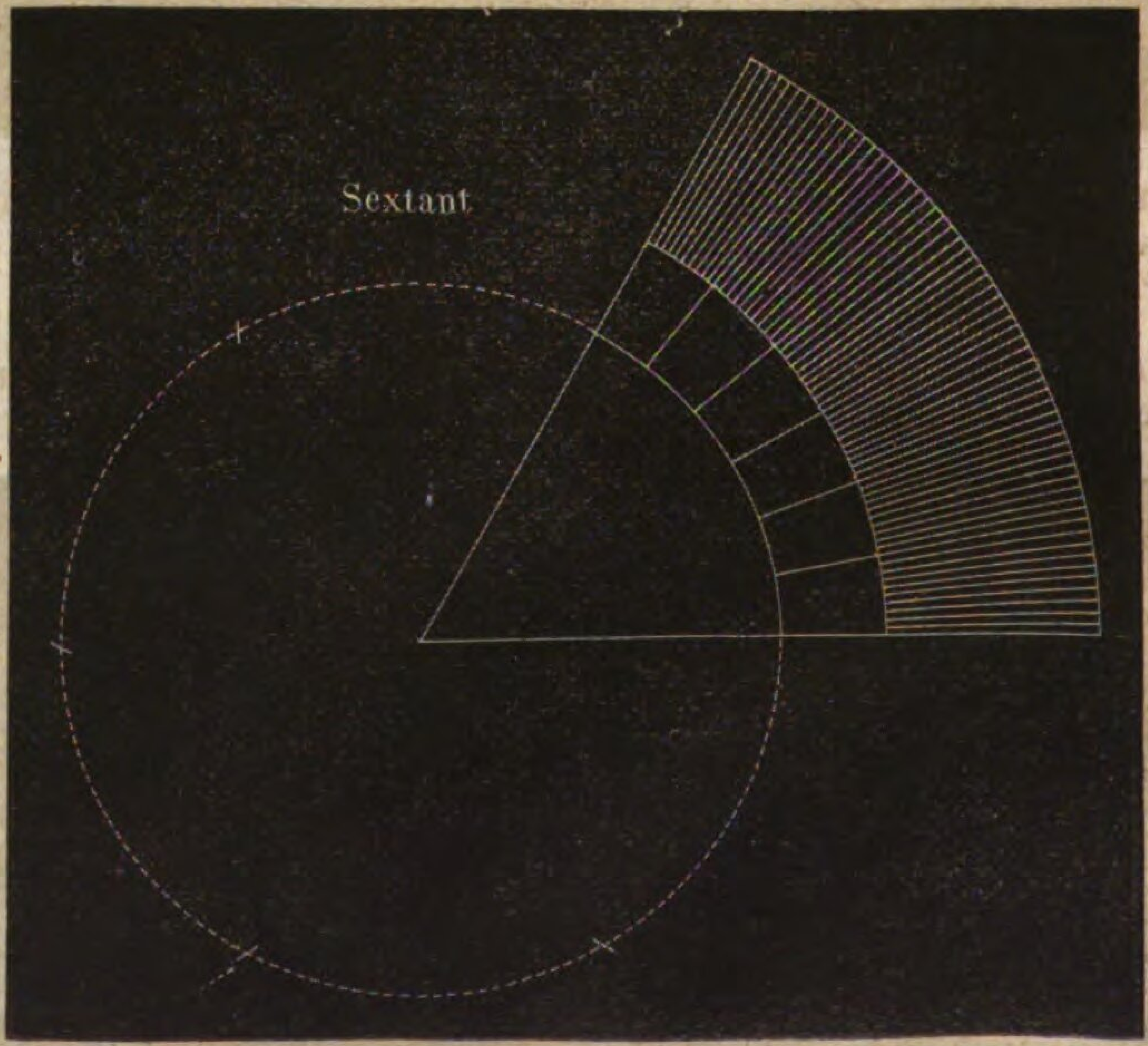


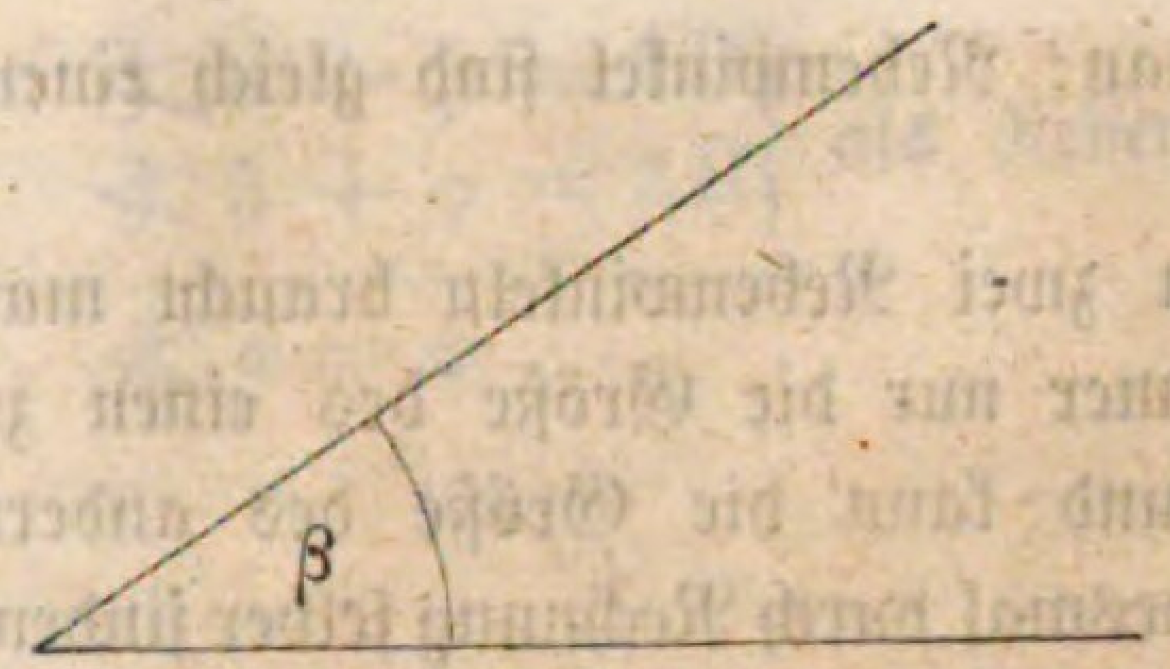
Transporteur.



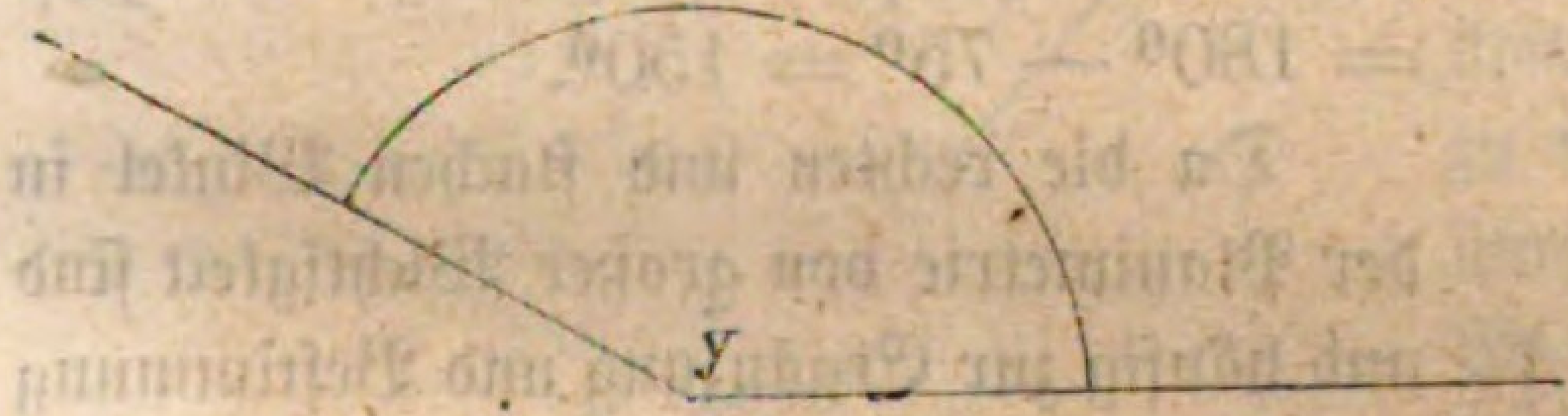
Wenn man die Rechnung und die Construction zu Hülfe nimmt, so kann man auch mit dem Viertheil eines Kreises jeden Winkel messen, und daher hat man den Viertheil eines Kreises in 90⁰ eingetheilt und dieses Meßinstrument einen Quadranten genannt.

Wenn Winkel unter 60⁰ zu messen sind, und wenn man sonst Rechnung und Zeichnung zu Hülfe nehmen will, so kann man auch mit einem noch kleinern Winkelmaße seinen Zweck erreichen und hat daher den sechsten Theil eines Kreises in 60 Grade eingetheilt und dieses Meßinstrument einen Sextanten genannt.

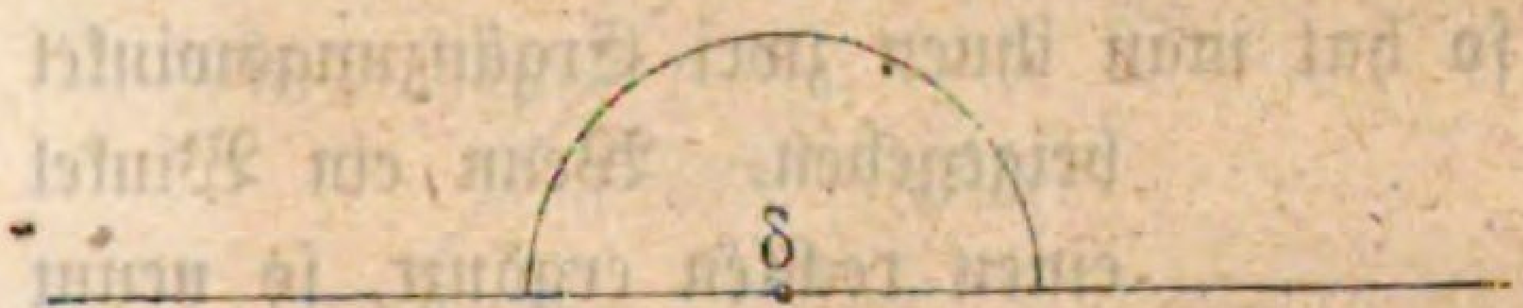




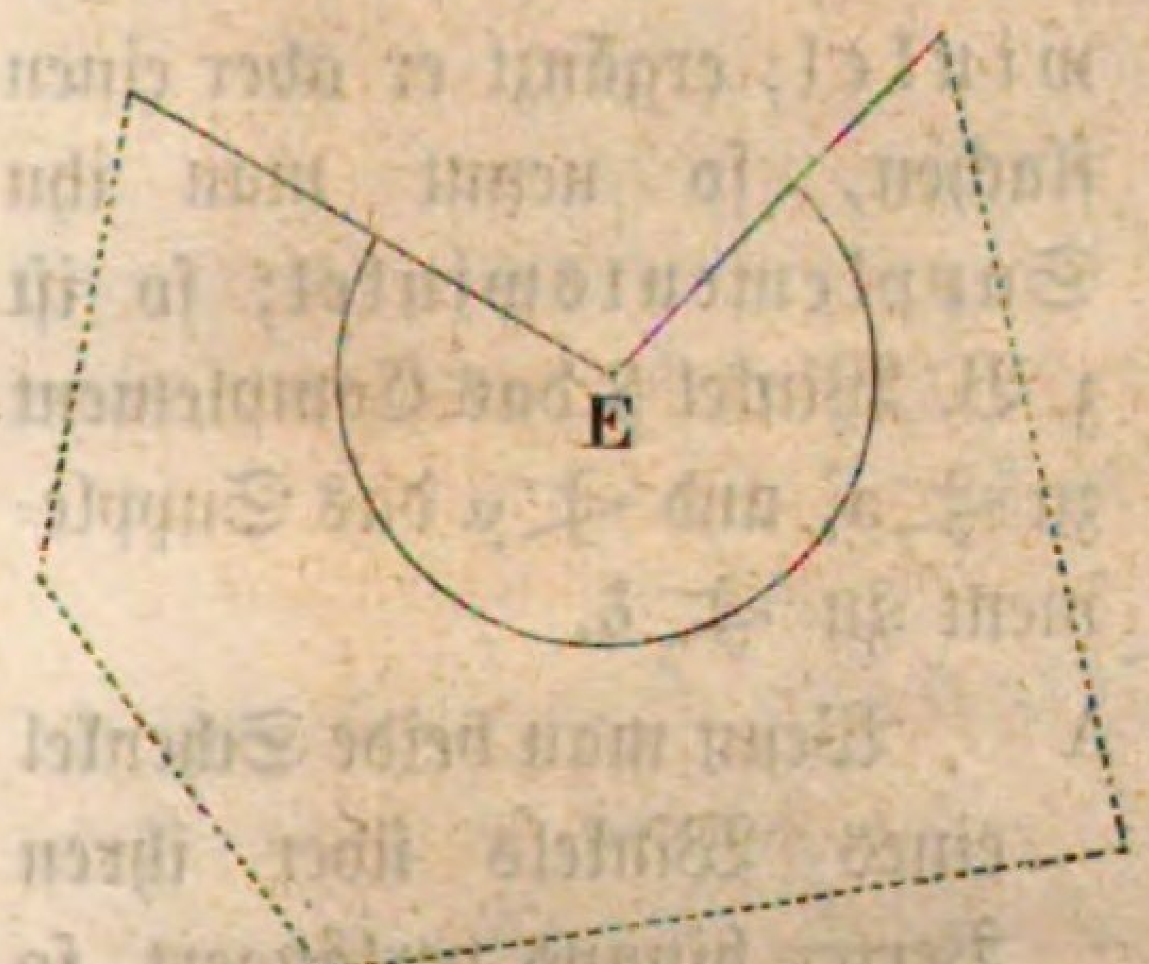
Ein Winkel, der unter 90^0 zu seinem Maße hat, heißt ein **spitzer**, z. B. ∡ β.



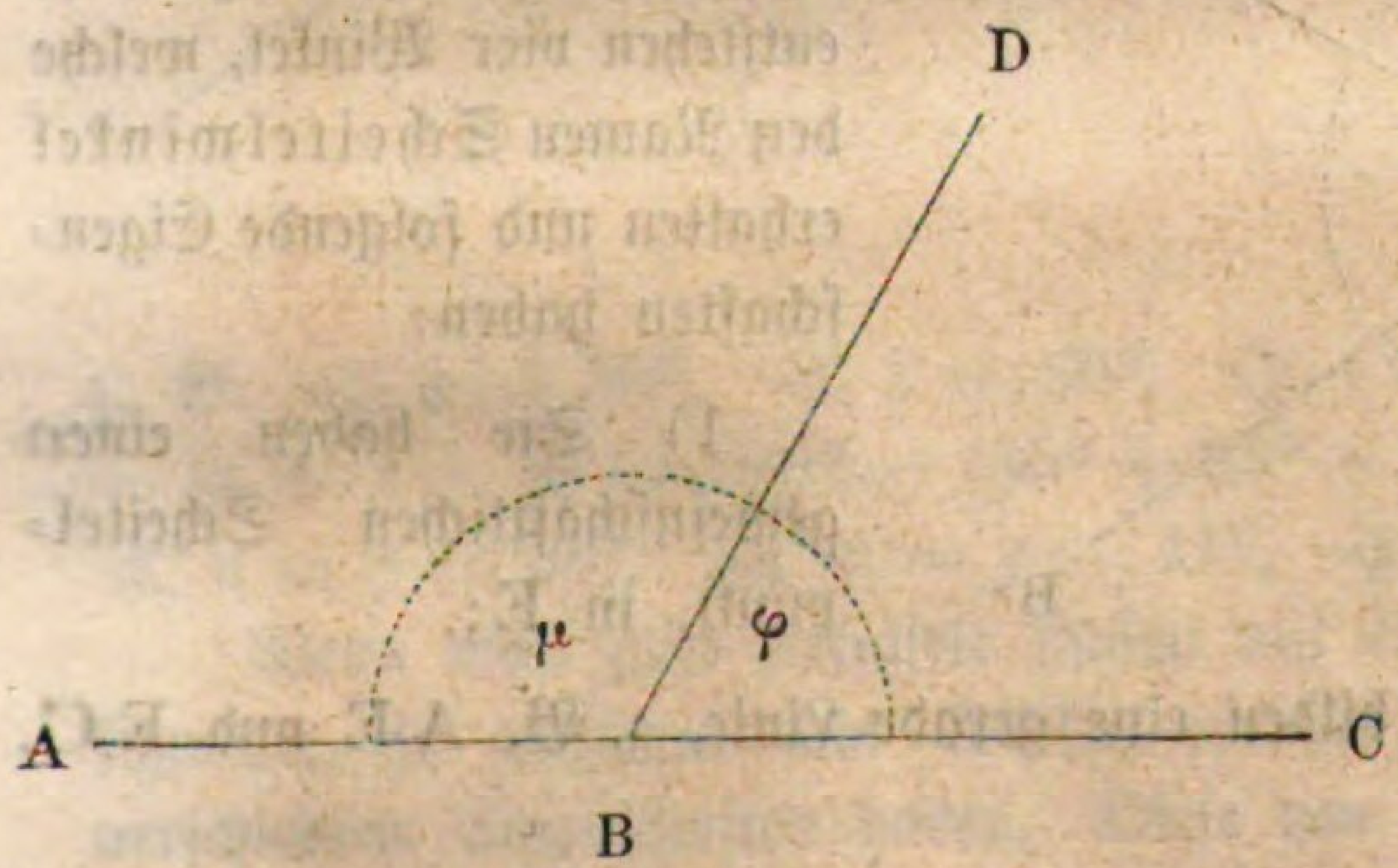
Hat ein Winkel über 90^0, aber unter 180^0 zu seinem Maße, so wird er ein **stumpfer** genannt, z. B. ∡ γ.



Ein Winkel, der 180^0 groß ist, heißt ein **flacher**, z. B. ∡ δ.



Hat ein Winkel über 180^0 zu seinem Maße, so nennen wir ihn einen **überhobenen**, z. B. ∡ E.



Wenn man den einen Schenkel B C eines Winkels über den Vertex B hinaus verlängert, so entsteht ein zweiter Winkel μ; beide zusammen nennt man **Nebenwinkel**; welche folgende Eigenschaften haben:

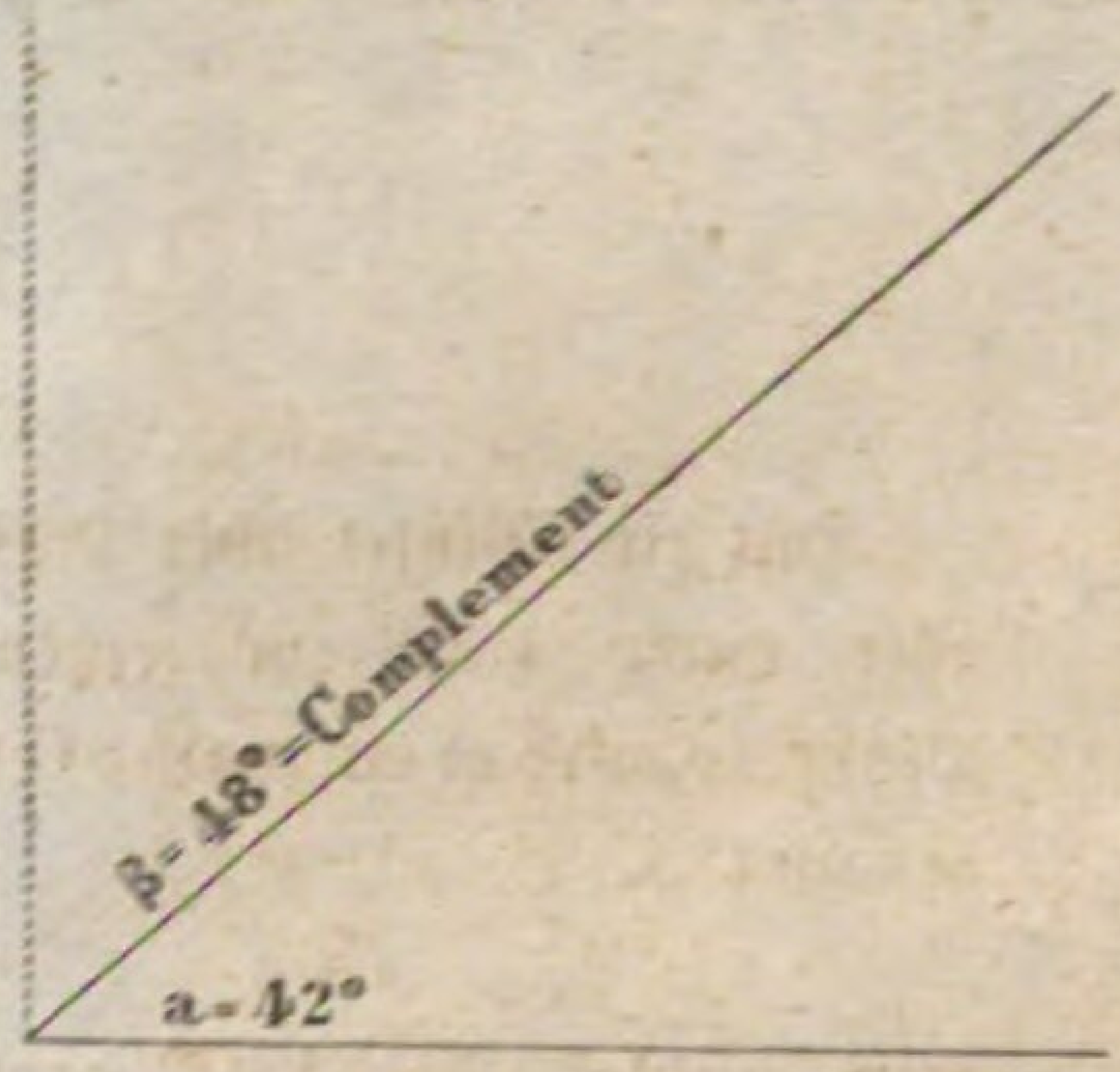
1) Sie haben einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt, in B;

2) einen gemeinschaftlichen Schenkel, B D;

3) die beiden andern Schenkel, A B und B C, bilden zusammen eine **gerade** Linie;

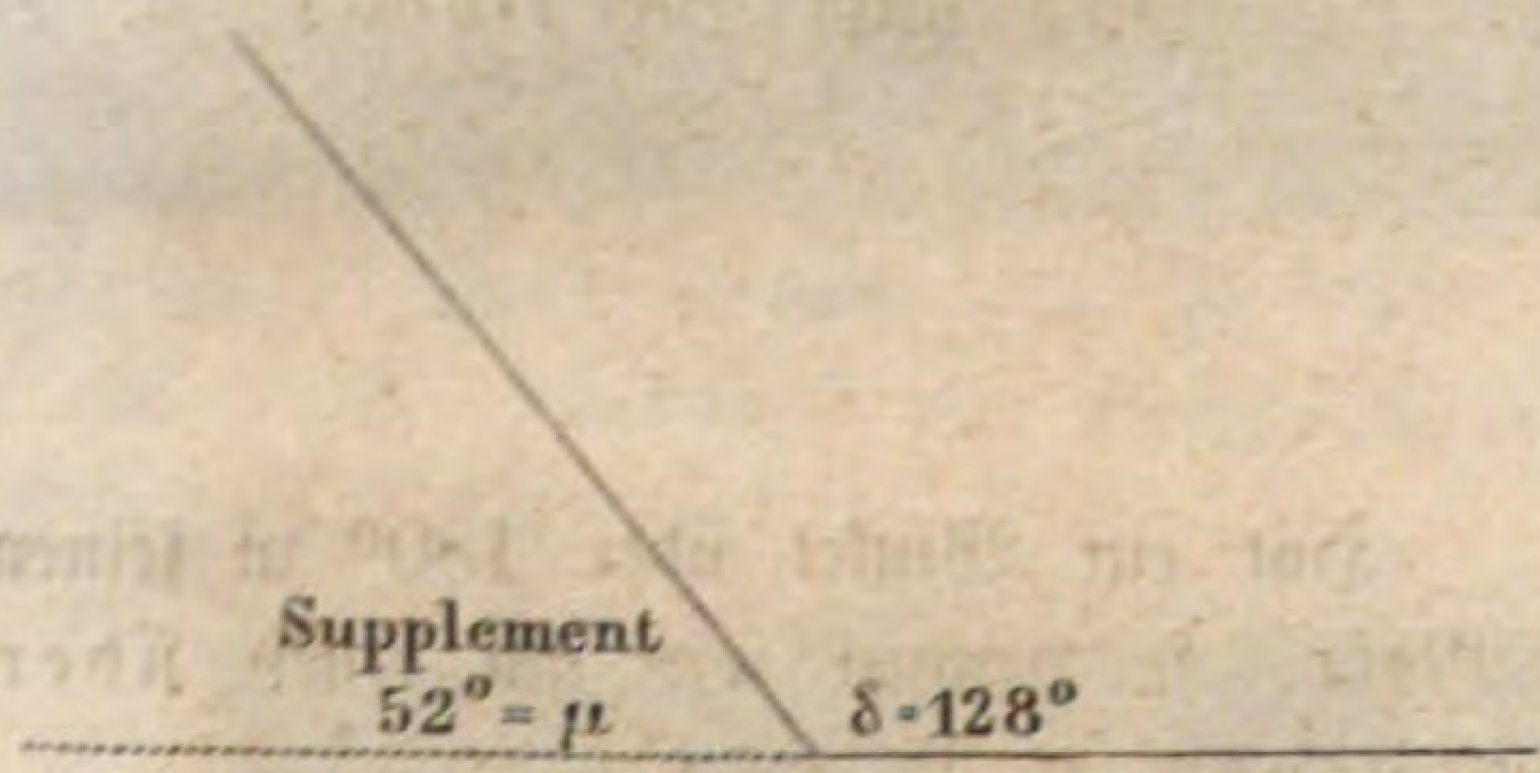
4) Nebenwinkel haben zusammen 180^0 zu ihrem Maße, denn sie schließen

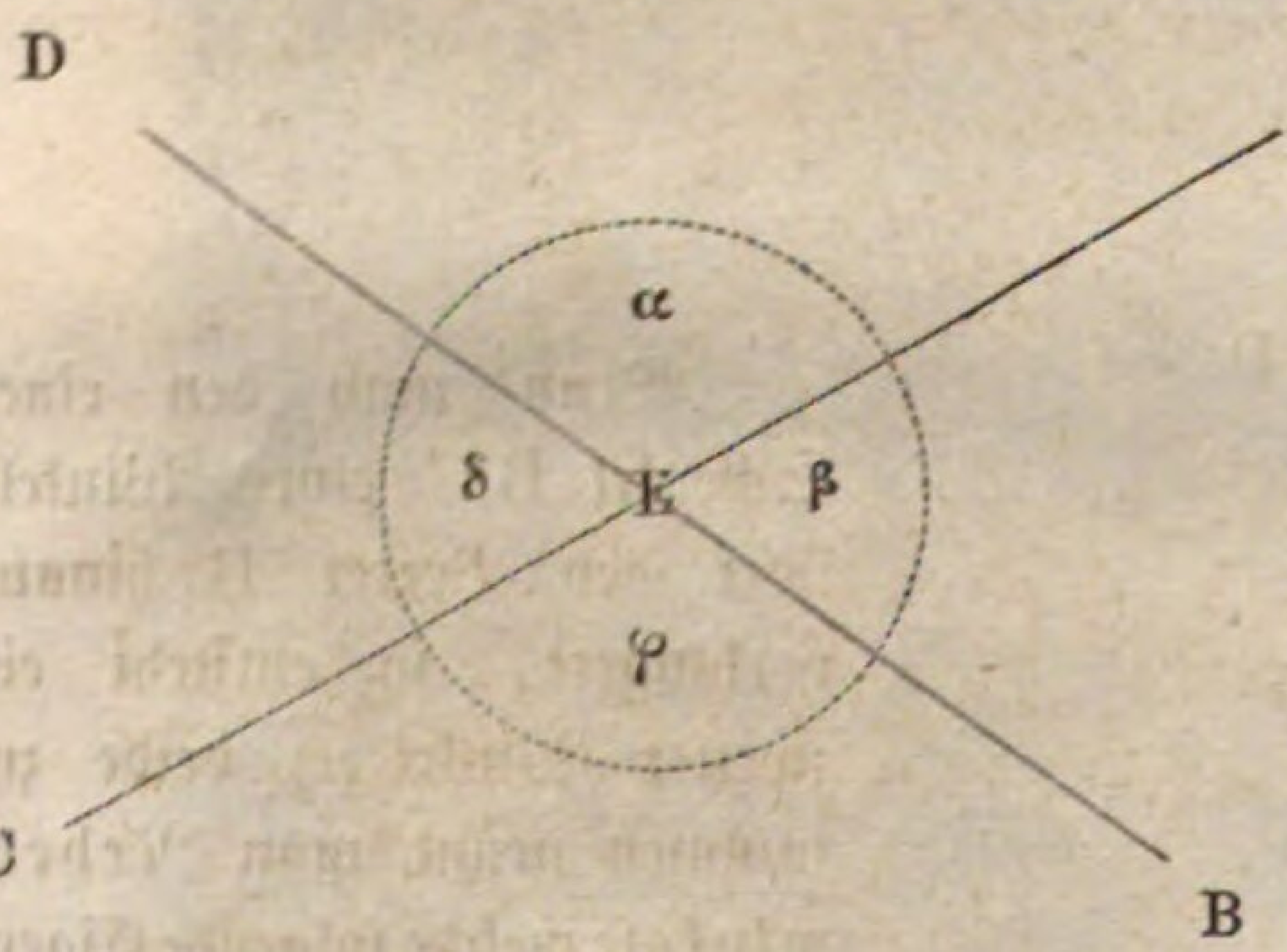
immer einen Halbkreis ein; auch sagt man: Nebenwinkel sind gleich einem flachen oder $= 2 R$.



Von zwei Nebenwinkeln braucht man also immer nur die Größe des einen zu wissen und kann die Größe des andern dann jedesmal durch Rechnung selber finden. Ist z. B. $\sphericalangle \varphi = 75^0$, so ist der $\sphericalangle \mu = 180^0 - 75^0 = 150^0$.

Da die rechten und flachen Winkel in der Planimetrie von großer Wichtigkeit sind und häufig zur Ergänzung und Bestimmung von andern Winkelgrößen gebraucht werden, so hat man ihnen zwei Ergänzungswinkel beigegeben. Wenn ein Winkel einen rechten ergänzt, so nennt man ihn Complementswinkel; ergänzt er aber einen flachen, so nennt man ihn Supplementswinkel; so ist z. B. Winkel β das Complement zu $\sphericalangle \alpha$, und $\sphericalangle \mu$ das Supplement zu $\sphericalangle \delta$.





Wenn man beide Schenkel eines Winkels über ihren Vertex hinaus verlängert, so entstehen vier Winkel, welche den Namen Scheitelwinkel erhalten und folgende Eigenschaften haben:

1) Sie haben einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt, in E;

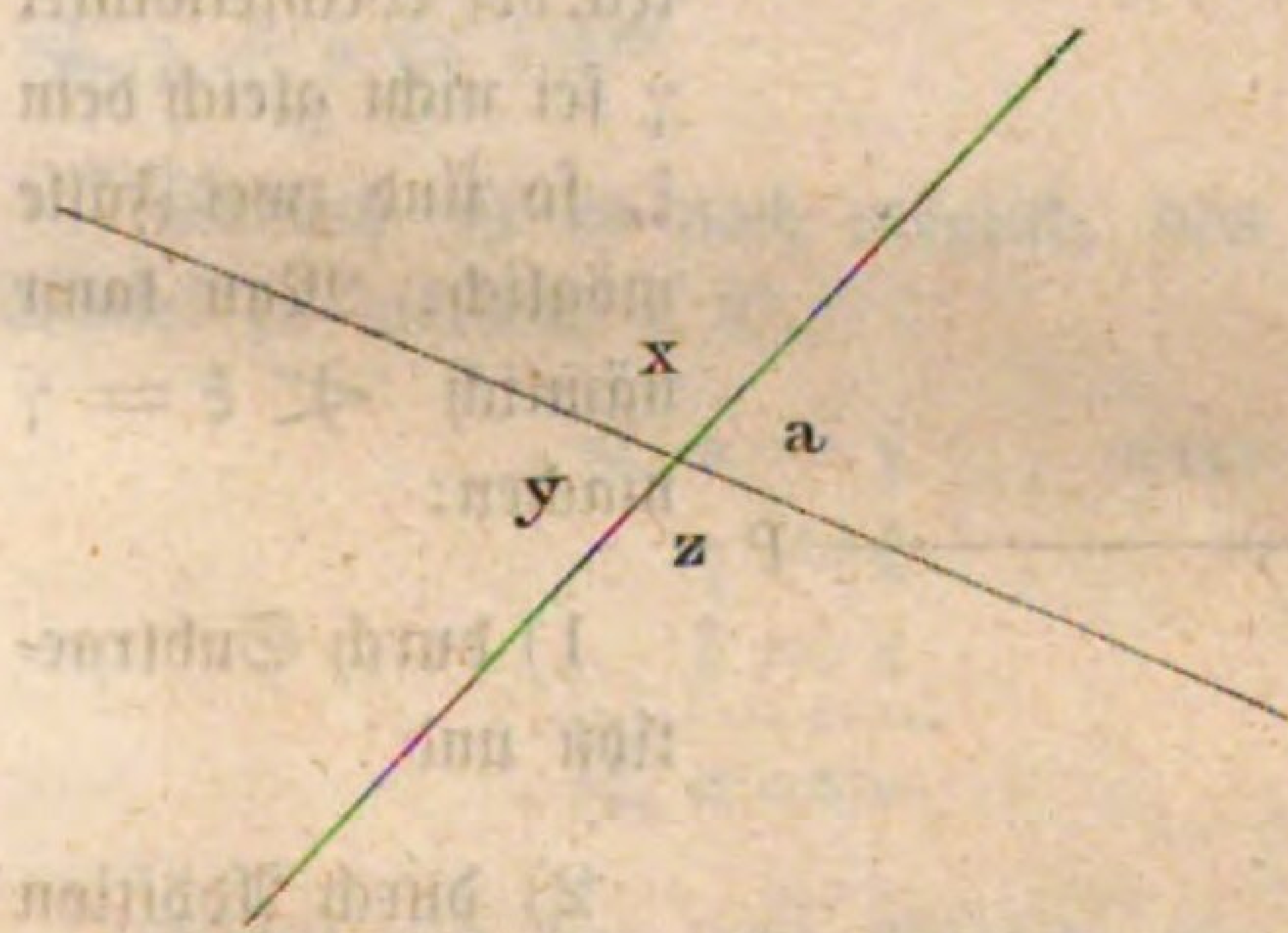
2) je zwei ihrer Schenkel bilden eine gerade Linie, z. B. AE und EC, DE und EB;

3) sie haben zusammen 360^0 zu ihrem Maße, denn sie schließen einen ganzen Kreis ein;

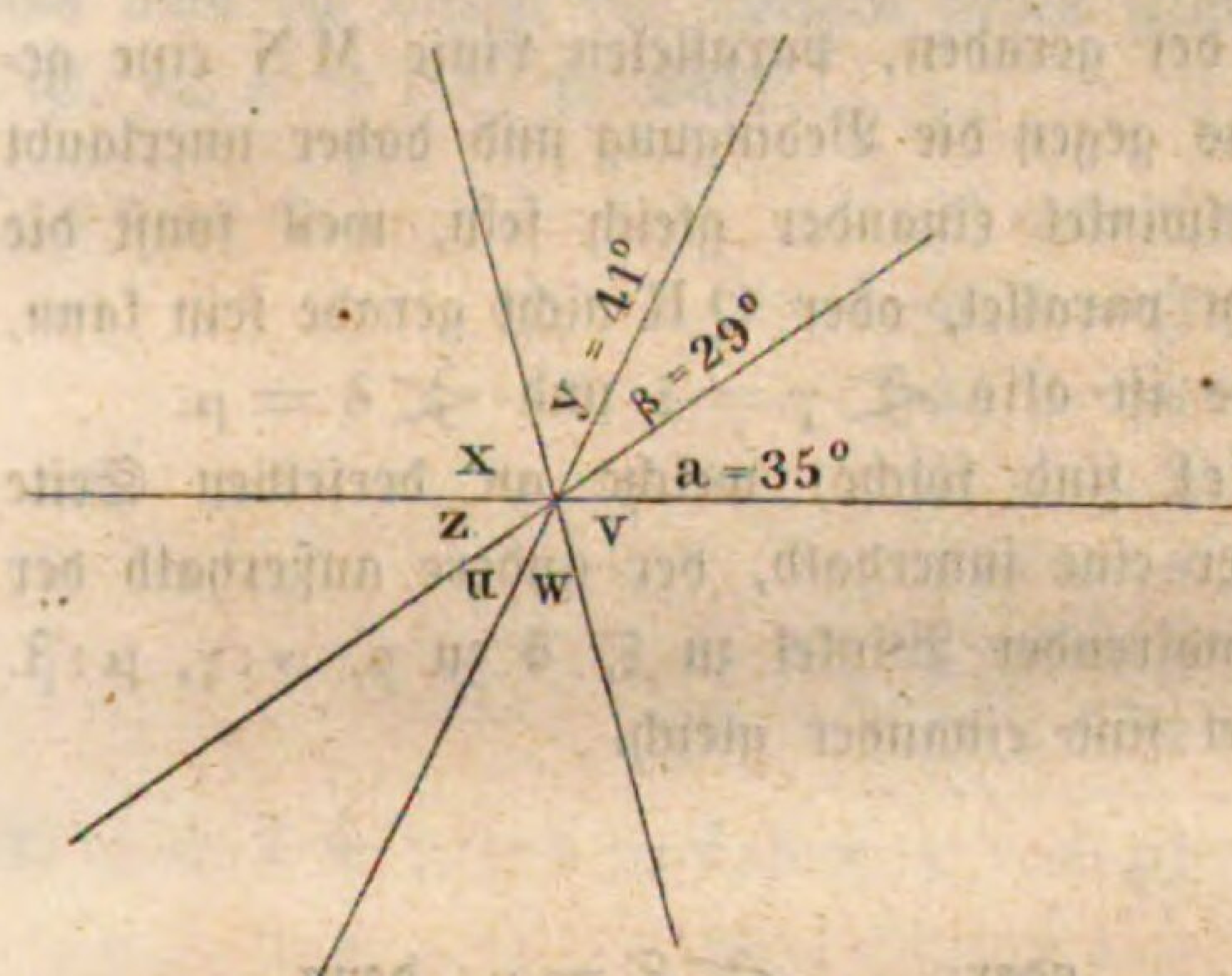
4) sind Scheitelwinkel gleich groß, was so bewiesen wird:

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle\,\alpha + \beta = 2R\\ \sphericalangle\,\beta + \varphi = 2R\end{array}\right\}\text{ als Nebenwinkel}$$
$$\sphericalangle\,\alpha = \varphi$$

oder:
$$\sphericalangle\,\beta + \varphi = 180^0$$
$$\sphericalangle\,\varphi + \delta = 180^0$$
$$\sphericalangle\,\beta + \varphi = \varphi + \delta$$
$$-\varphi \quad -\varphi$$
$$\sphericalangle\,\beta = \sphericalangle\,\delta.$$



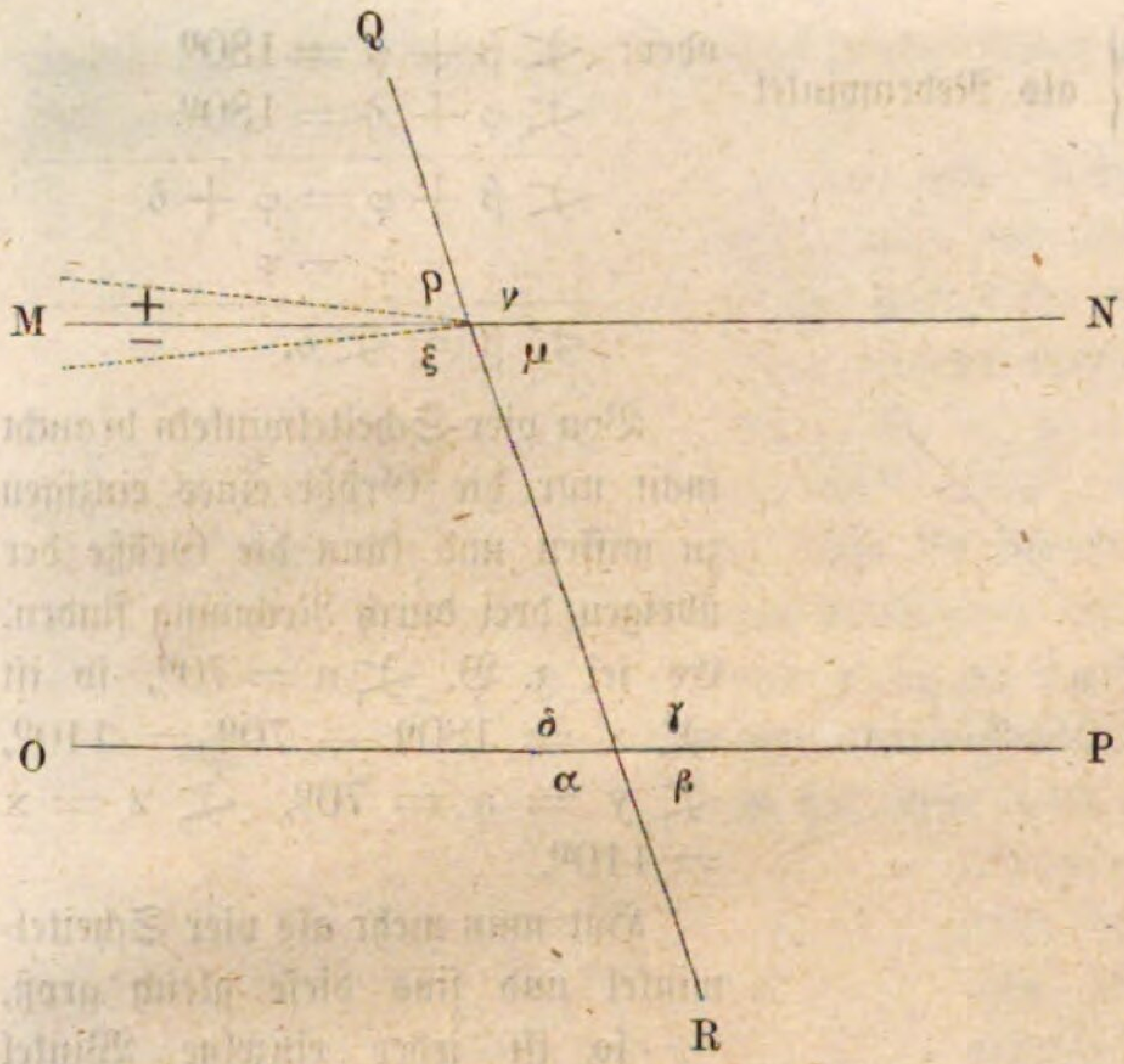
Von vier Scheitelwinkeln braucht man nur die Größe eines einzigen zu wissen und kann die Größe der übrigen drei durch Rechnung finden. Es sei z. B. $\sphericalangle\,a = 70^0$, so ist $\sphericalangle\,x = 180^0 - 70^0 = 110^0$, $\sphericalangle\,y = a = 70^0$, $\sphericalangle\,z = x = 110^0$.



Hat man mehr als vier Scheitelwinkel und sind diese gleich groß, so ist jeder einzelne Winkel $= \frac{360^0}{n}$, d. h., dividirt durch die Anzahl der Winkel. Hätte man z. B. 18 gleich große Scheitelwinkel, so ist jeder $= \frac{360^0}{18} = 20^0$. Hat man aber mehr als vier Scheitelwinkel, und sind diese verschieden groß, so muß man die Größe der halben Anzahl der Winkel weniger $1 = \left(\frac{n}{2} - 1\right)$ kennen. Es sei z. B. $\sphericalangle\,a = 35^0$, $\sphericalangle\,\beta = 29^0$, $\sphericalangle\,y = 41^0$, so ist $\sphericalangle\,x = 180^0 - (a + \beta + y) = 180^0 - (35^0 + 29^0 + 41^0) = 75^0$, $\sphericalangle\,z = a = 35^0$, $\sphericalangle\,u = \beta = 29^0$, $\sphericalangle\,w = y = 41^0$, $\sphericalangle\,v = x = 75^0$.

Wenn man zwei parallele Linien mit einer dritten geraden Linie durchschneidet, so entstehen acht Winkel, welche wieder verschiedene Namen und verschiedene Eigenschaften haben. Diese neu entstandenen acht Winkel erhalten die Namen: Wechselwinkel, correspondirende Winkel und Gegenwinkel.

Wechselwinkel sind solche Winkel, welche innerhalb der Parallelen liegen, aber an entgegengesetzter Seite der schneidenden Linie, d. h., der eine Winkel liegt rechts, der andere links, der eine oben, der andere unten; so



ist z. B. $\sphericalangle\,\delta$ ein Wechselwinkel zu μ, γ zu ξ. Alle Wechselwinkel sind einander gleich, was so bewiesen wird: Wollte man behaupten, der Wechselwinkel γ sei nicht gleich dem ξ, so sind zwei Fälle möglich: Man kann nämlich $\sphericalangle\,\xi = \gamma$ machen:

1) durch Subtraction und

2) durch Addition eines Winkels;

in beiden Fällen aber wird aus der geraden, parallelen Linie MN eine gebrochene, nicht parallele Linie, was gegen die Bedingung und daher unerlaubt ist; es müssen also alle Wechselwinkel einander gleich sein, weil sonst die beiden Linien MN und OP nicht parallel, oder QR nicht gerade sein kann, was aber die Bedingung war; es ist also $\sphericalangle\,\gamma = \xi$ und $\sphericalangle\,\delta = \mu$.

Correspondirende Winkel sind solche, welche an derselben Seite der schneidenden Linie liegen, der eine innerhalb, der andere außerhalb der Parallelen; so ist α ein correspondirender Winkel zu ξ, δ zu ρ, $\nu:\gamma$, $\mu:\beta$. Auch die correspondirenden Winkel sind einander gleich.

Beweis:

$\sphericalangle\,\alpha = \xi$; denn

$\sphericalangle\,\alpha = \gamma$ Scheitelw.
$\sphericalangle\,\gamma = \xi$ Wechselw.

$\sphericalangle\,\alpha = \xi$

oder: $\sphericalangle\,\beta = \mu$; denn

$\sphericalangle\,\beta = \delta$
$\sphericalangle\,\delta = \mu$

$\sphericalangle\,\beta = \mu$

oder: $\sphericalangle\,\delta = \rho$; denn

$\sphericalangle\,\rho = \mu$
$\sphericalangle\,\mu = \delta$

$\sphericalangle\,\rho = \delta$

oder: $\sphericalangle\,\nu = \gamma$

$\sphericalangle\,\nu = \xi$
$\sphericalangle\,\xi = \gamma$

$\sphericalangle\,\nu = \gamma$.

Gegenwinkel sind solche, welche innerhalb der Parallelen liegen und zwar an derselben Seite der schneidenden Linie; so ist $\sphericalangle\,\delta$ ein Gegenwinkel

zu ξ und γ zu μ. Die Gegenwinkel sind einander selten gleich, aber sie haben immer zusammen 180^0 zu ihrem Maße.

Beweis:

$\sphericalangle \delta + \gamma = 180^0$ als Nebenw.
$\sphericalangle \delta = \mu$ als Wechselw.

$\sphericalangle \gamma + \mu = 180^0$

$\sphericalangle \xi + \mu = 180^0$ als Nebenw.
$\sphericalangle \mu = \delta$ als Wechselw.

$\sphericalangle \xi + \delta = 180^0$

Endlich ist es noch möglich, von α oder β aus Schlüsse auf alle acht Winkel zu machen, z. B.:

$$\sphericalangle \alpha = \gamma \quad \gamma = \xi \quad \xi = \nu \quad \therefore \sphericalangle \alpha = \nu$$

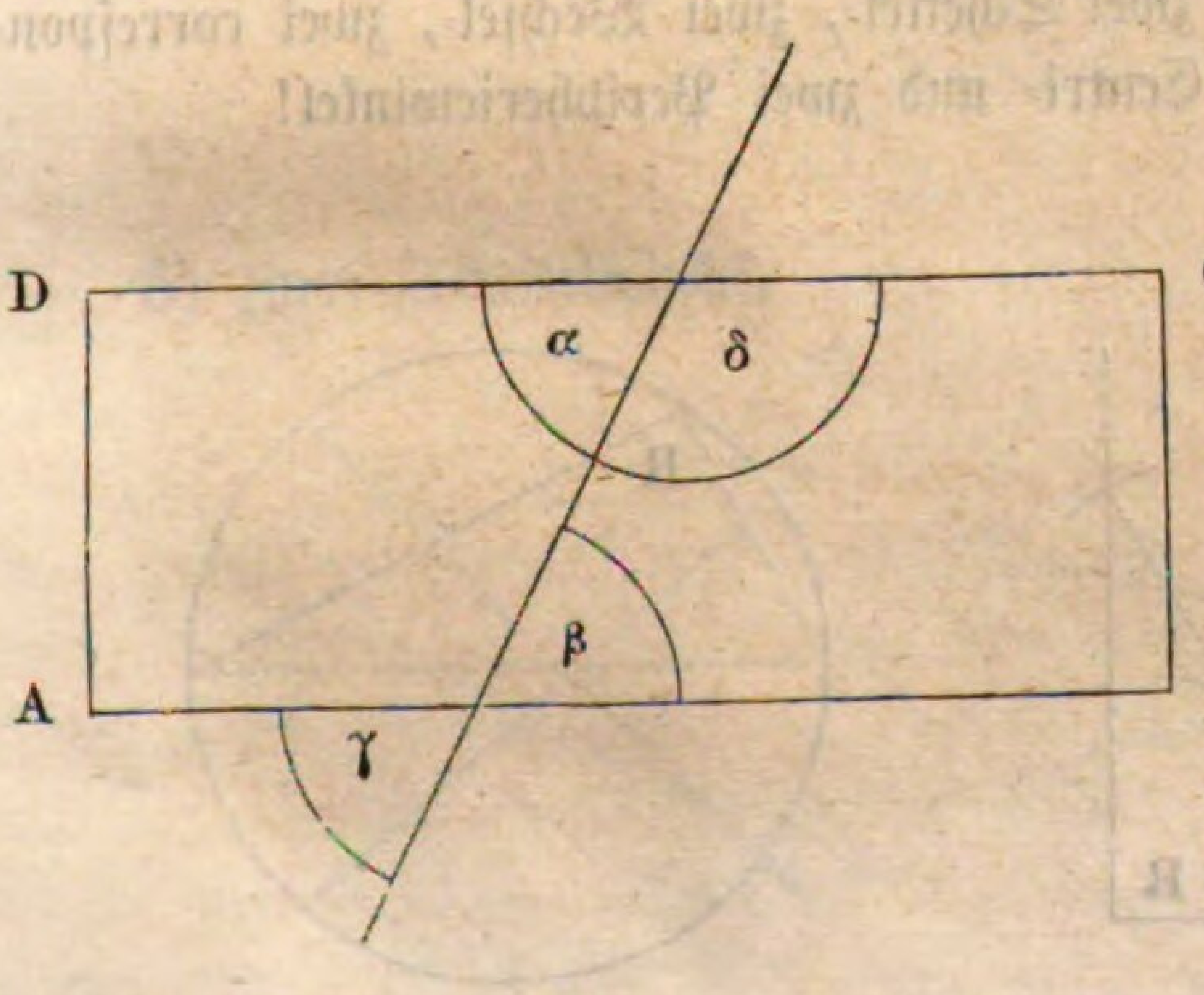
oder:

$$\sphericalangle \beta = \delta \quad \delta = \mu \quad \mu = \rho \quad \therefore \sphericalangle \beta = \rho.$$

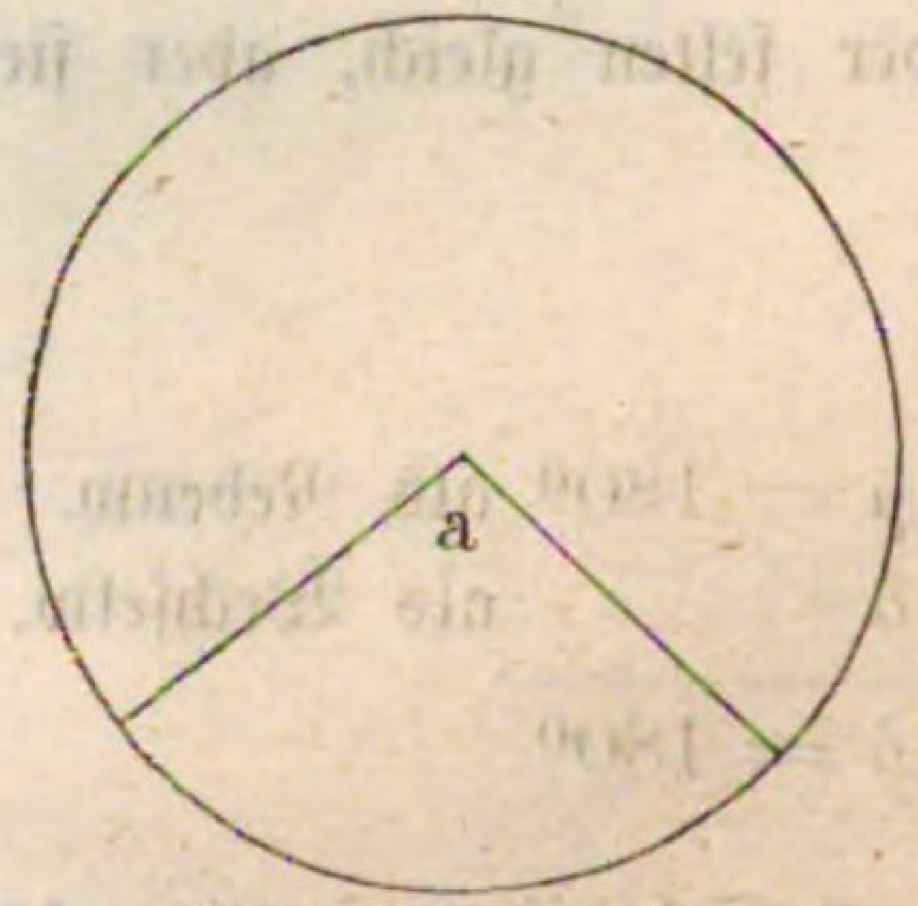
Wenn von den acht Winkeln die Größe eines einzigen bekannt ist, so kann man die Größe der übrigen sieben selbst durch Rechnung finden. Wäre z. B. $\sphericalangle \beta = 70^0$, so wäre:

$\sphericalangle \alpha = 180^0 - 70^0 = 110^0$
$\sphericalangle \delta = \beta = 70^0$
$\sphericalangle \gamma = \alpha = 110^0$
$\sphericalangle \mu = \beta = 70^0$
$\sphericalangle \xi = \alpha = 110^0$
$\sphericalangle \rho = \beta = 70^0$
$\sphericalangle \nu = \alpha = 110^0$

$\sphericalangle (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \xi + \mu + \nu + \rho) =$ zwei mal 360^0

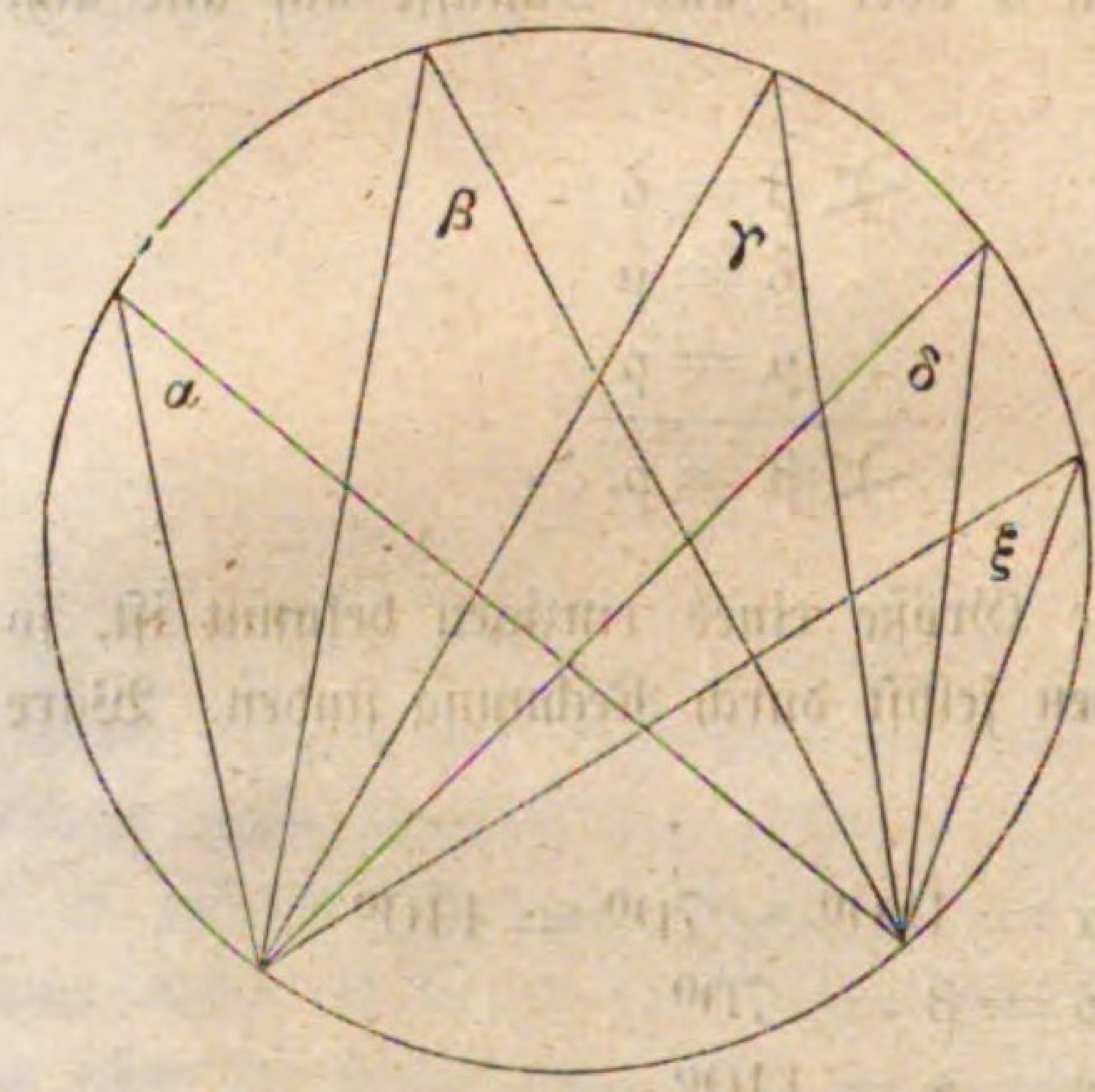


Will man umgekehrt untersuchen, ob zwei Linien parallel sind, oder nicht, so muß man entweder die Gleichheit der Wechsel- oder correspondirenden Winkel untersuchen, oder man muß zusehen, ob die Gegenwinkel zusammen 180^0 zu ihrem Maße haben. Es ist $\alpha = \beta = \gamma$ und $\delta + \beta = 180^0$; mithin ist AB parallel DC.



Endlich kennt die Planimetrie noch Centri- und Peripheriewinkel.

Centriwinkel sind solche, welche mit ihrem Vertex in dem Mittelpunkte eines Kreises liegen; sie haben daher den ganzen Bogen, auf dem sie stehen, zu ihrem Maße, z. B. ∢ a.



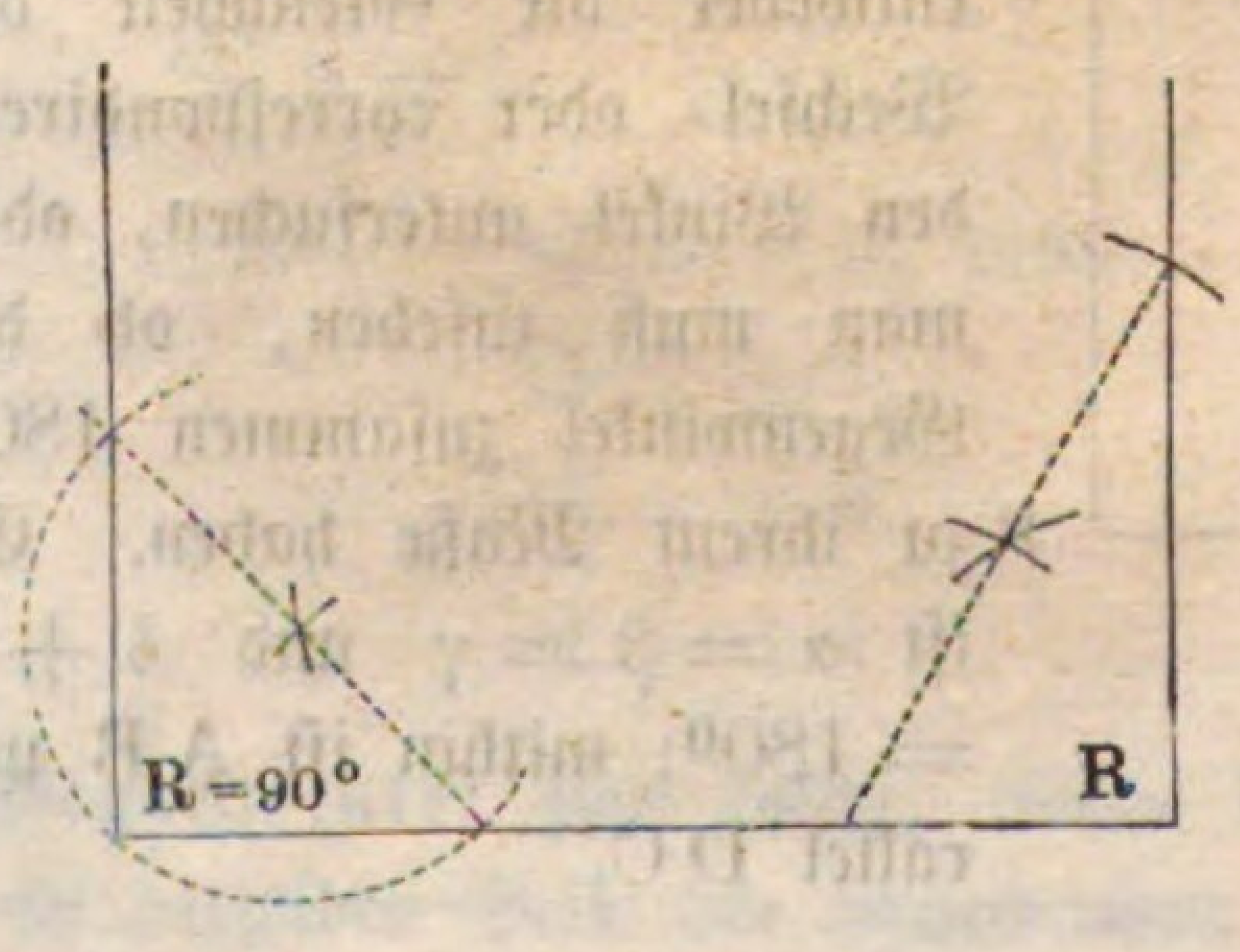
Peripheriewinkel sind solche, welche mit ihrem Vertex in der Peripherie eines Kreises liegen; sie haben den halben Bogen, auf dem sie stehen, zu ihrem Maße. Alle Peripheriewinkel, welche auf demselben oder auf gleichen Bogen stehen, sind einander gleich, z. B. ∢ $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \xi$.

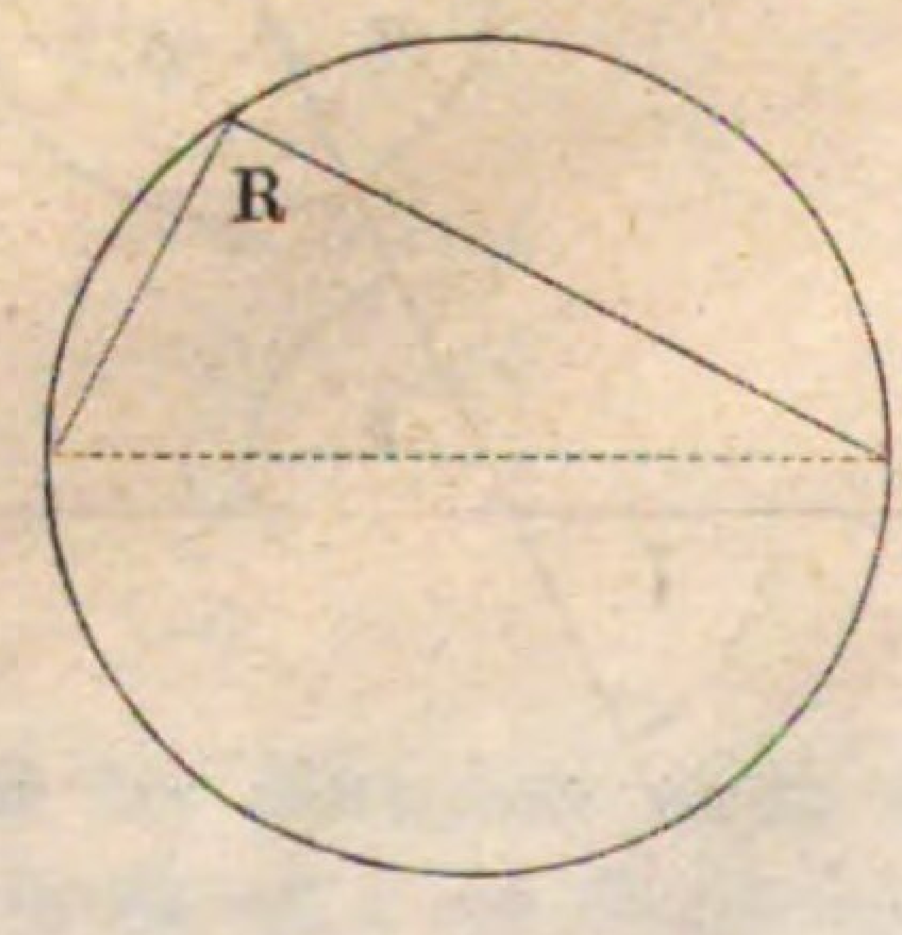
§. 5.

Winkelconstructionen.

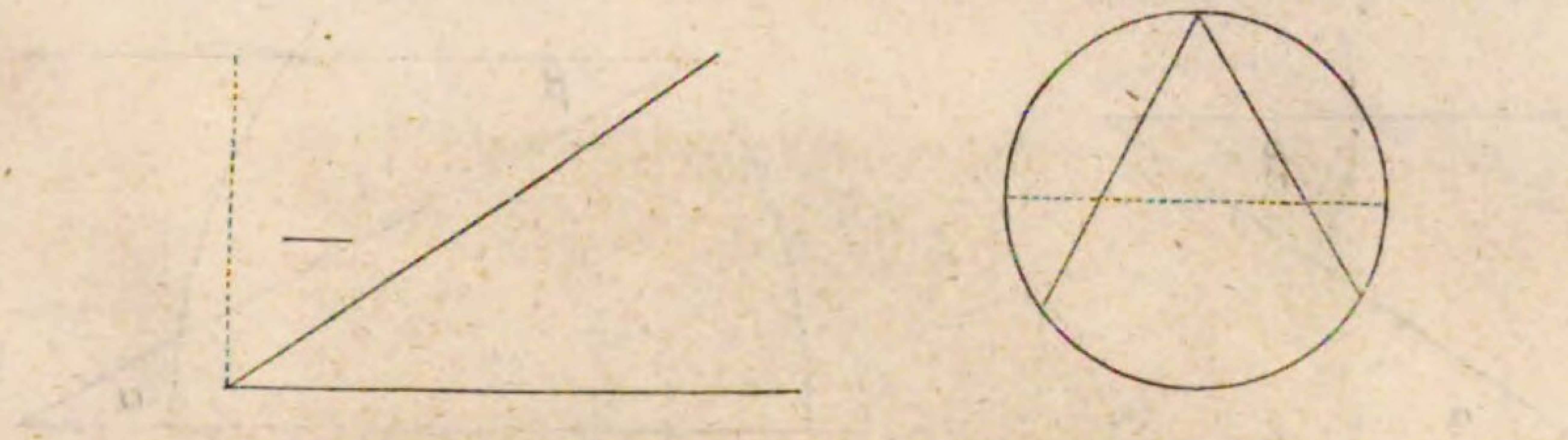
I. Construire mit Hülfe der gegebenen Definitionen zwei rechte, zwei spitze, zwei stumpfe, zwei Neben-, zwei Scheitel-, zwei Wechsel-, zwei correspondirende, zwei Gegen-, zwei Centri- und zwei Peripheriewinkel!

1) Zwei rechte Winkel.

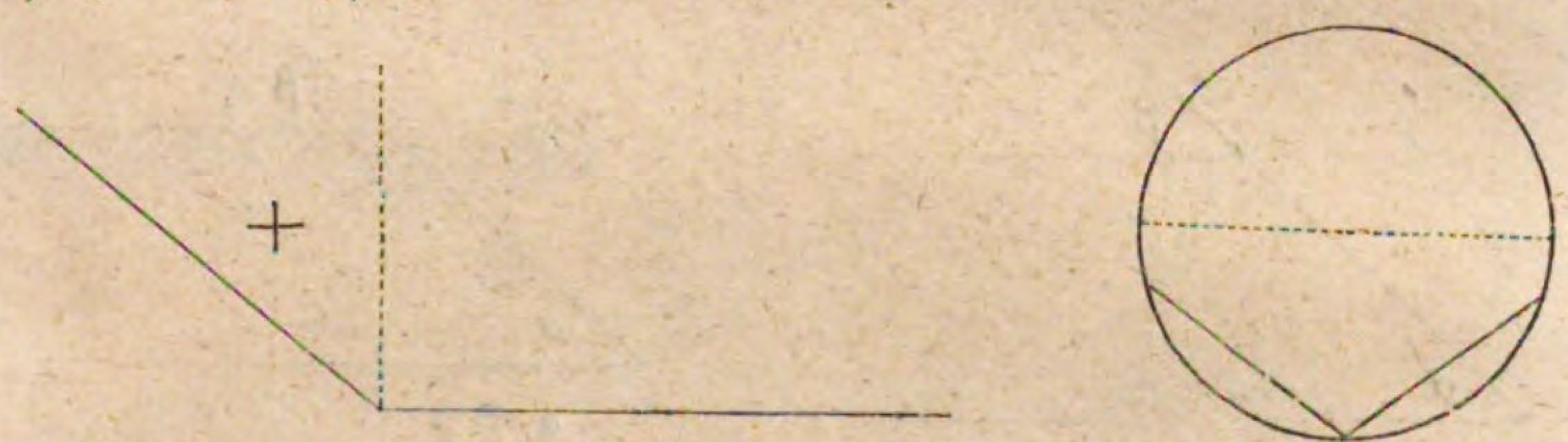




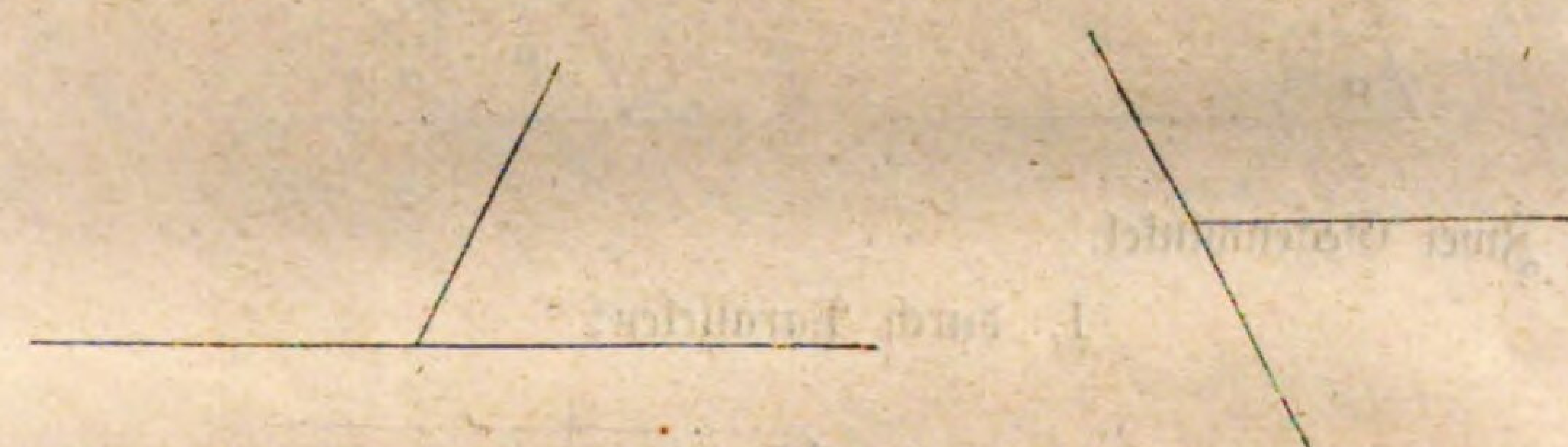
2) Zwei spitze Winkel.



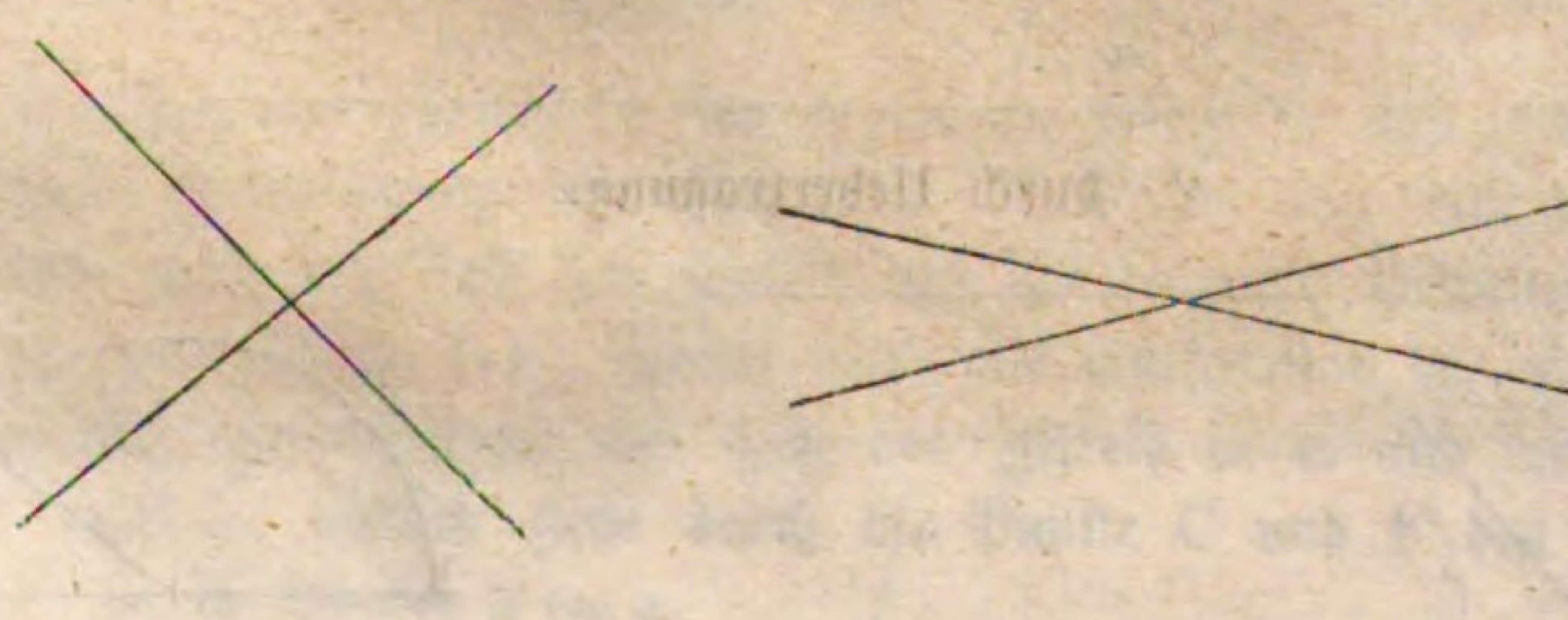
3) Zwei stumpfe Winkel.



4) Zwei Nebenwinkel.

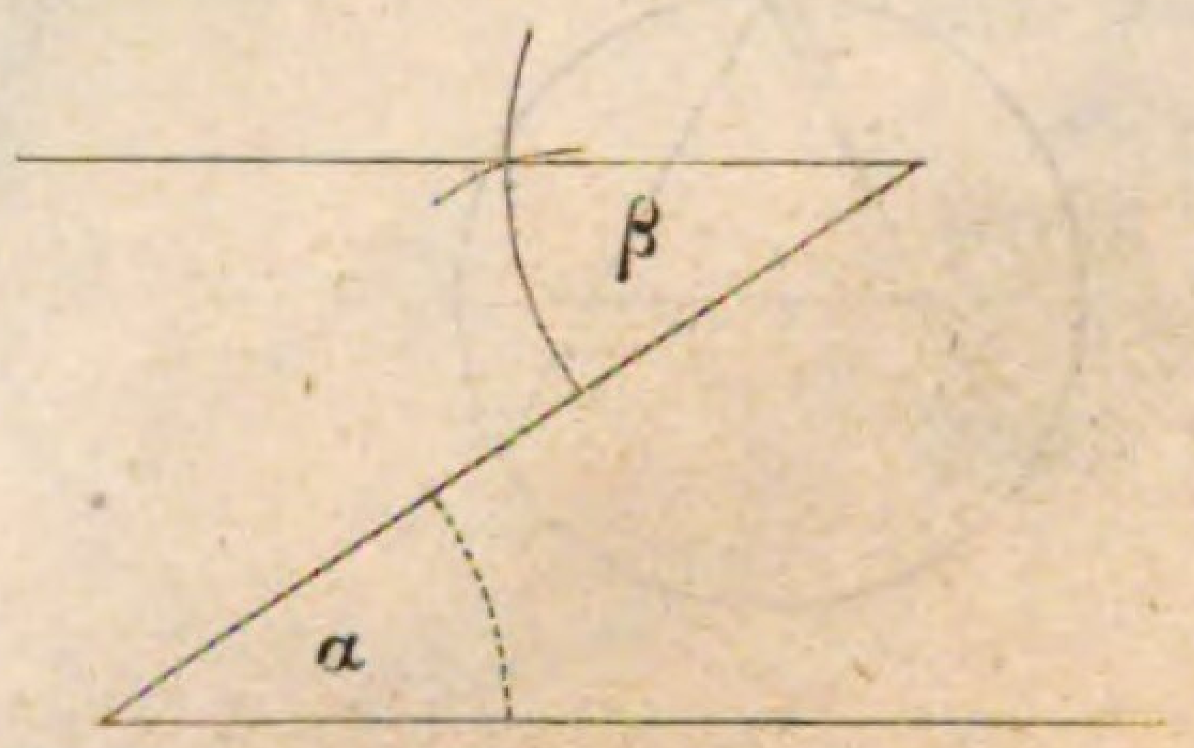


5) Zwei Scheitelwinkel.



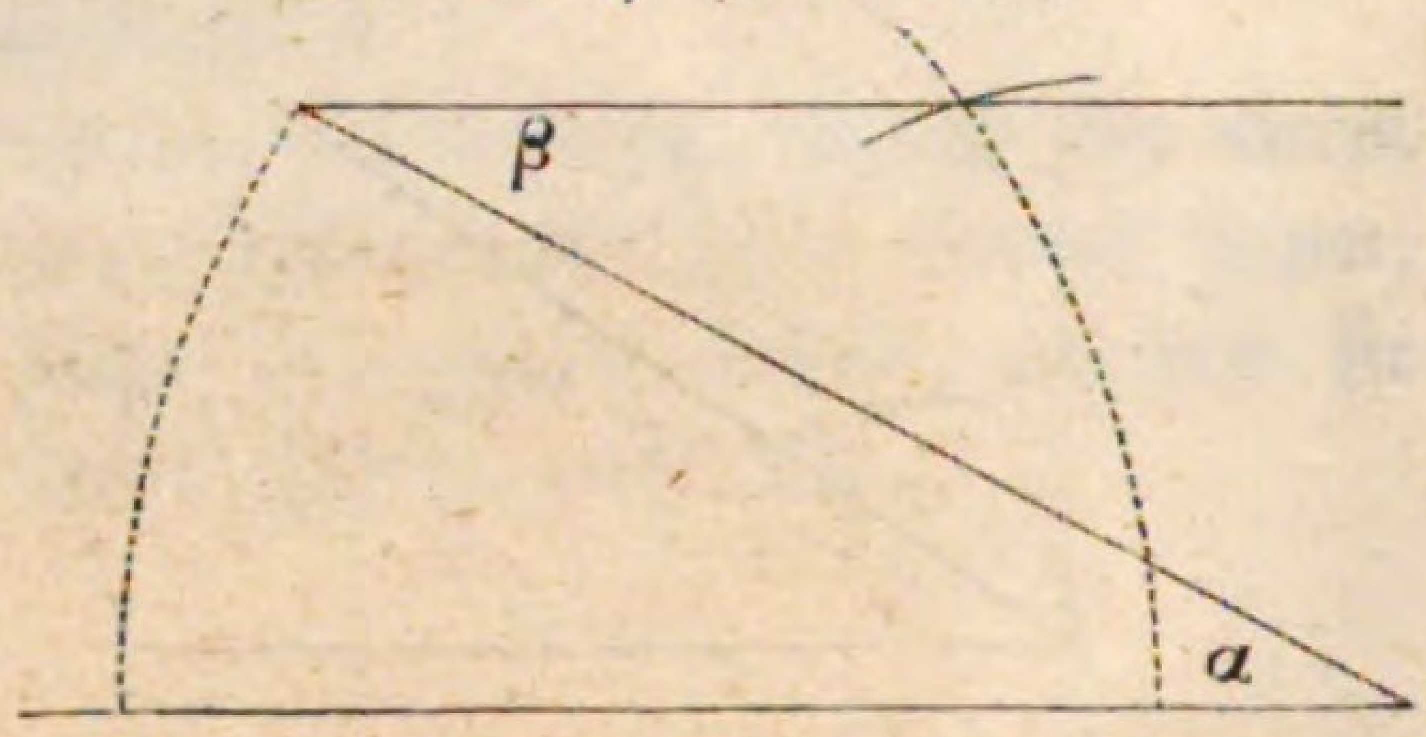
6) Zwei Wechselwinkel.

1. durch Uebertragung;



$\alpha = \beta$

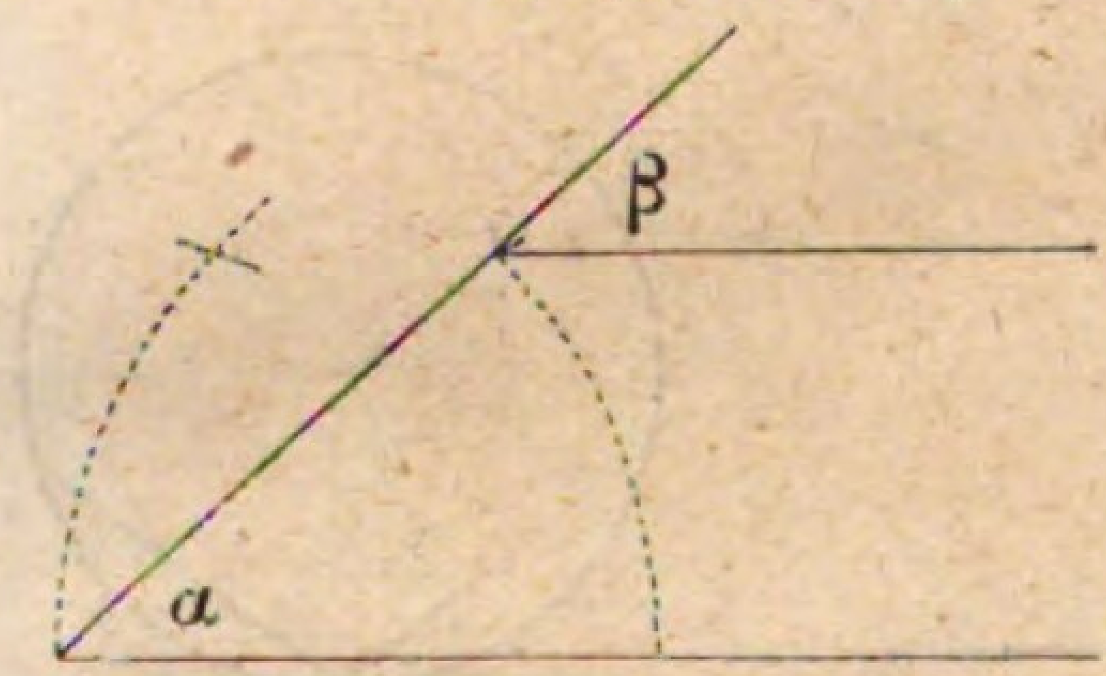
2. durch Parallelen.



$\alpha = \beta$

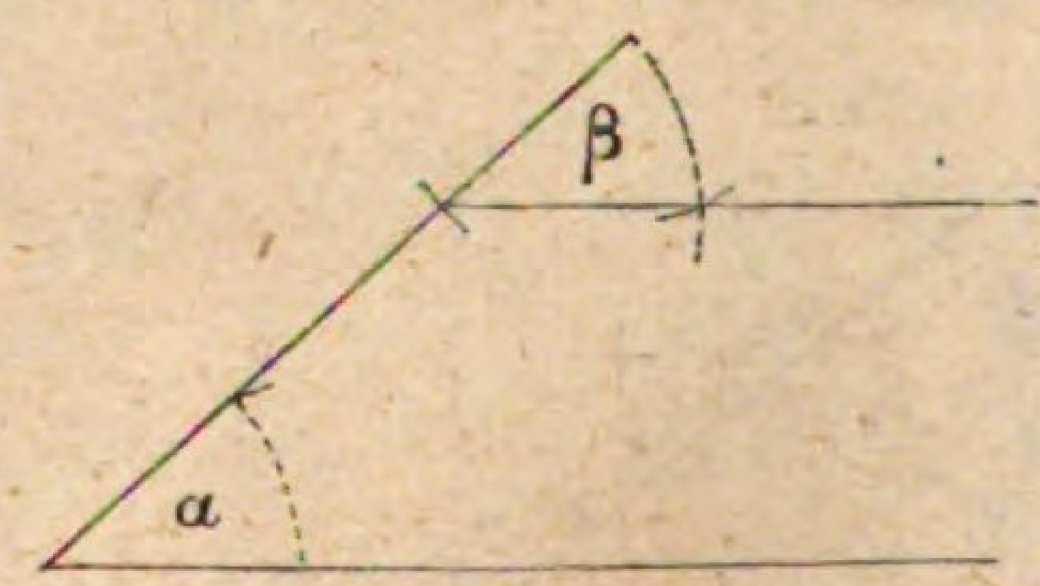
7) Zwei correspondirende Winkel.

1. durch Parallelen;

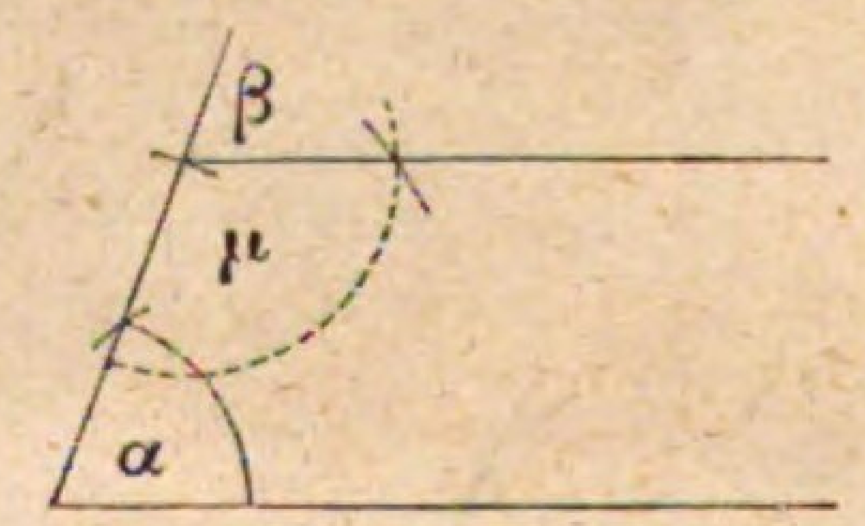


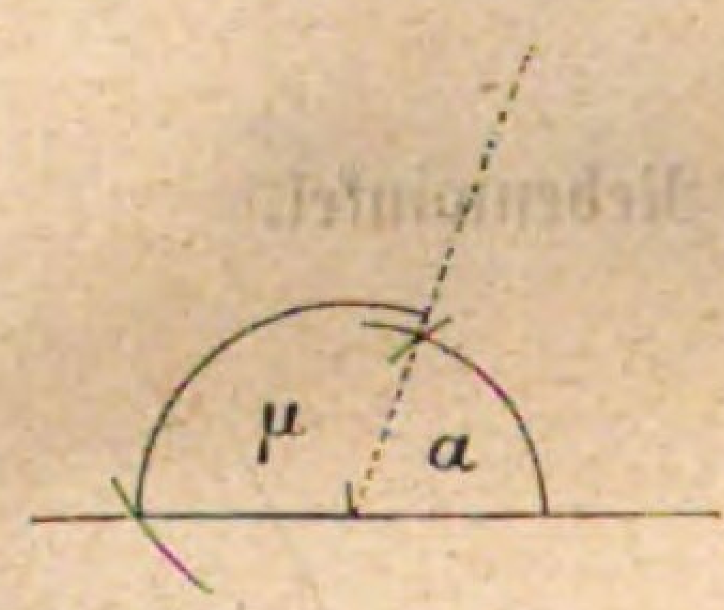
$\alpha = \beta$

2. durch Uebertragung.



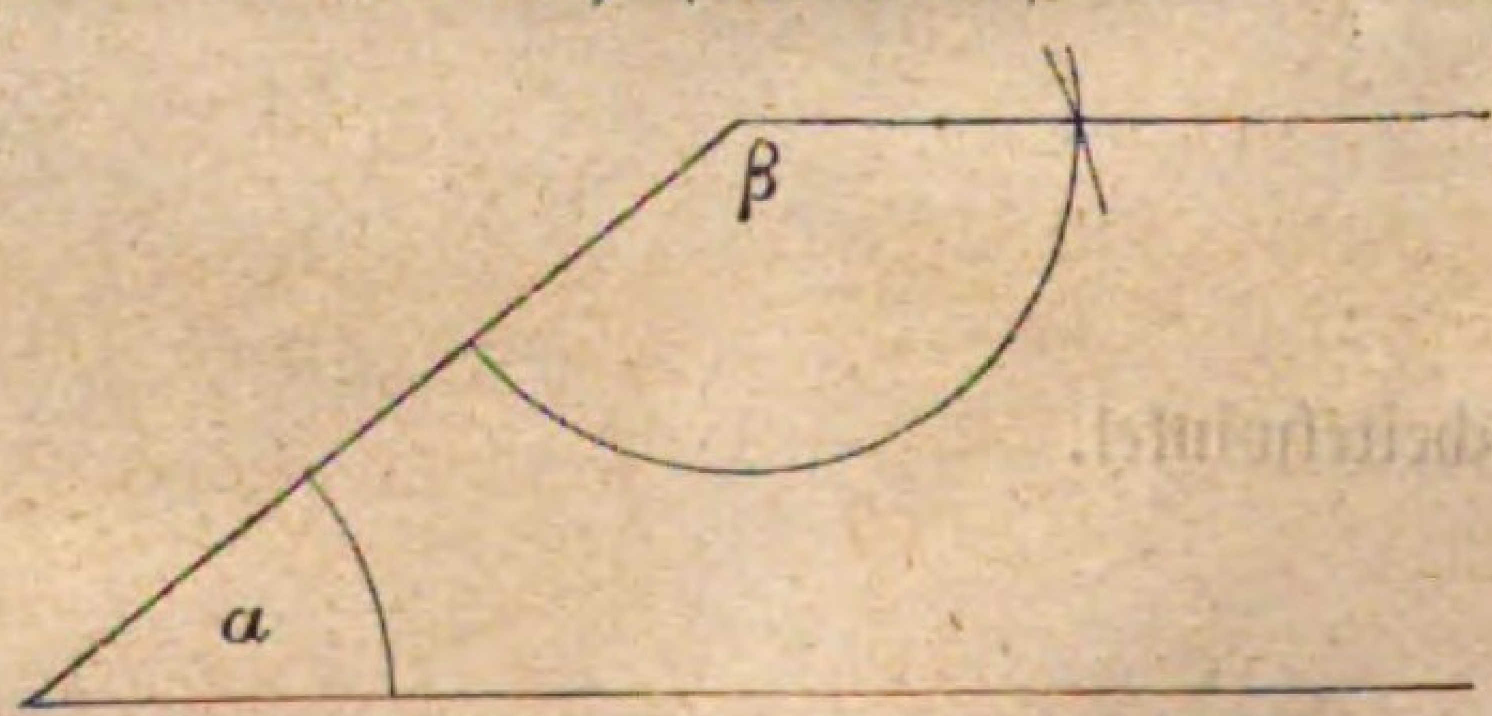
$\alpha = \beta$



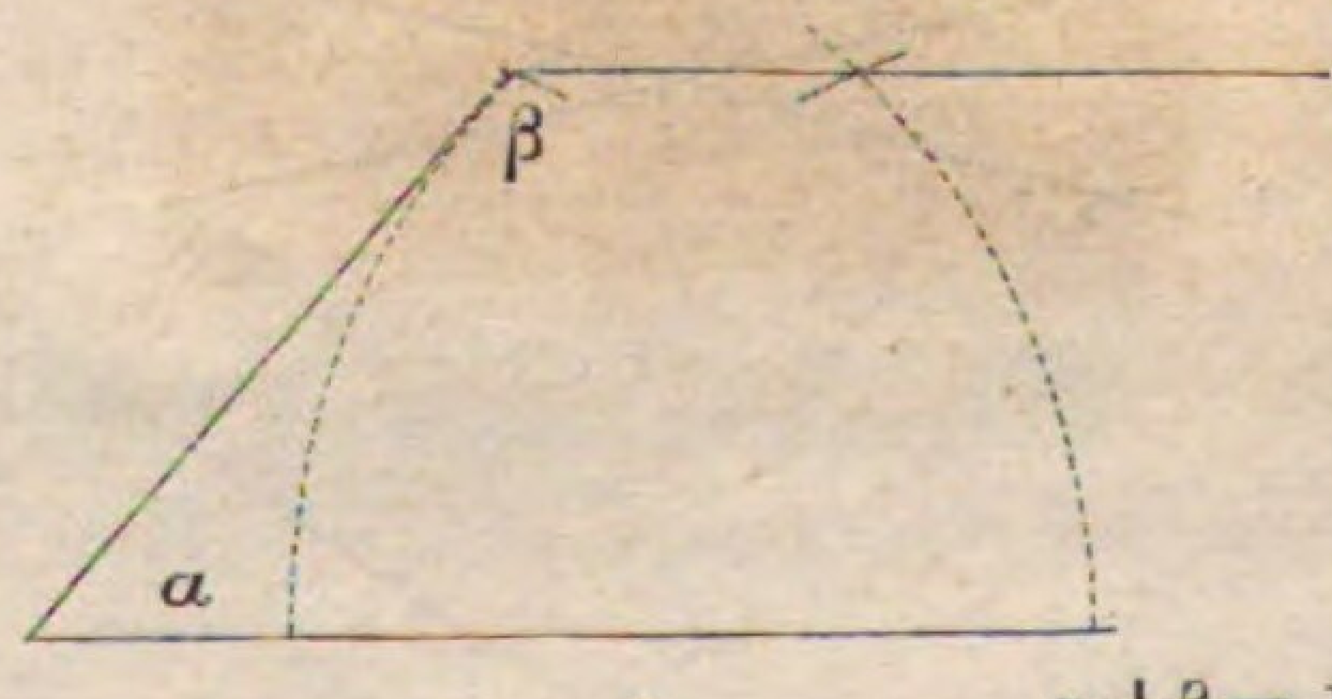


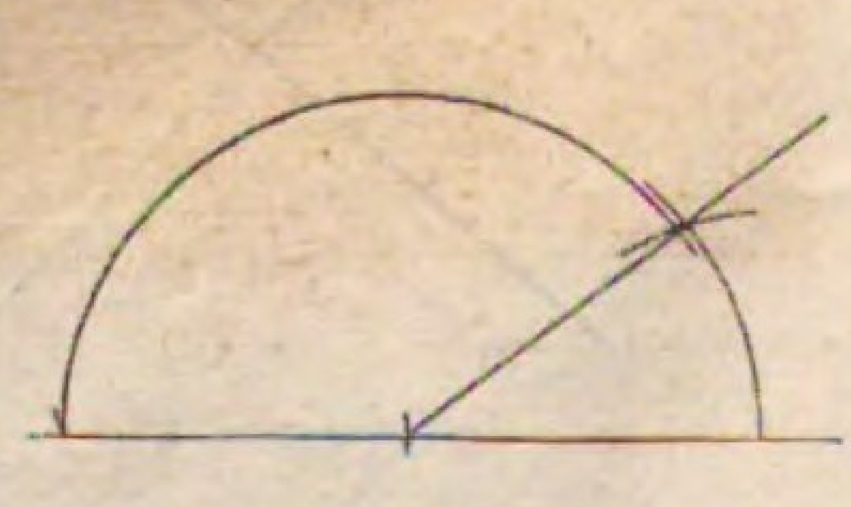
8) Zwei Gegenwinkel.

1. durch Parallelen;



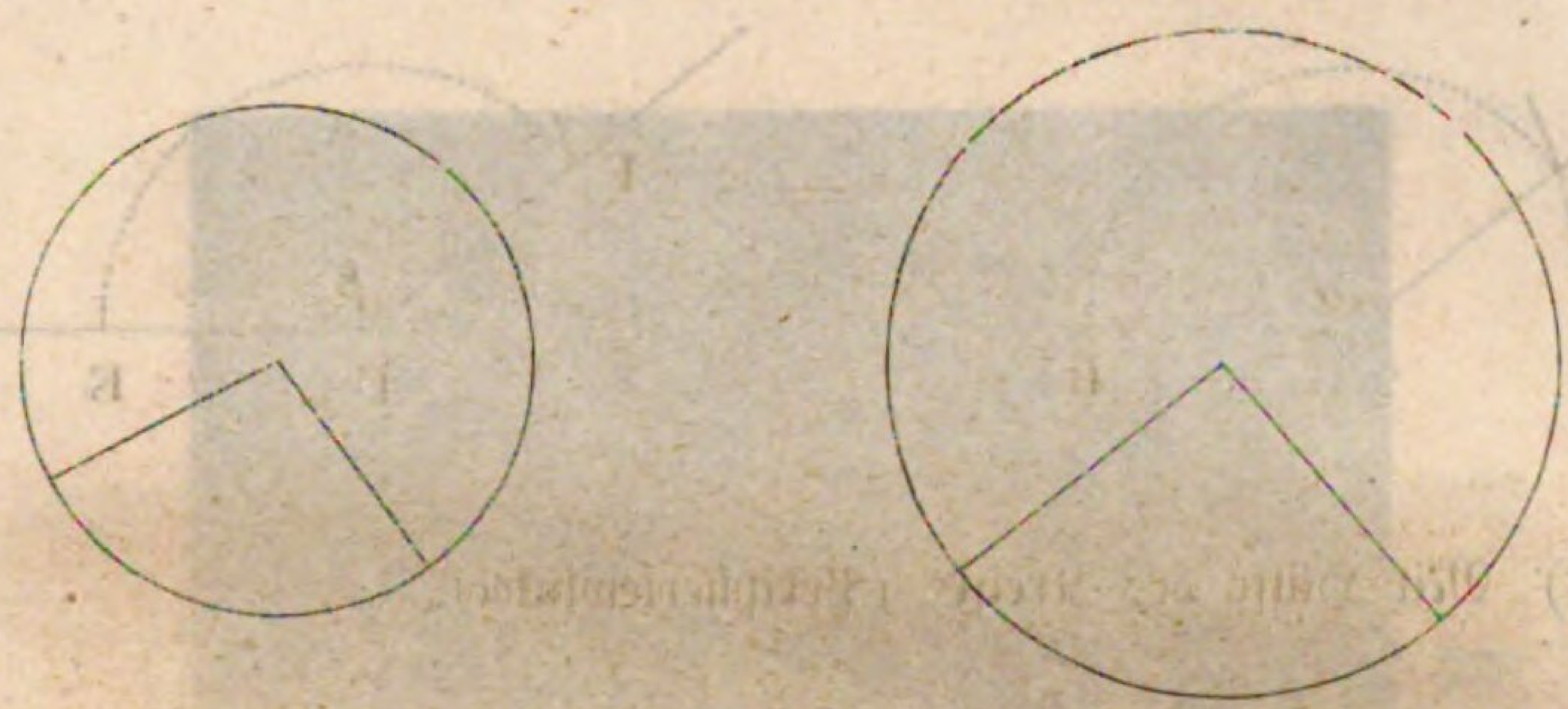
2. durch Uebertragung.



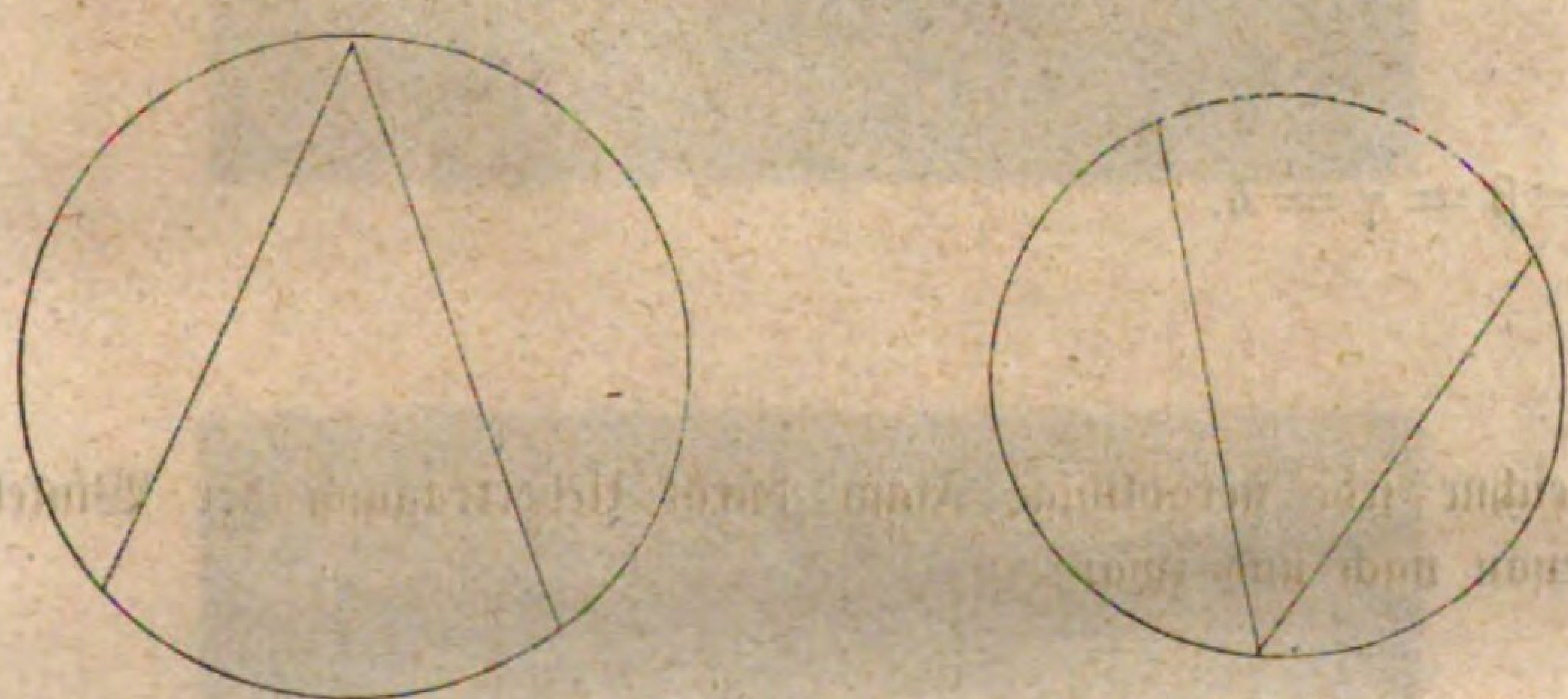


$\alpha + \beta = 180^0$

9) Zwei Centriwinkel.



10) Zwei Peripheriewinkel.

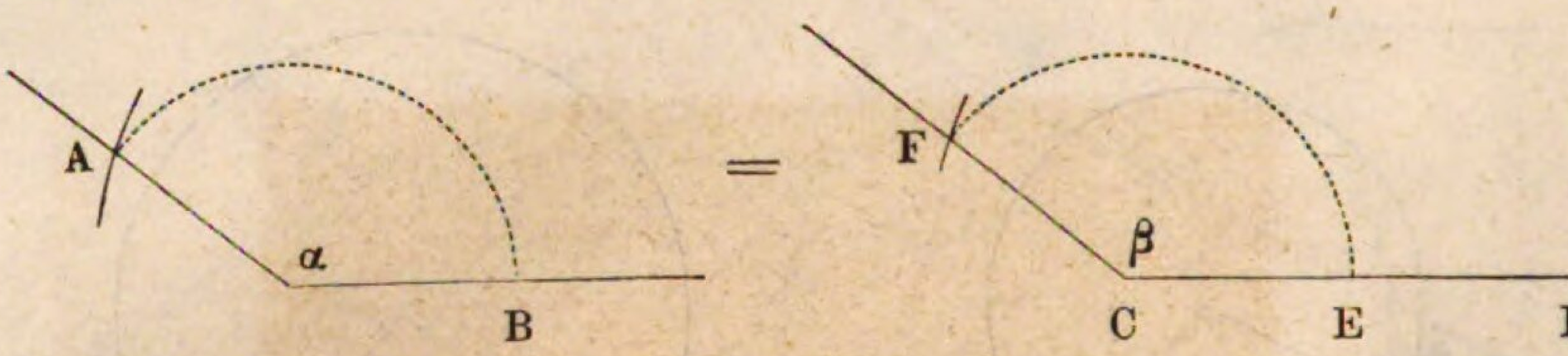


II. Mache jedem gegebenen Winkel einen andern gleich!

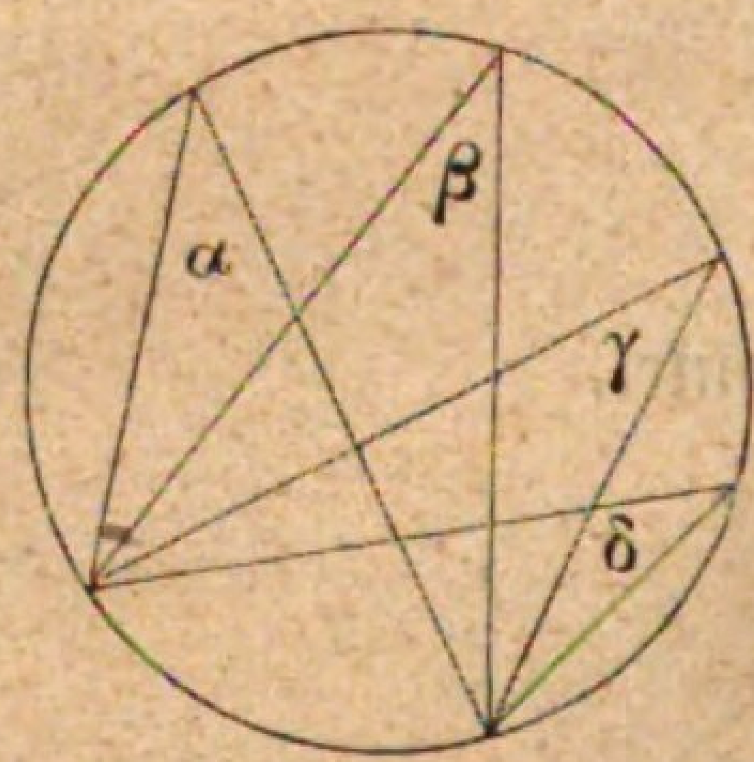
Auflösung:

Setze den Fuß des Zirkels in den gegebenen Winkel α und schlage mit einer beliebigen Zirkelöffnung den Bogen AB; sodann lege eine beliebige Linie CD hin, stelle den Fuß des Zirkels mit der früheren Erweiterung in C und schlage den Bogen EF; darauf messe die Entfernung der Punkte A und B, setze mit diesem Maß den Fuß des Zirkels in E und mache den Bogen $EF = BA$; endlich ziehe durch die Punkte C und F den zweiten Schenkel CF, so ist Winkel $\beta = \alpha$.

1) Durch Uebertragung (Centriwinkel).



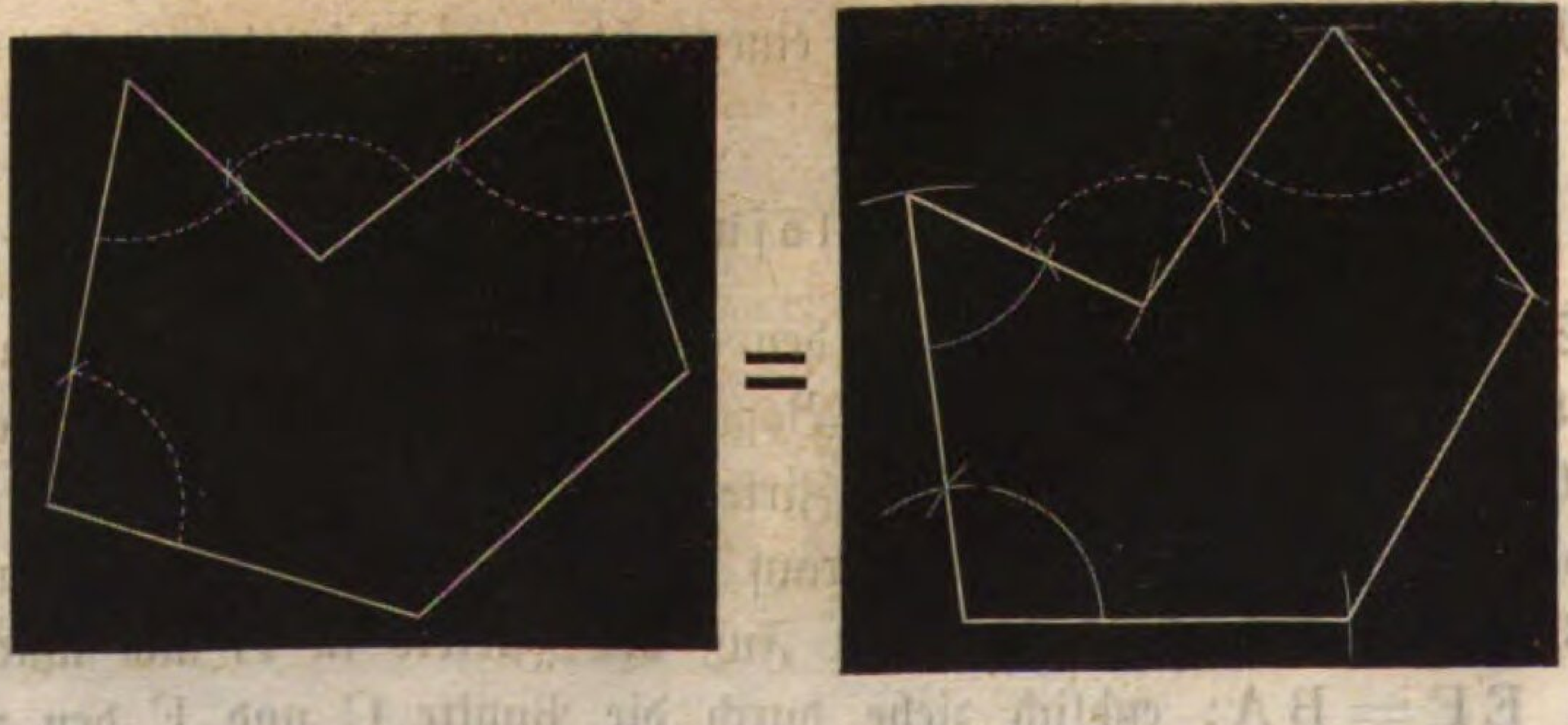
2) Mit Hülfe des Kreises (Peripheriewinkel).



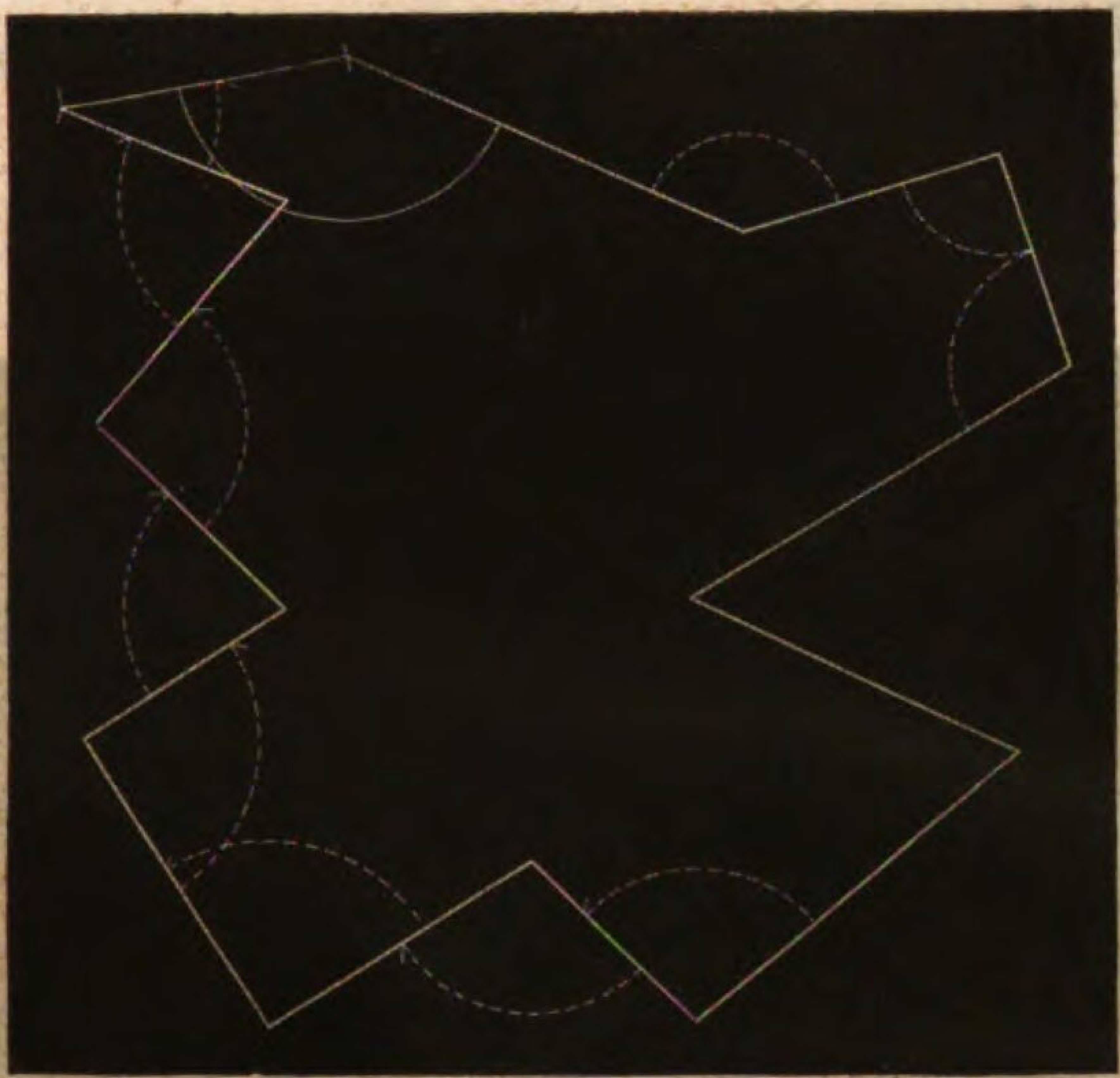
$\sphericalangle\ \alpha = \beta = \gamma = \delta.$

III. Zeichne jede geradlinige Figur durch Uebertragung der Winkel ganz genau nach und zwar:

1) Ein Sechseck! Die Auflösung nach II.

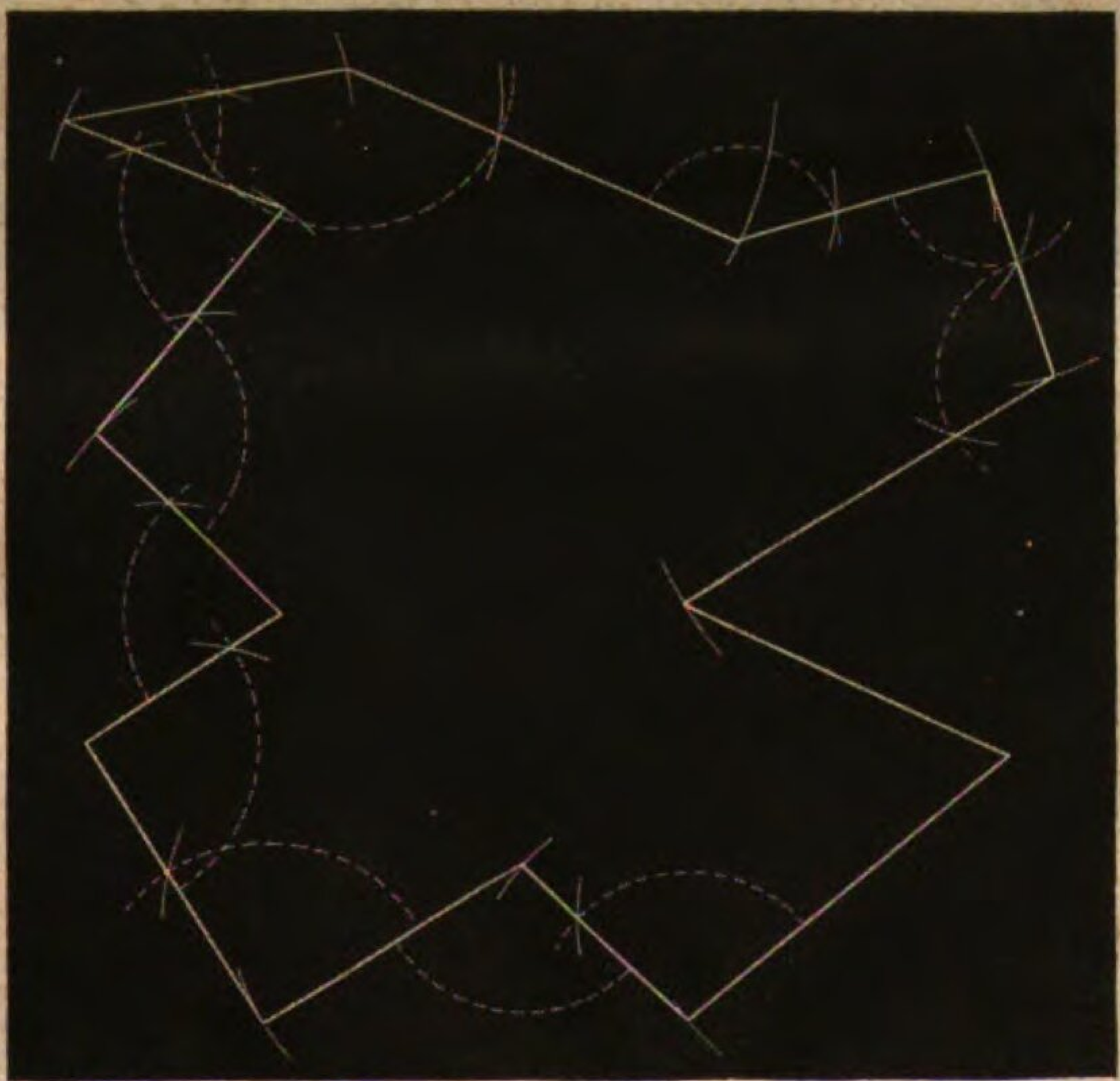


2) Ein Vierzehneck!

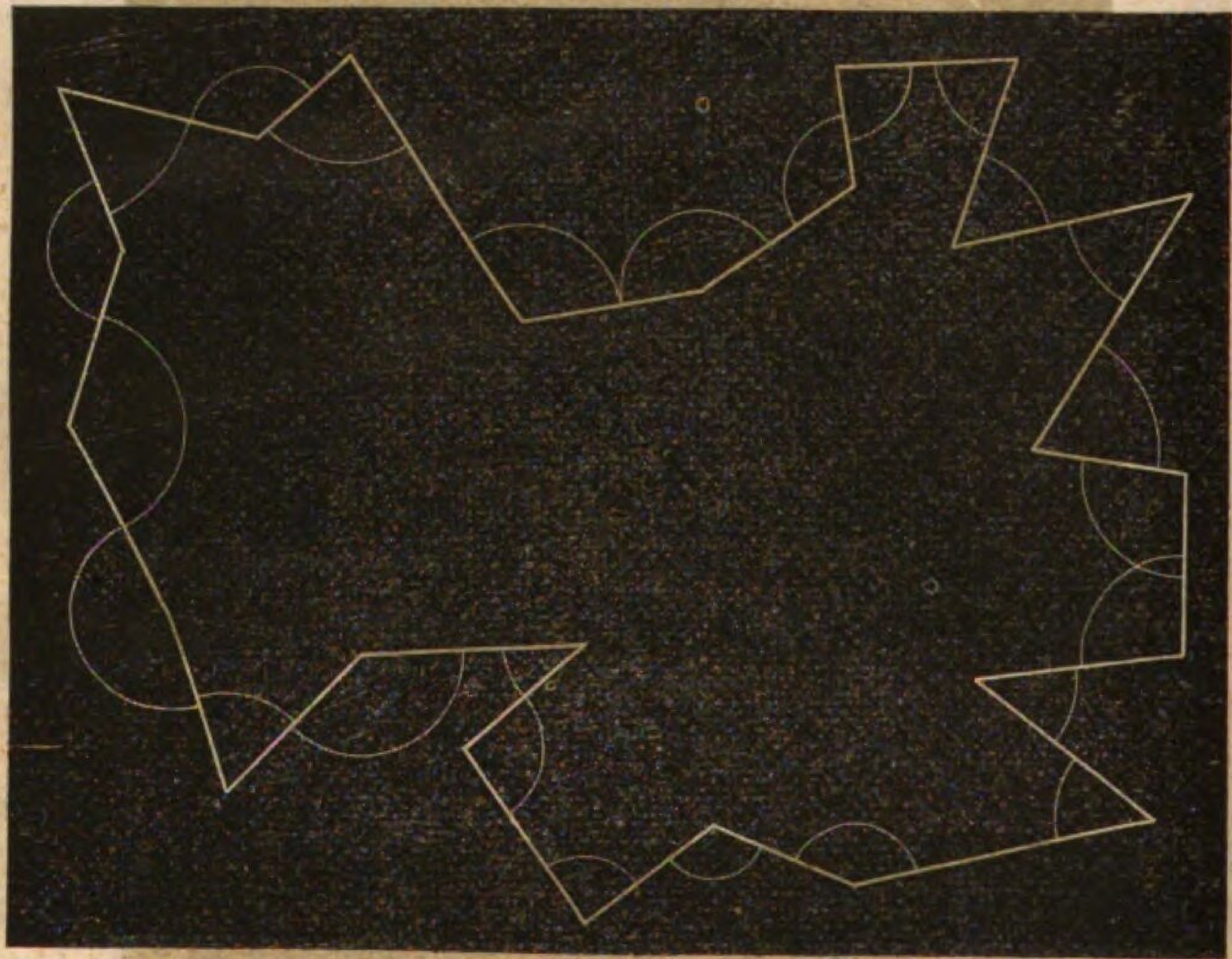


=

=

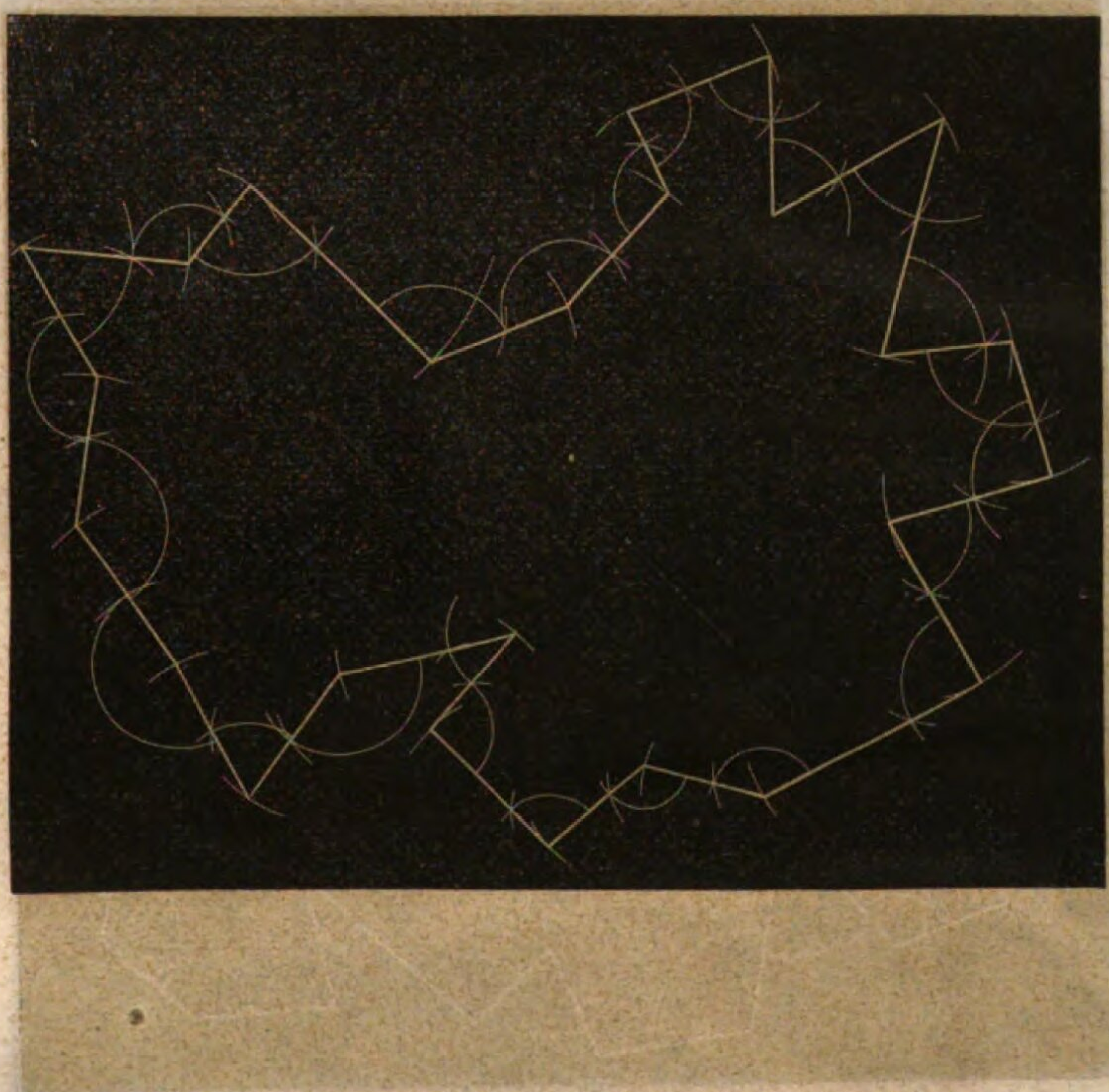


3) Ein Fünfundzwanzigeck! *(a)*

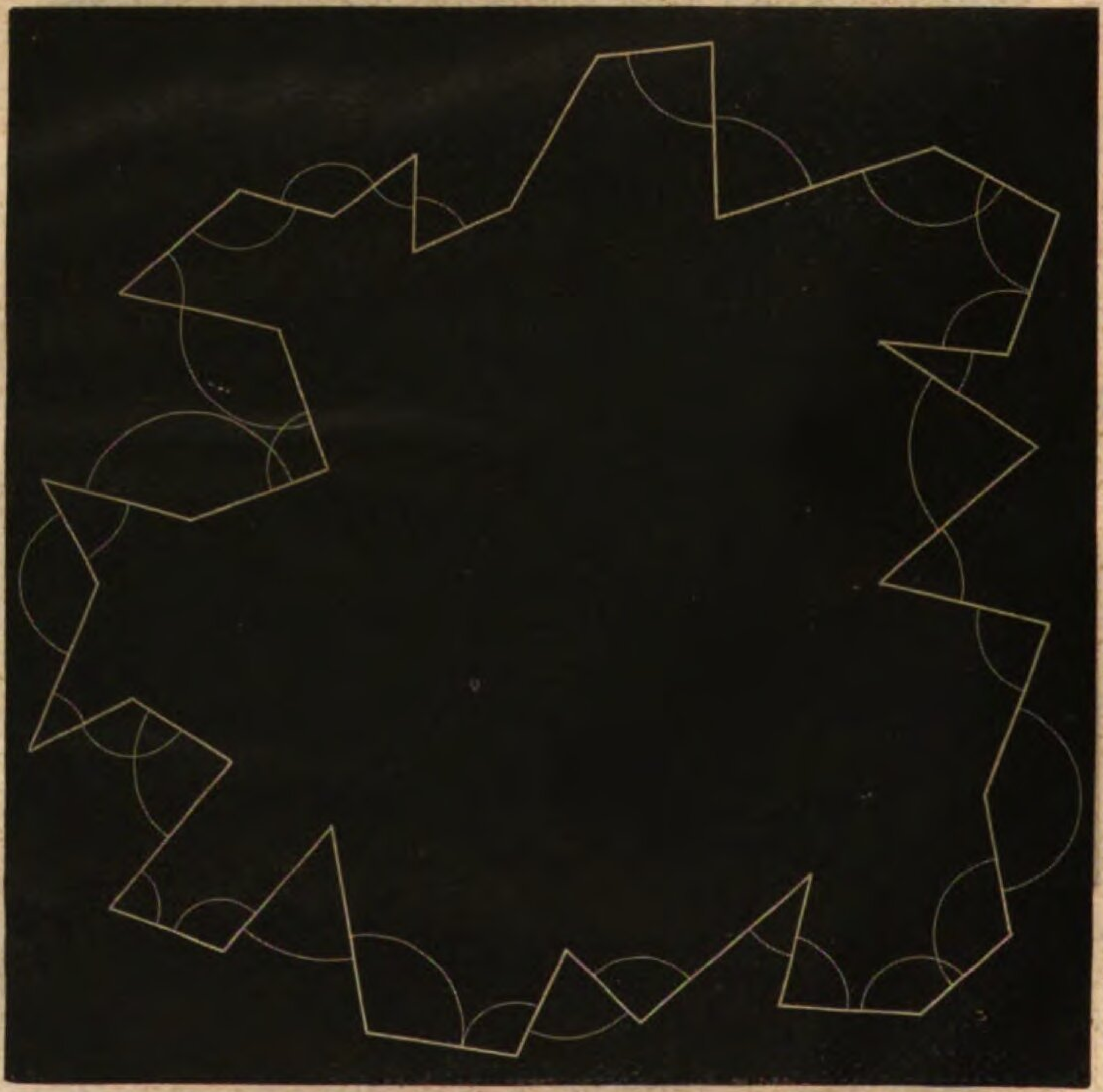


=

3) Ein Fünfundzwanzigeck! *(b)*

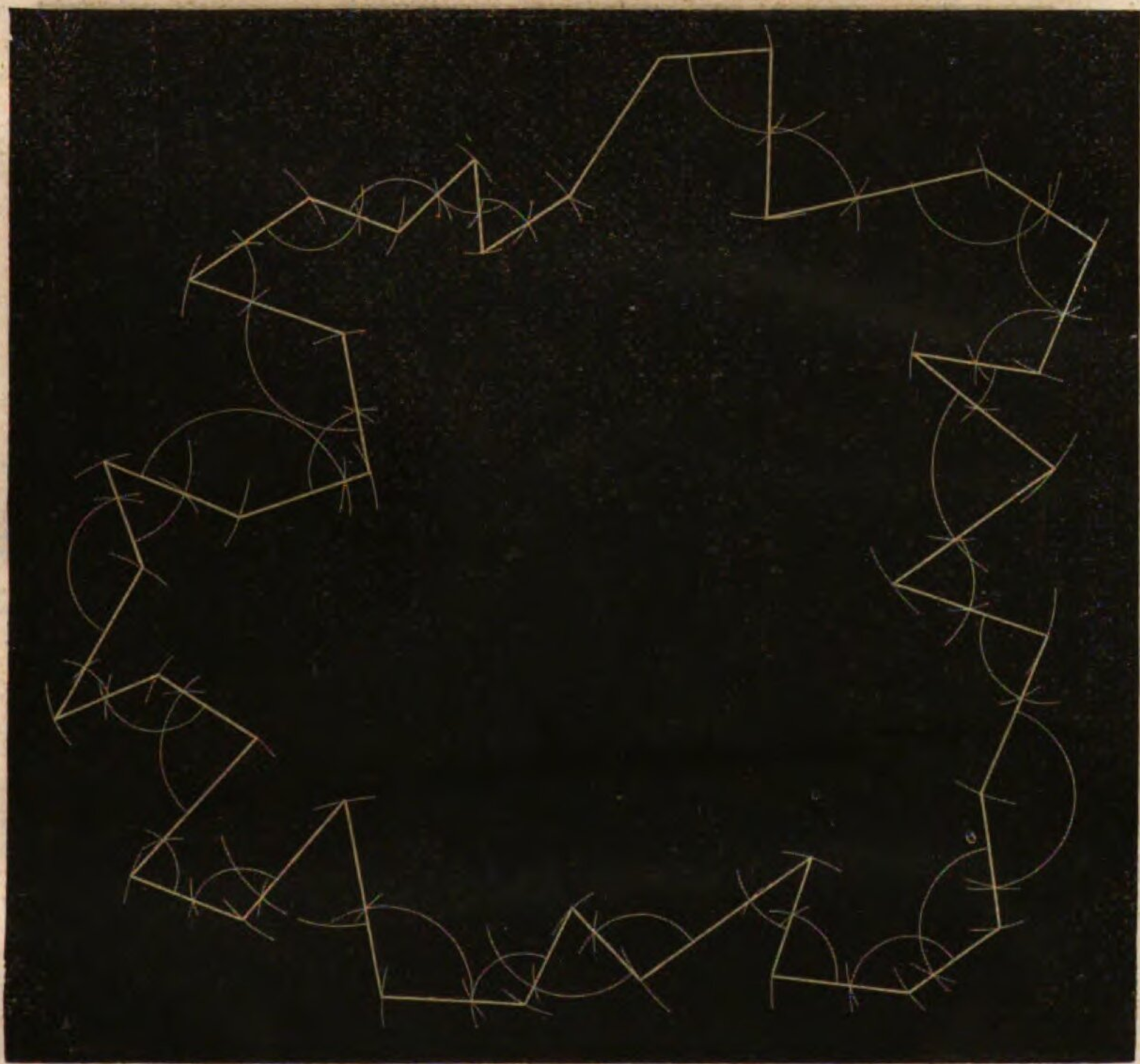


4) Ein Sechsunddreißigeck! *(a)*

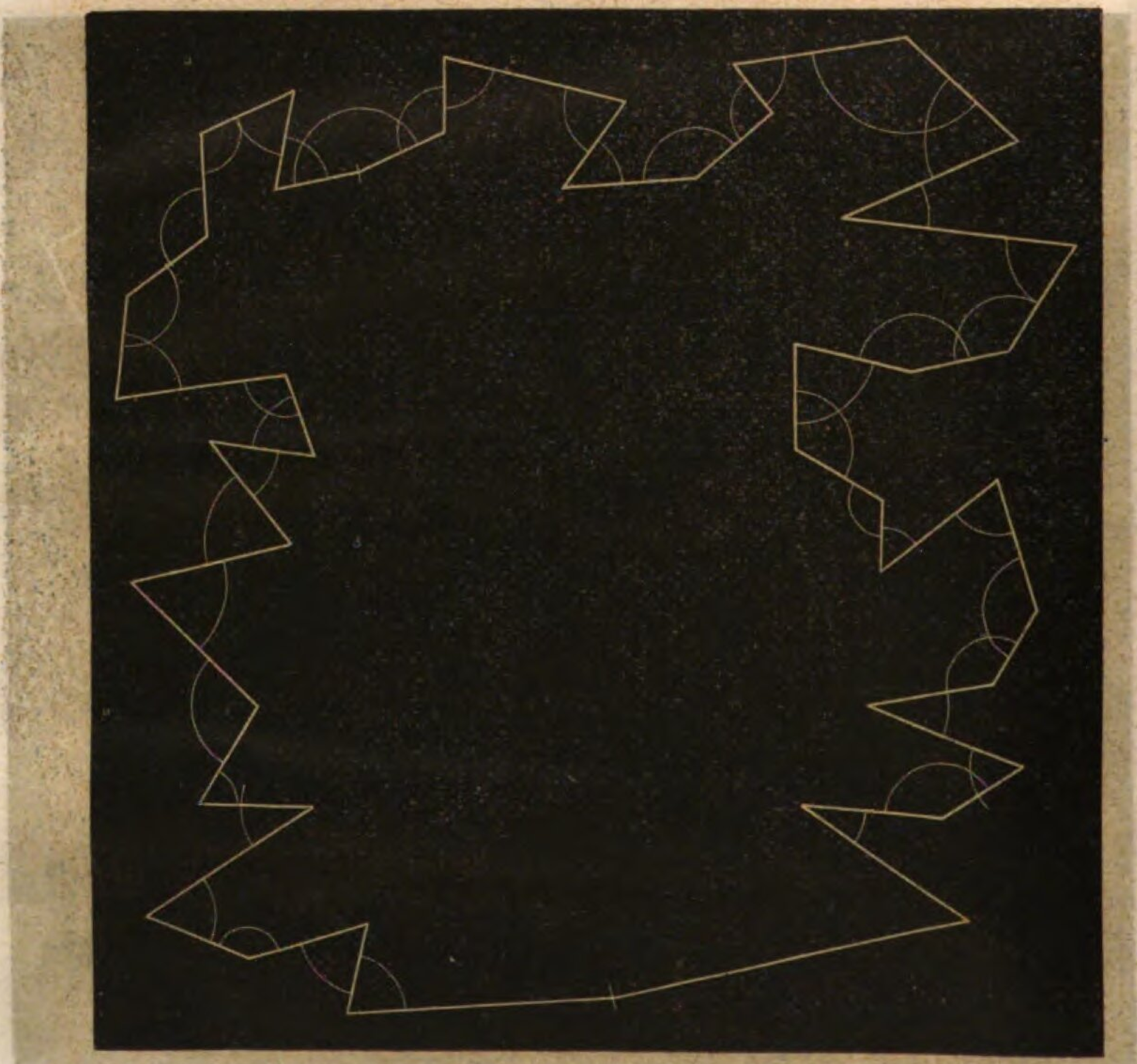


4) Ein Sechsunddreißigeck! *(b)*

=

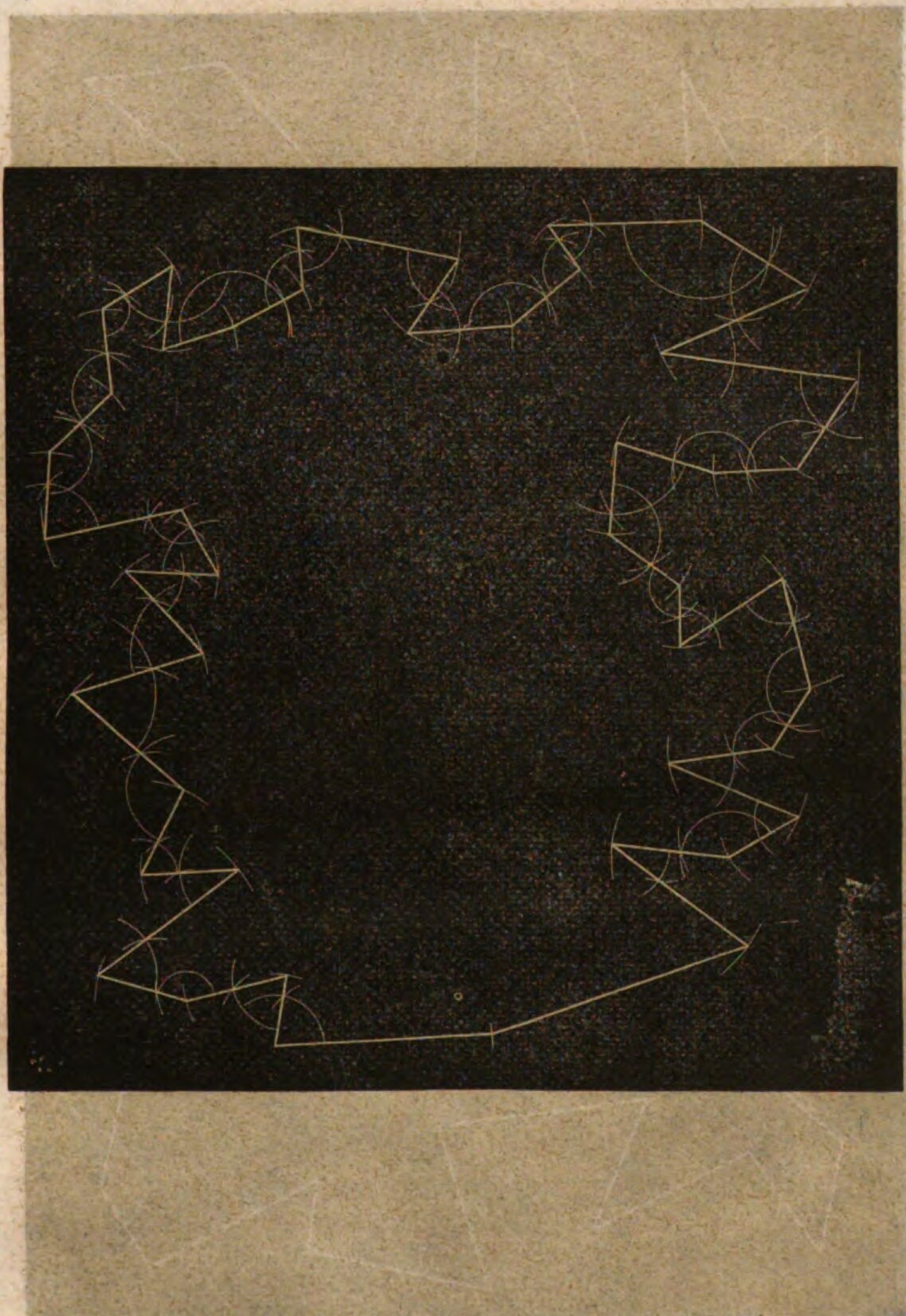


5) Ein Fünfundvierzigeck! *(a)*

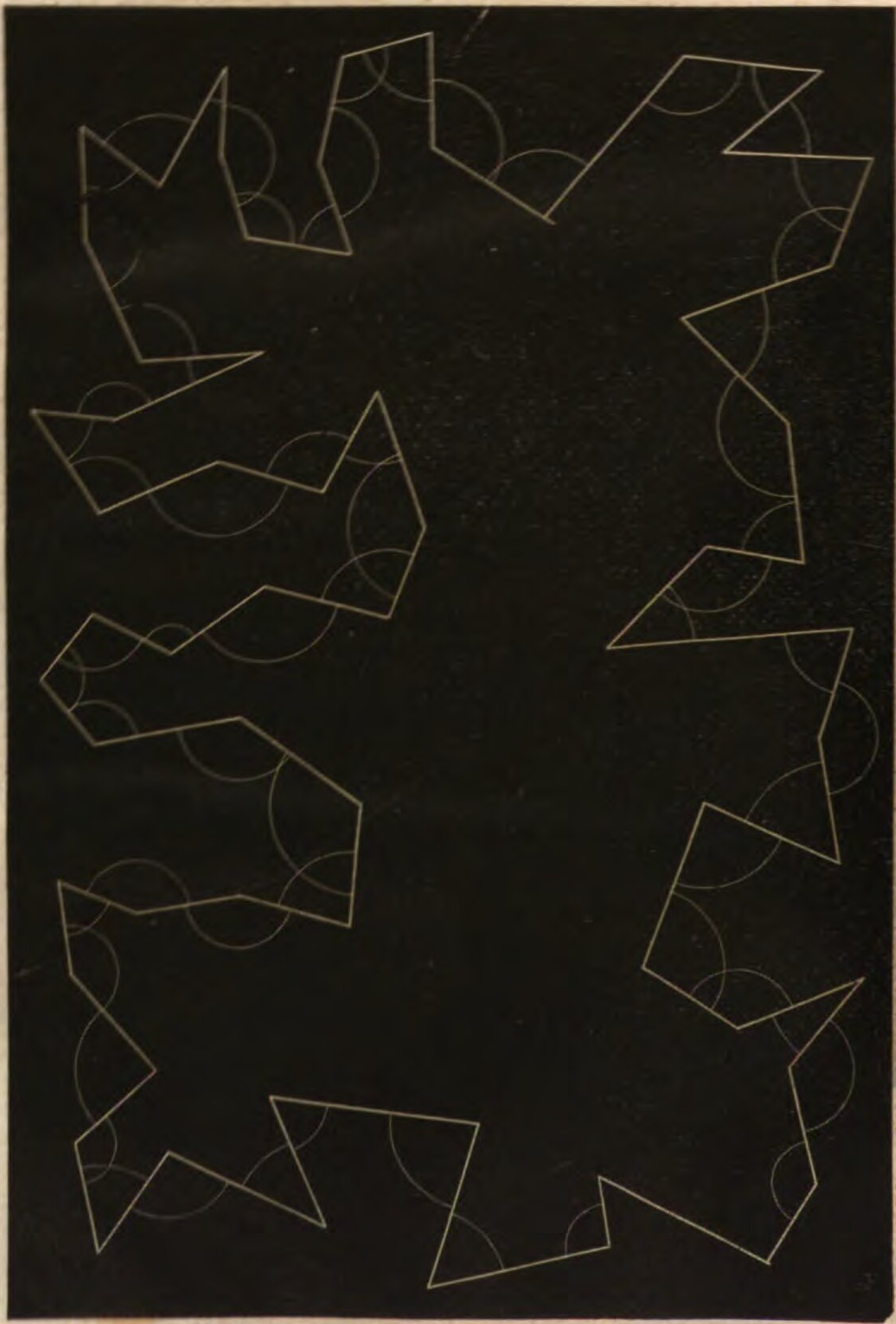


=

5) Ein Fünfundvierzigeck! *(b)*

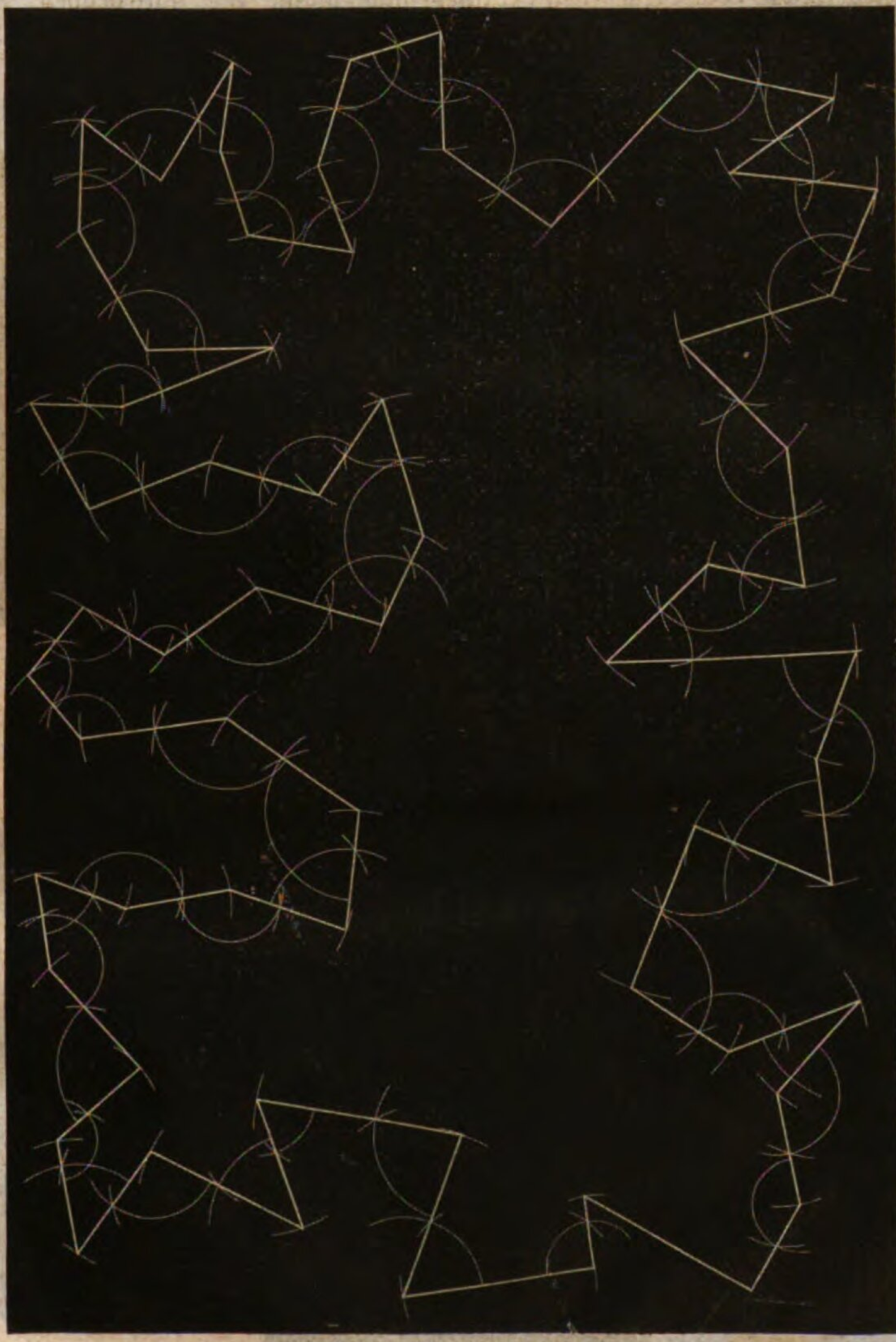


6) Ein Vierundsechszigeck! *(a)*



6) Ein Vierundsechszigeck! (*b*)

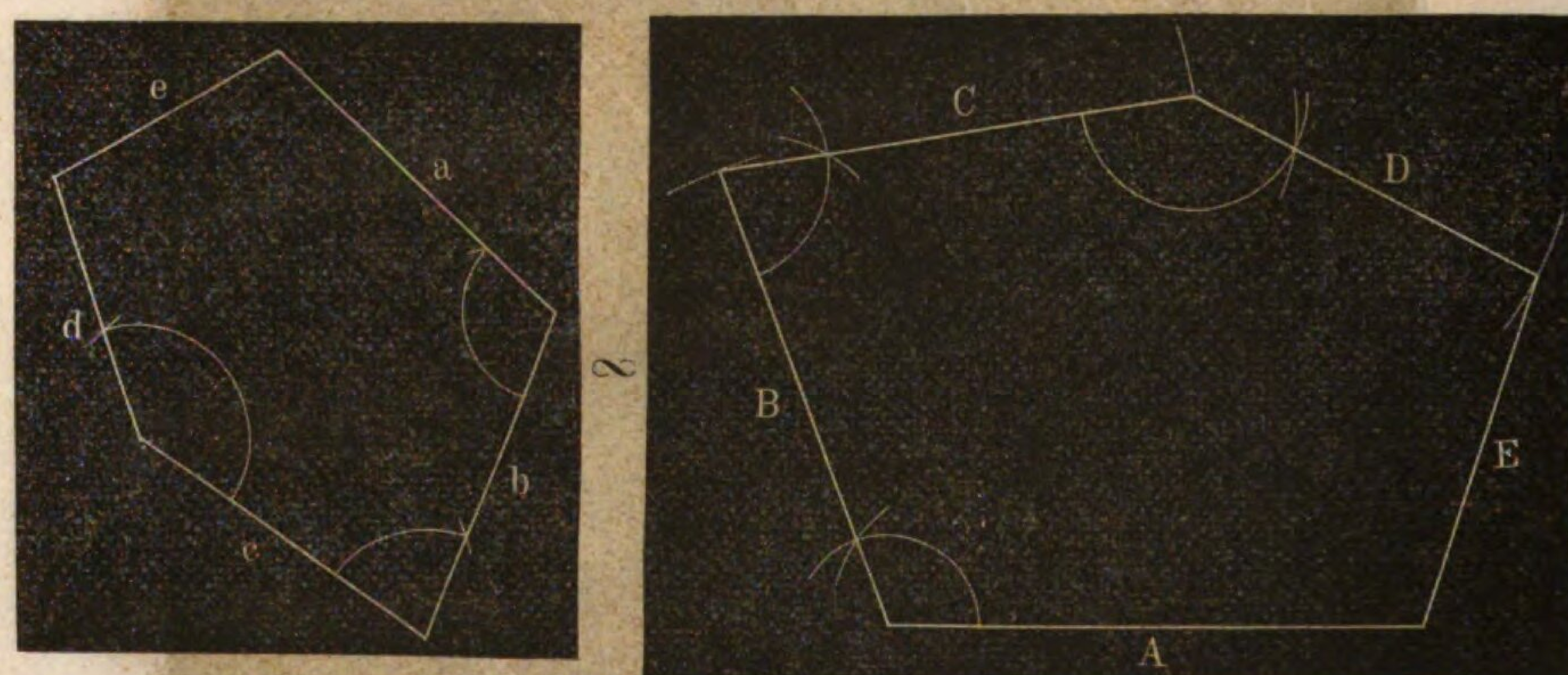
=



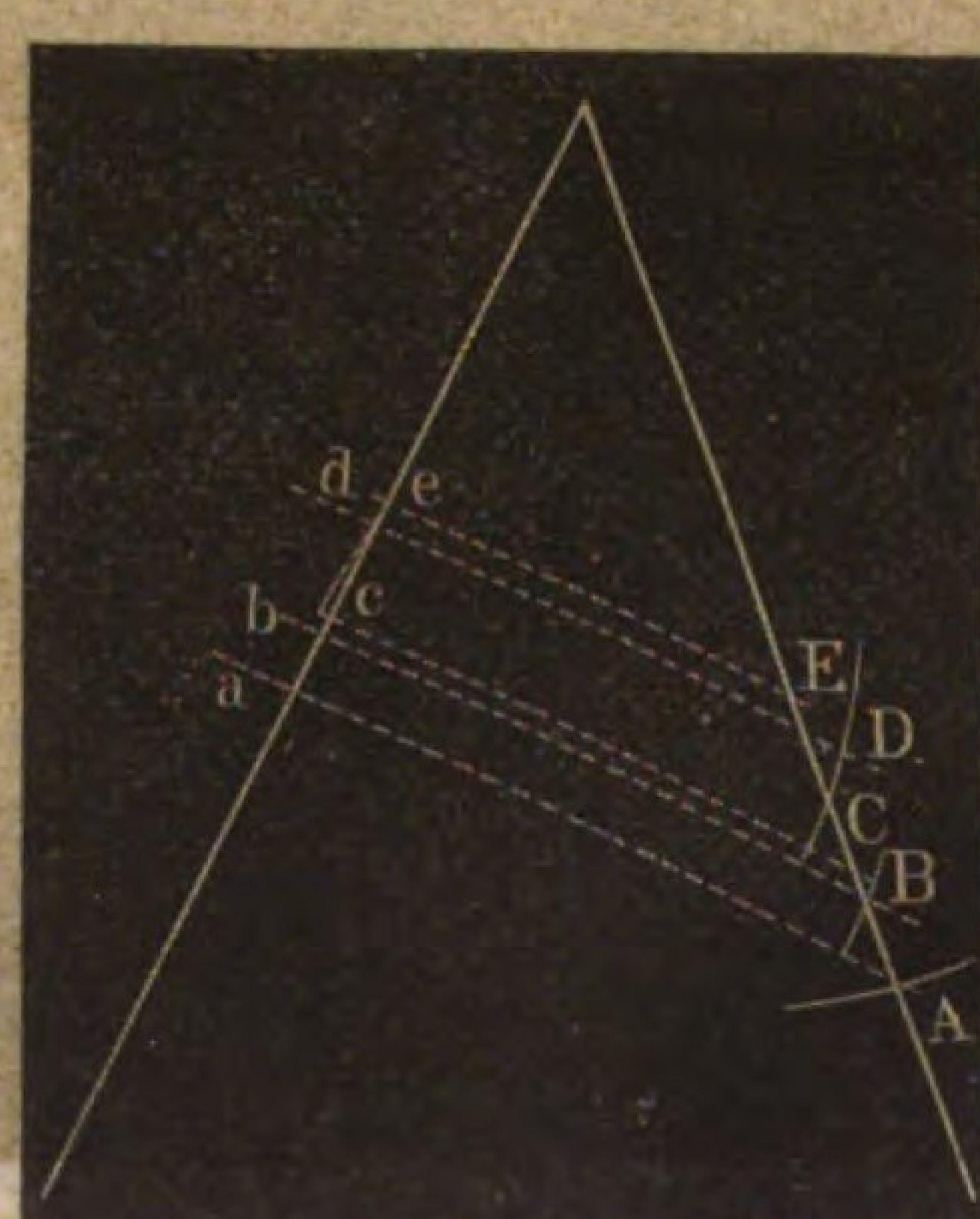
IV. Zeichne das vorgeschriebene Fünfeck nach dem Verhältniß von a : A ähnlich nach.

Auflösung:

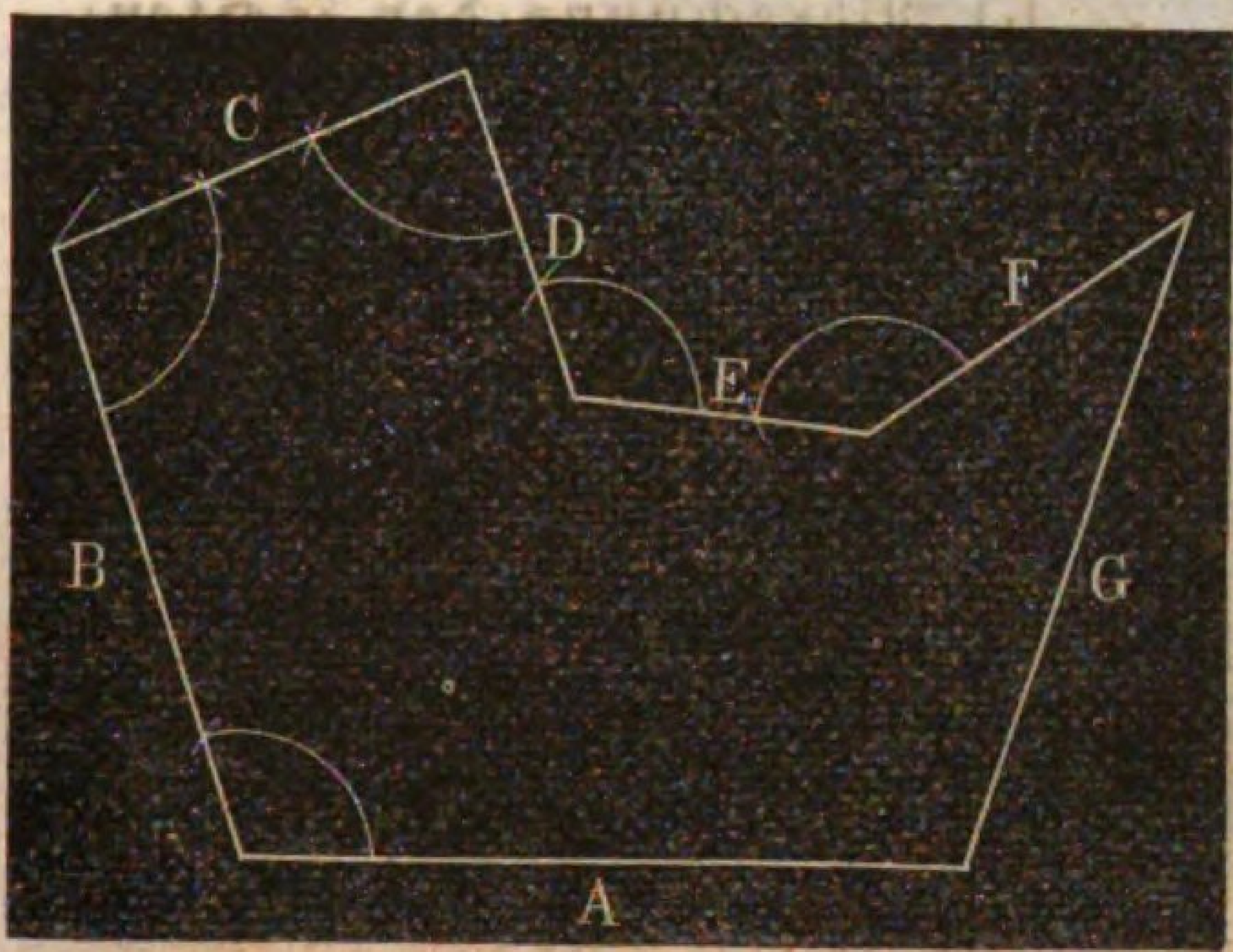
Uebertrage die gegebenen Winkel und mache die anliegenden Seiten nach §. 3 Aufgabe V ähnlich.



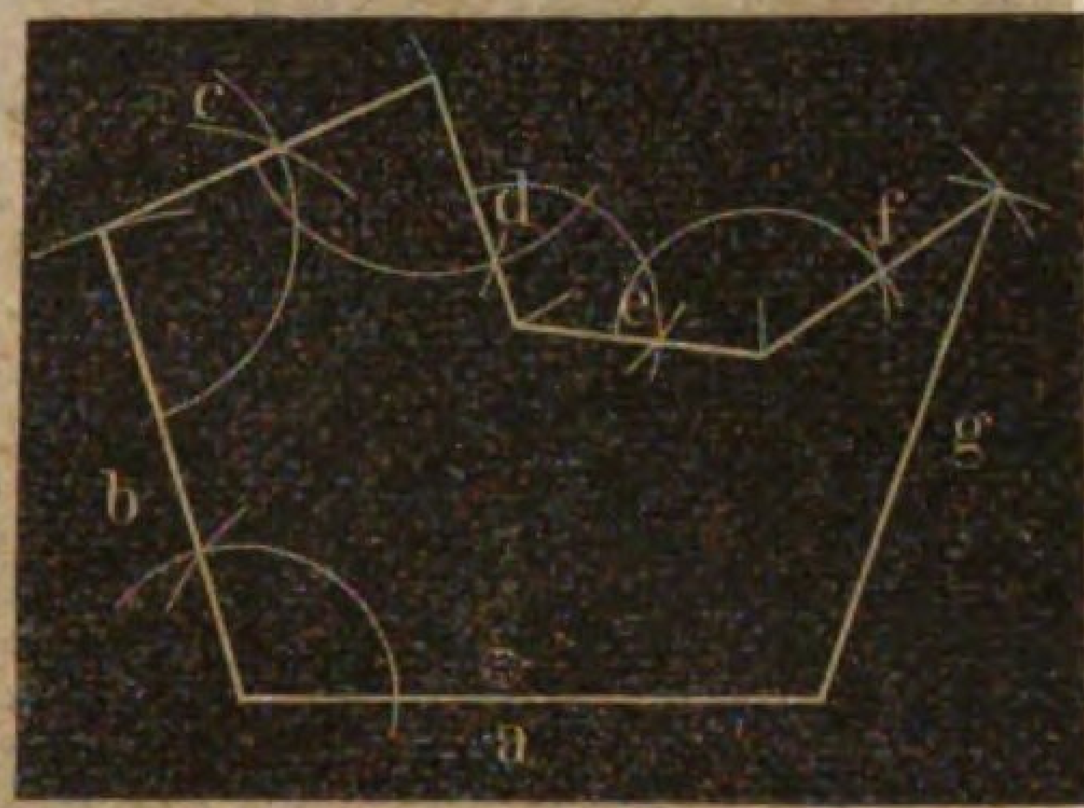
Zeichnung der Seiten.



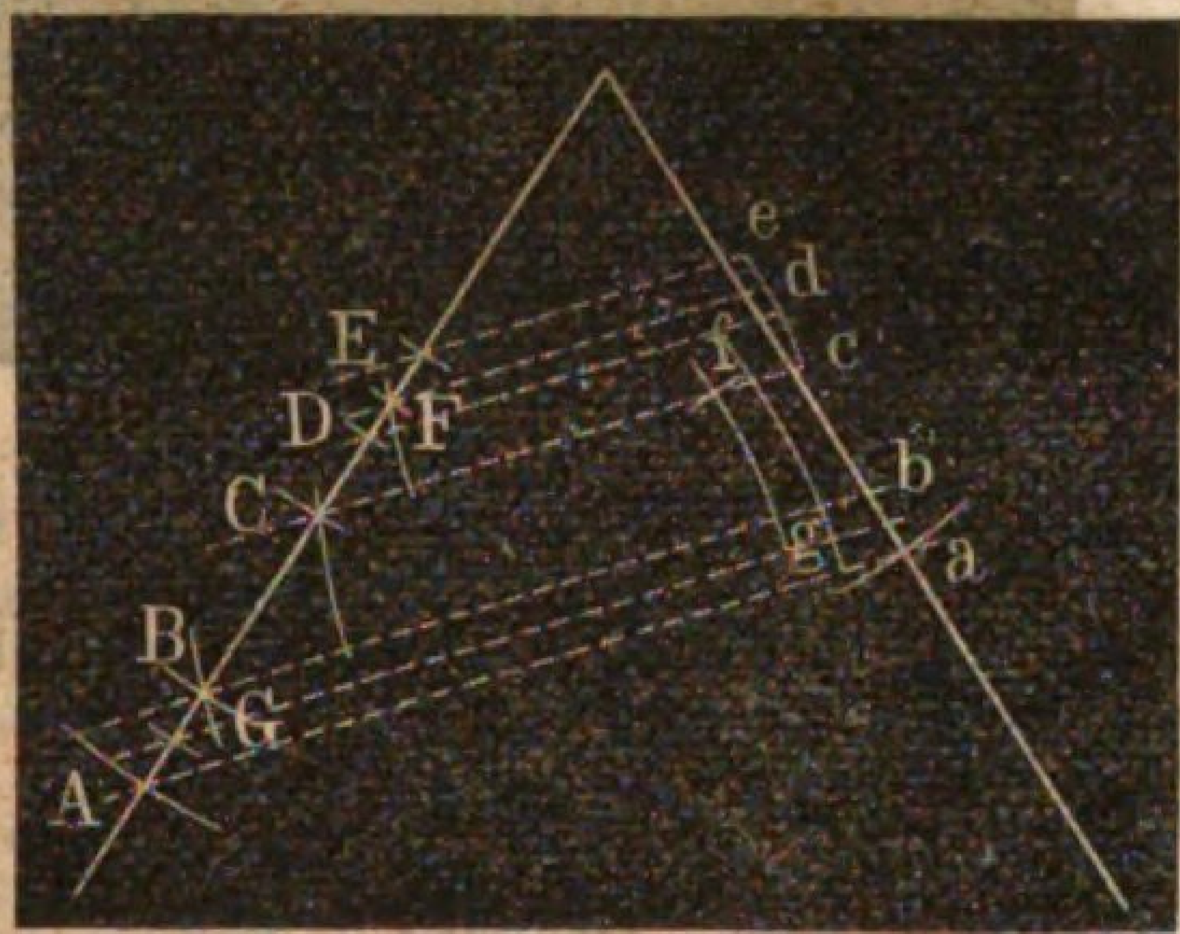
2) Zeichne das gegebene Siebeneck nach dem Verhältniß von A : a ähnlich nach.



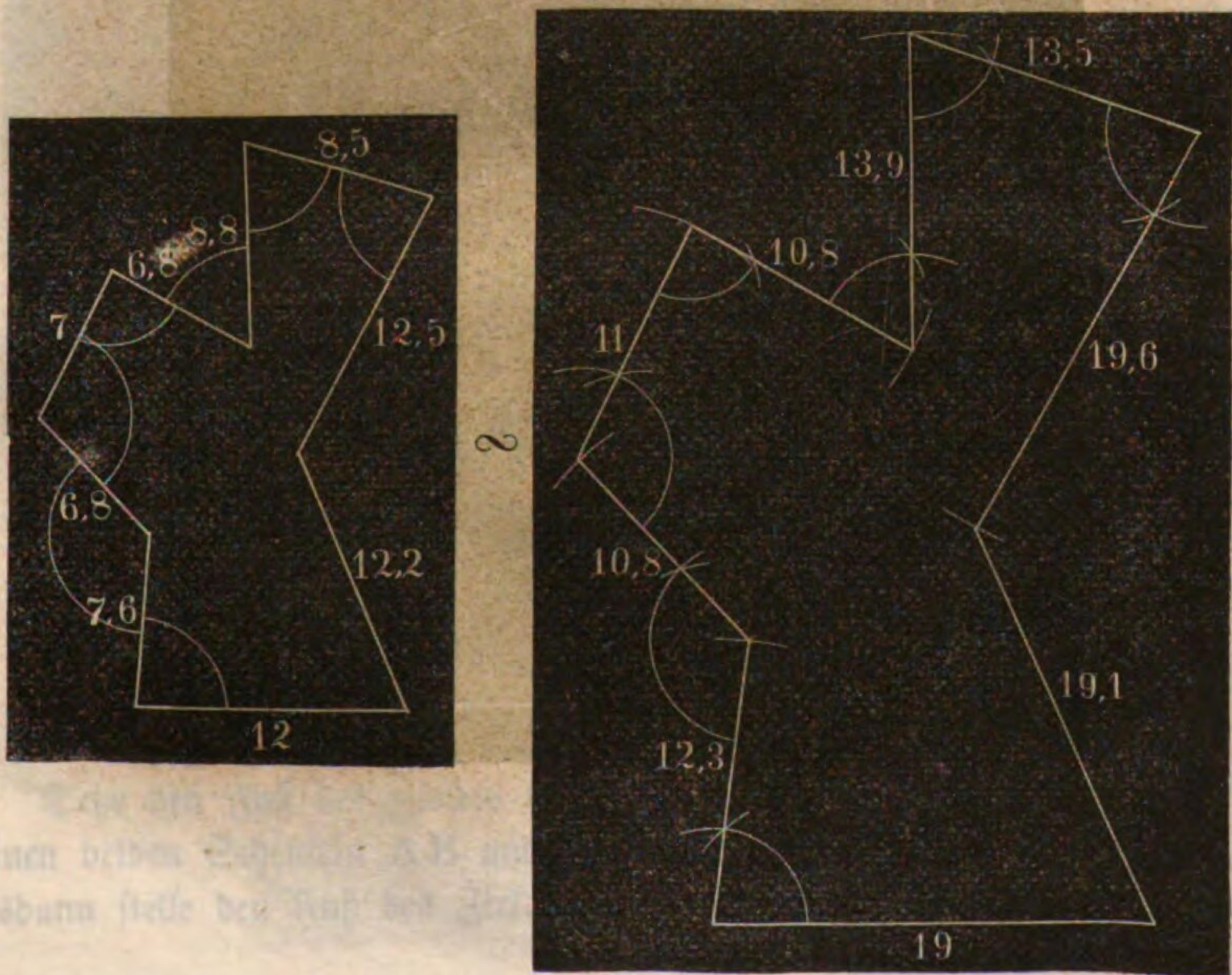
∾



Zeichnung der Seiten.



3) Zeichne das gegebene Neuneck nach dem Verhältniß von 12 : 19.



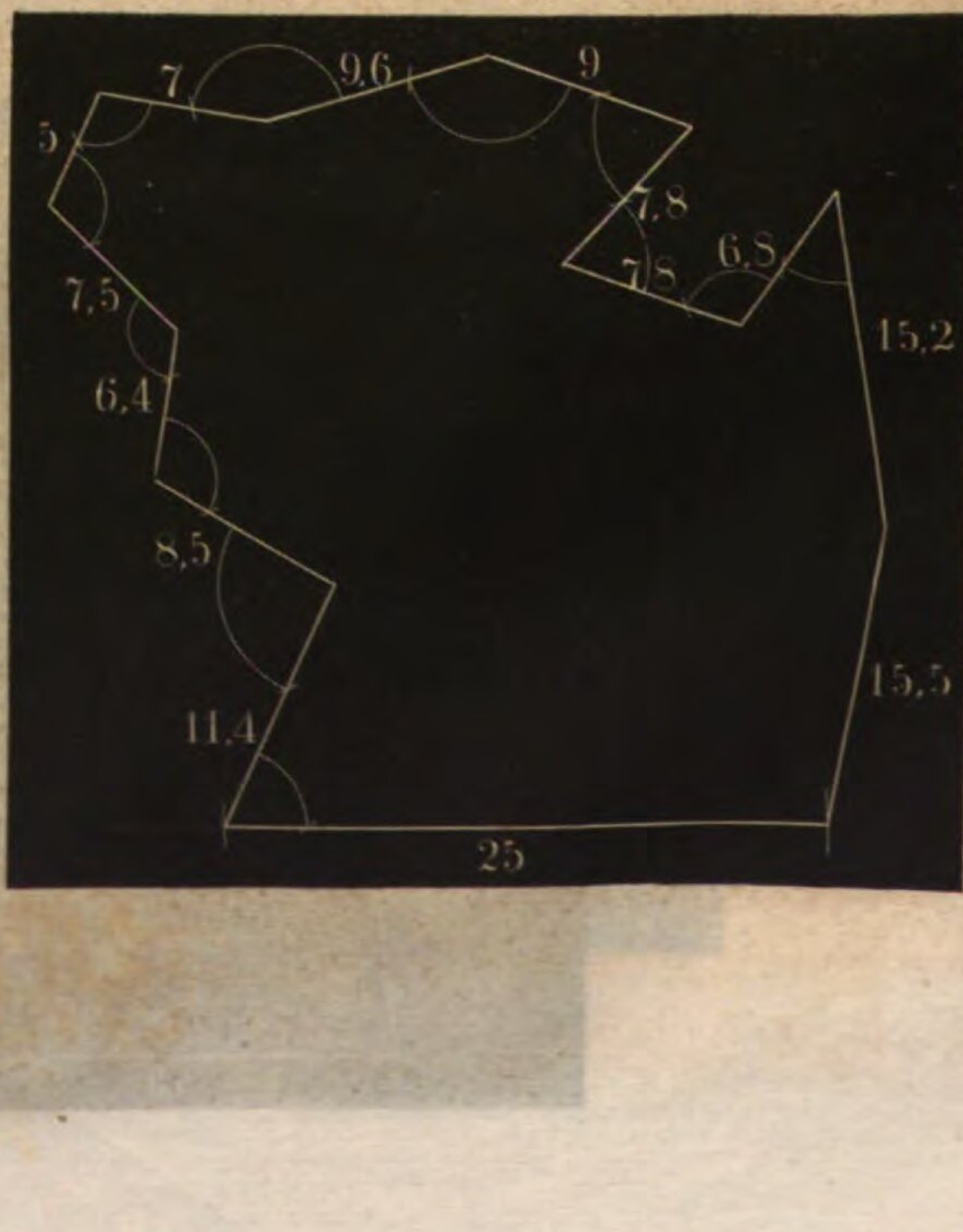
a) Zeichnung der Seiten.



b) Berechnung der Seiten:

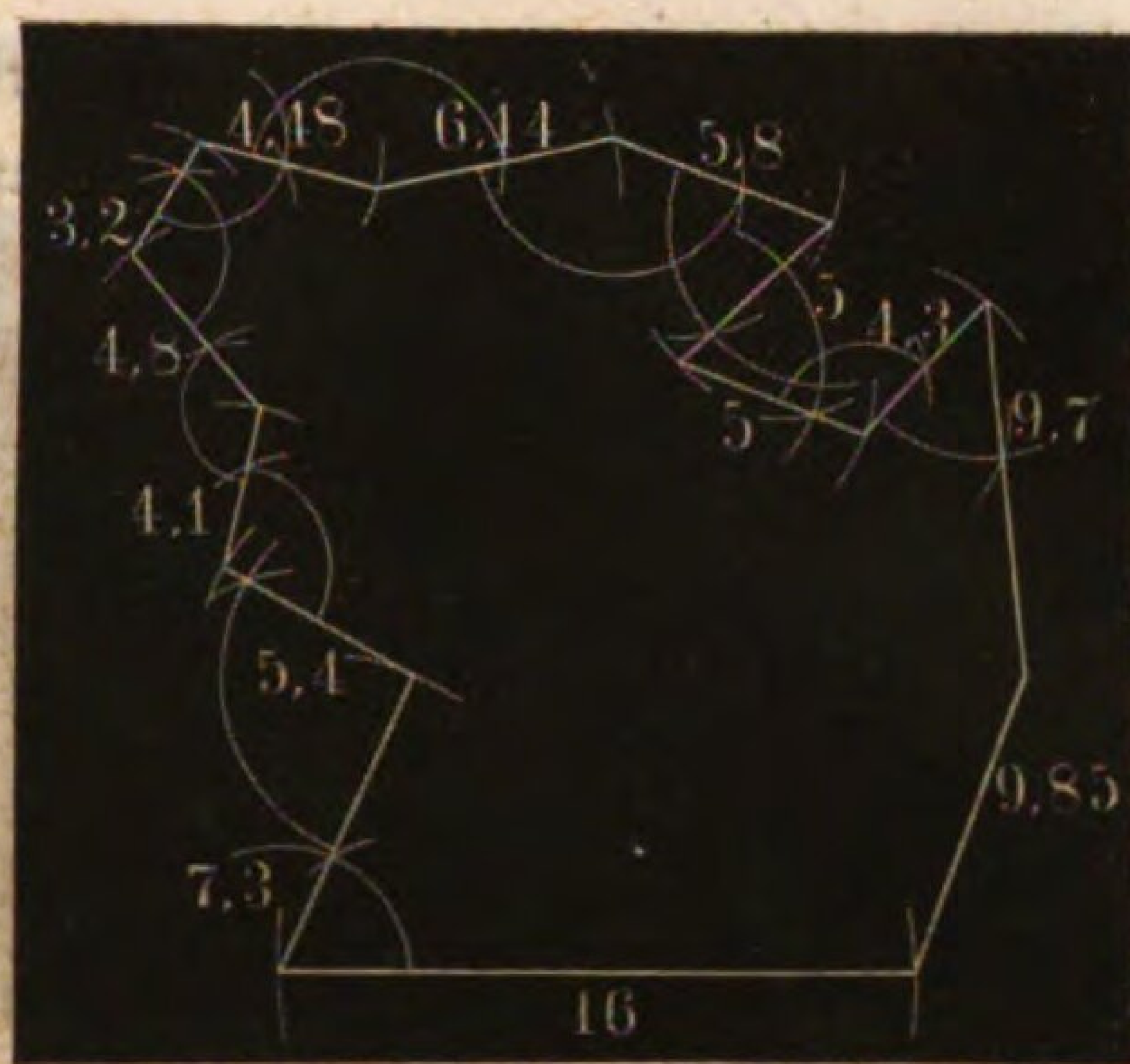
$12 : 19 = 7{,}6 : 12{,}3$
$6{,}8 : 10{,}8$
$7 : 11$
$6{,}8 : 10{,}8$
$8{,}8 : 13{,}9$
$8{,}5 : 13{,}5$
$12{,}5 : 19{,}6$
$12{,}2 : 19{,}1$

4) Zeichne das gegebene Vierzehneck nach dem Verhältniß von 25 : 16 ähnlich nach.



∾

8



a) Zeichnung der Seiten.



b) Berechnung der Seiten.

$25 : 16 = 11_{,4} : 7_{,3}$

$8_{,5} : 5_{,4}$

$6_{,4} : 4_{,1}$

$7_{,5} : 4_{,8}$

$5 : 3_{,2}$

$7 : 4_{,48}$

$9_{,6} : 6_{,14}$

$9 : 5_{,8}$

$7_{,8} : 5$

$7_{,8} : 5$

$6_{,8} : 4_{,3}$

$15_{,2} : 9_{,7}$

$15{,}5 : 9_{,85}$

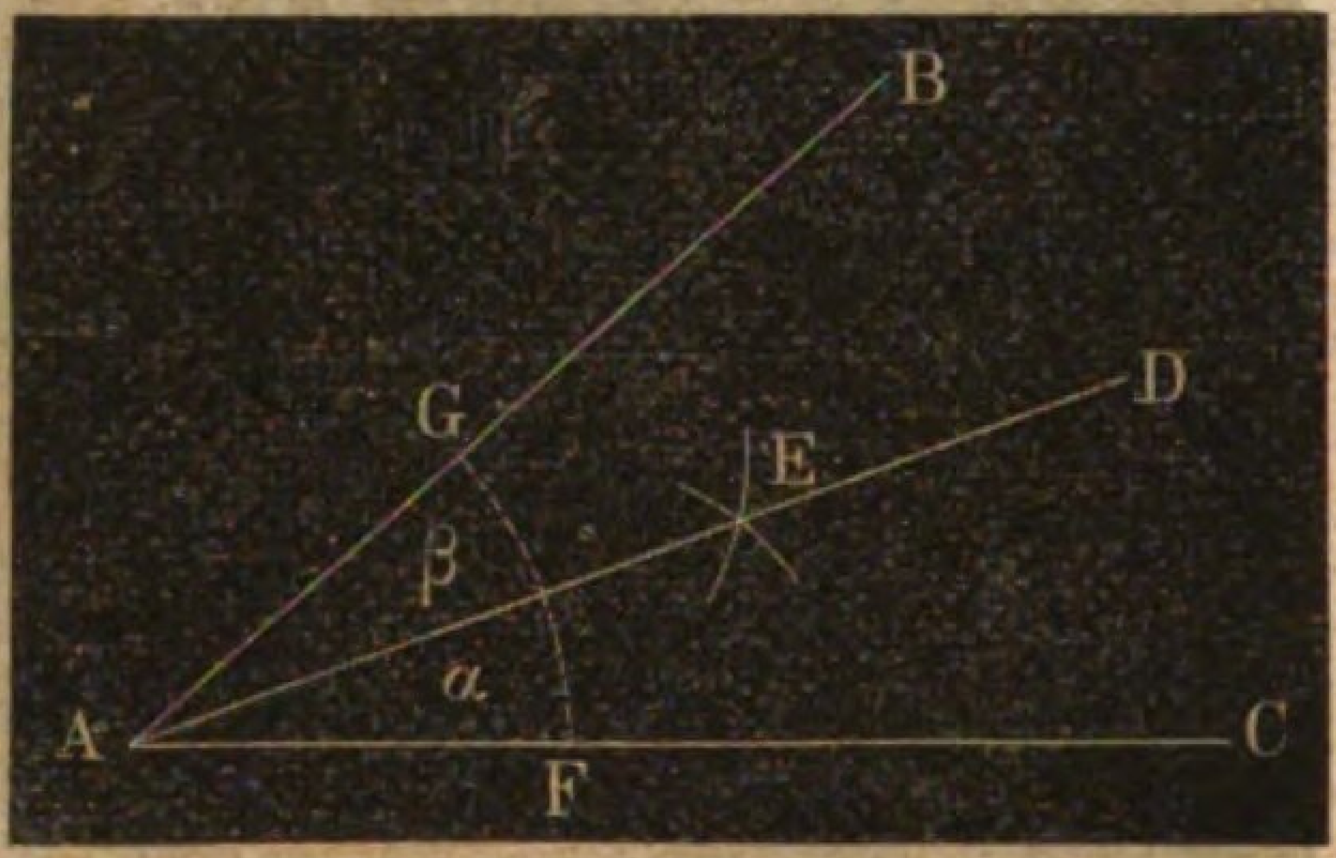
V. Theile einen Winkel in 2, 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Theile.

1) In zwei gleiche Theile.

Auflösung:

Setze den Fuß des Zirkels in den gegebenen Winkel A und schneide von seinen beiden Schenkeln AB und AC zwei gleiche Stücke AF und AG ab; alsdann stelle den Fuß des Zirkels in F und G und schlage 2 sich schneidende

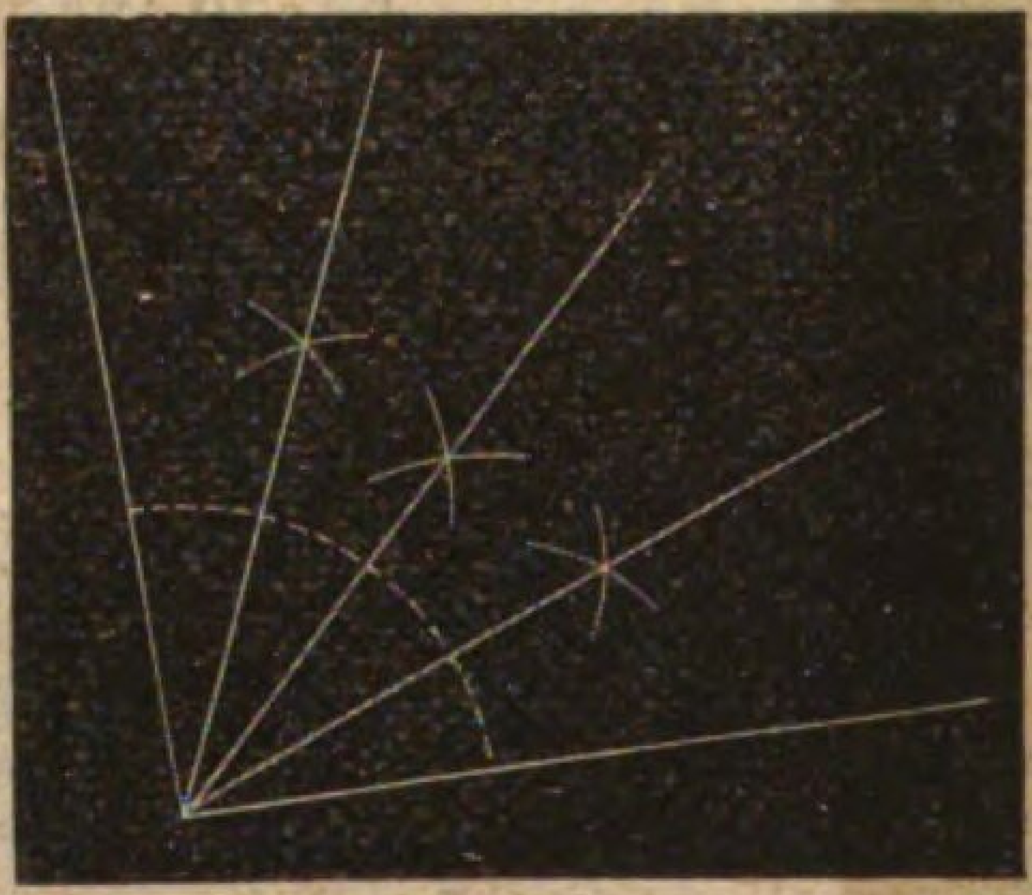
Kreisbogen; endlich ziehe aus A durch den Durchschnittspunkt E die gerade Linie AD, so wird der Winkel BAC dadurch halbirt und Winkel $\alpha = \beta$.



2) In vier gleiche Theile.

Auflösung:

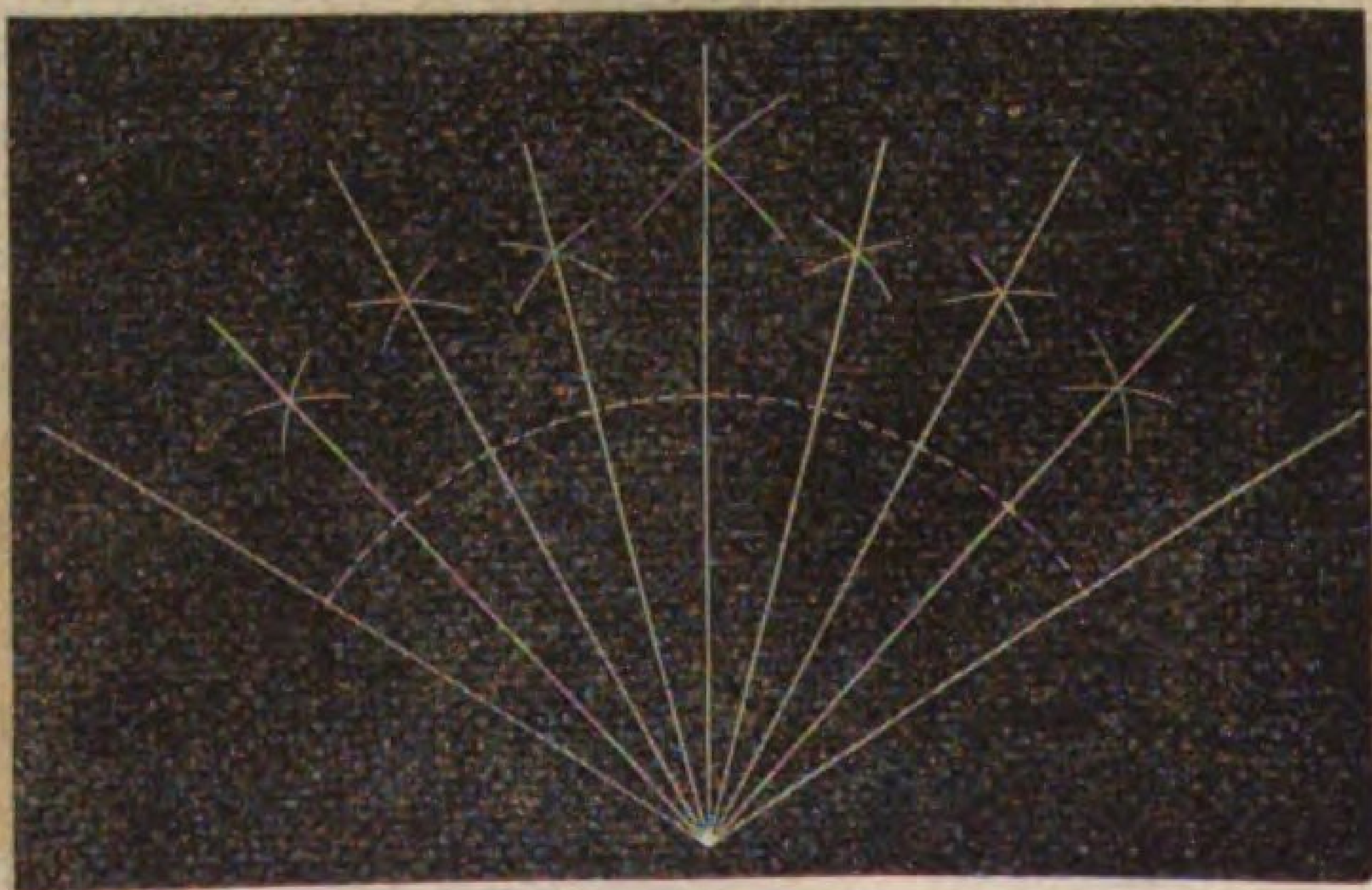
Theile den gegebenen Winkel erst in zwei gleiche Theile und halbire sodann die Hälften.



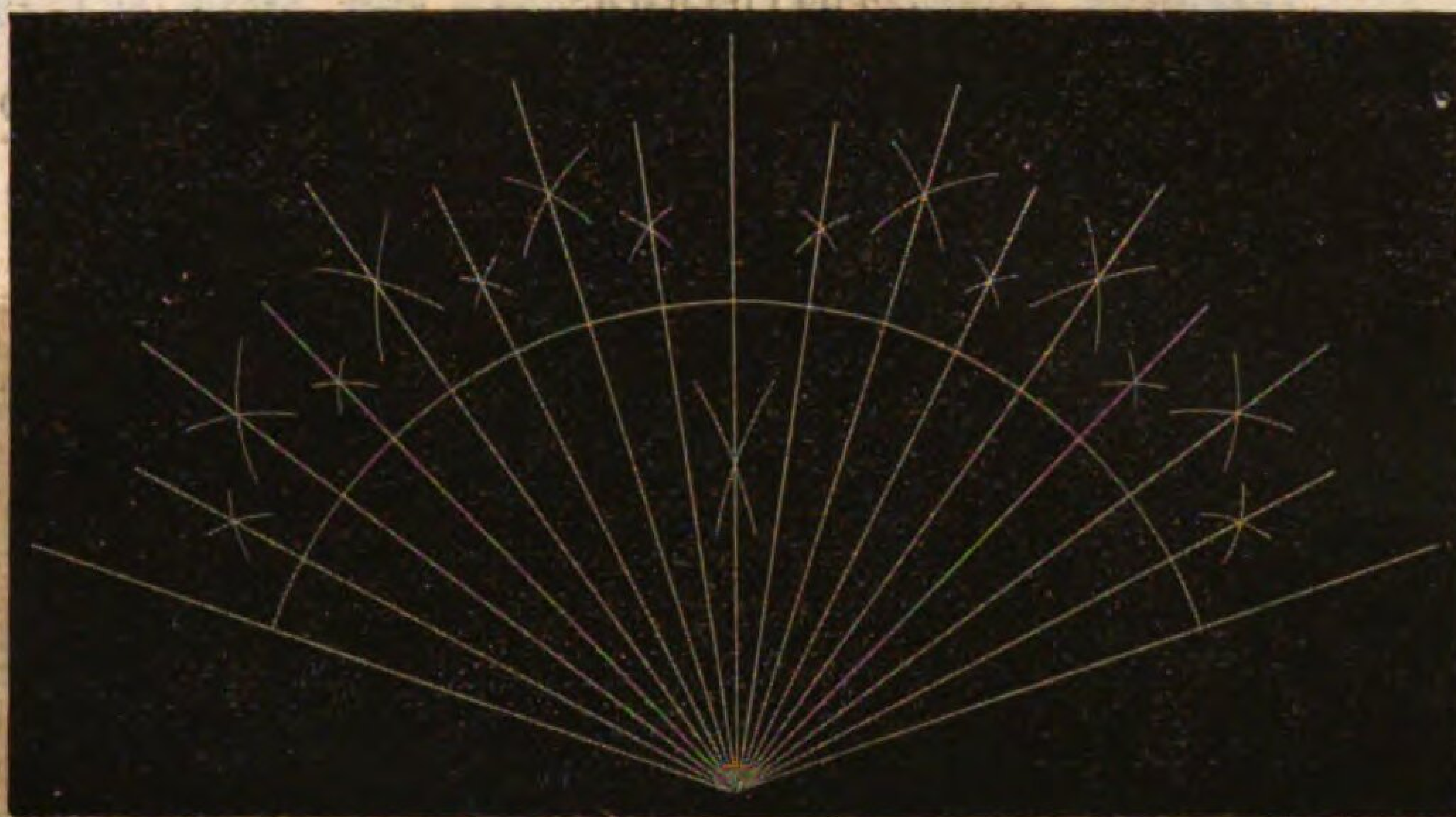
3) In acht gleiche Theile.

Auflösung:

Halbire erst den gegebenen Winkel, dann die Hälften und endlich die Viertel, so werden dadurch die acht gleichen Winkel gewonnen.



4) In sechszehn gleiche Theile.



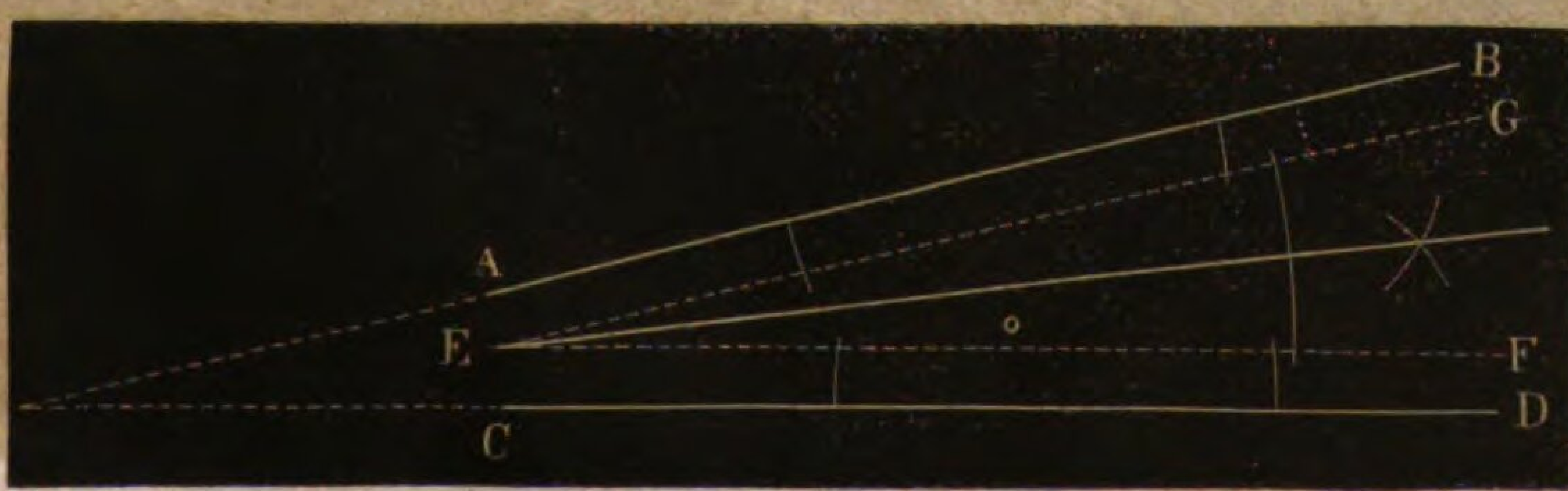
Anmerkung: Die Aufgabe, einen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, ist bis jetzt noch von keinem Mathematiker gelöst worden, da man keinen Bogen in drei gleiche Theile theilen kann, sondern nur die Sehne des Bogens.

VI. Theile einen Winkel in 2, 4 und 8 gleiche Theile, dessen Scheitelpunkt unzugänglich ist.

1) In zwei gleiche Theile.

Auflösung:

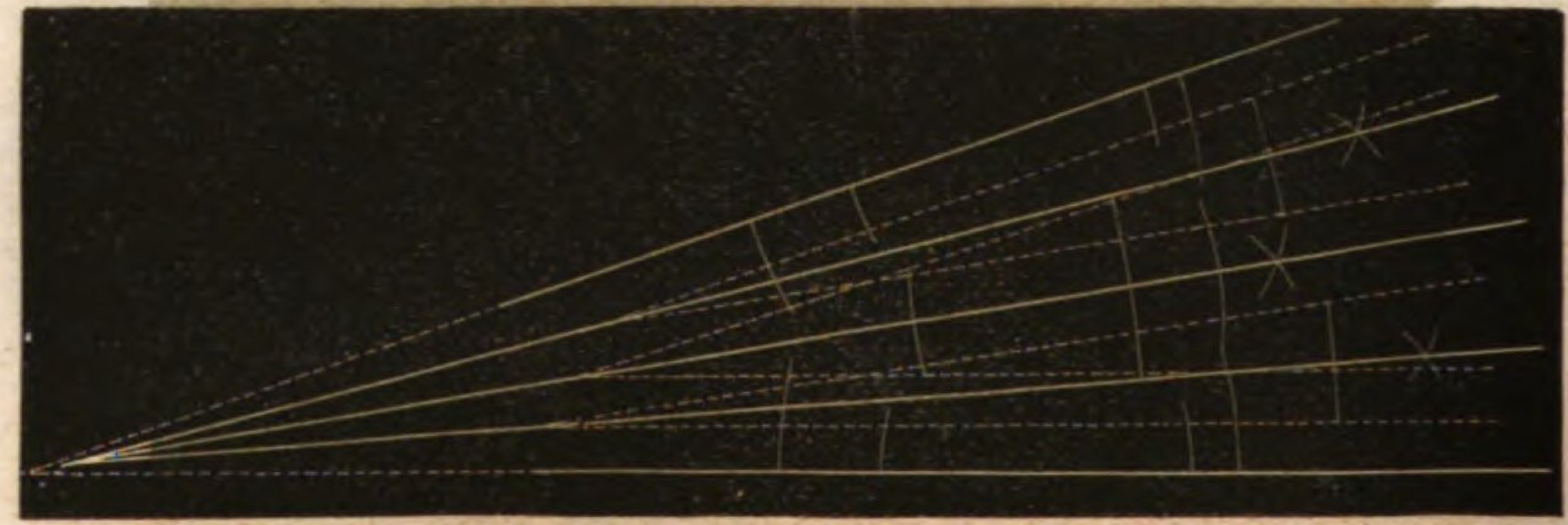
Es seien AB und CD die Schenkel des Winkels; man ziehe dazu in gleicher Entfernung zwei Parallelen GE und FE, durch deren Verlängerung man in E den Scheitel erhält, so daß der Winkel GEF und mit ihm der unzugängliche Winkel halbirt werden kann.



2) In vier gleiche Theile.

Auflösung:

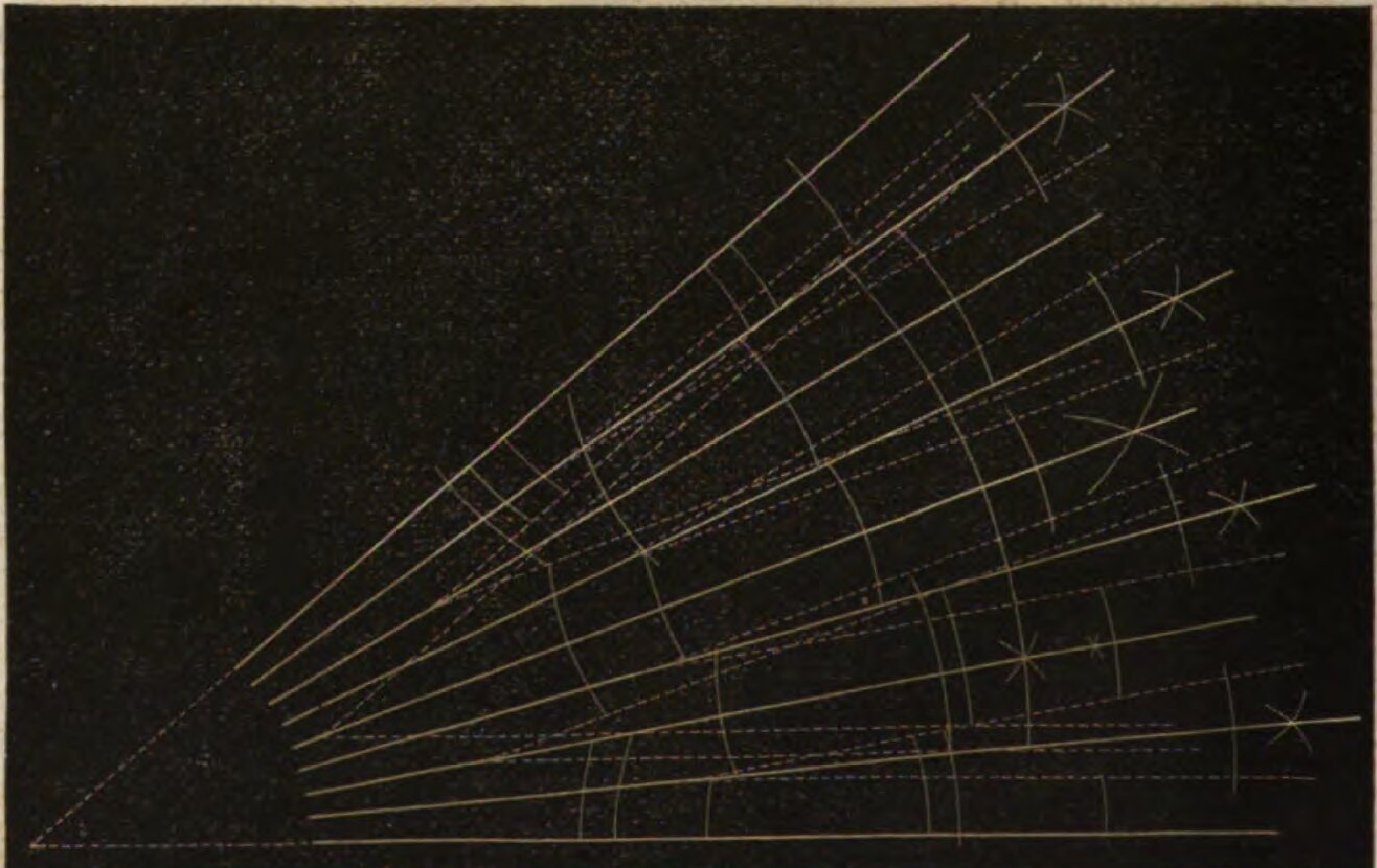
Theile den unzugänglichen Winkel erst in zwei gleiche Theile und halbire nach der gegebenen Auflösung die erhaltenen Hälften.



3) In acht gleiche Theile.

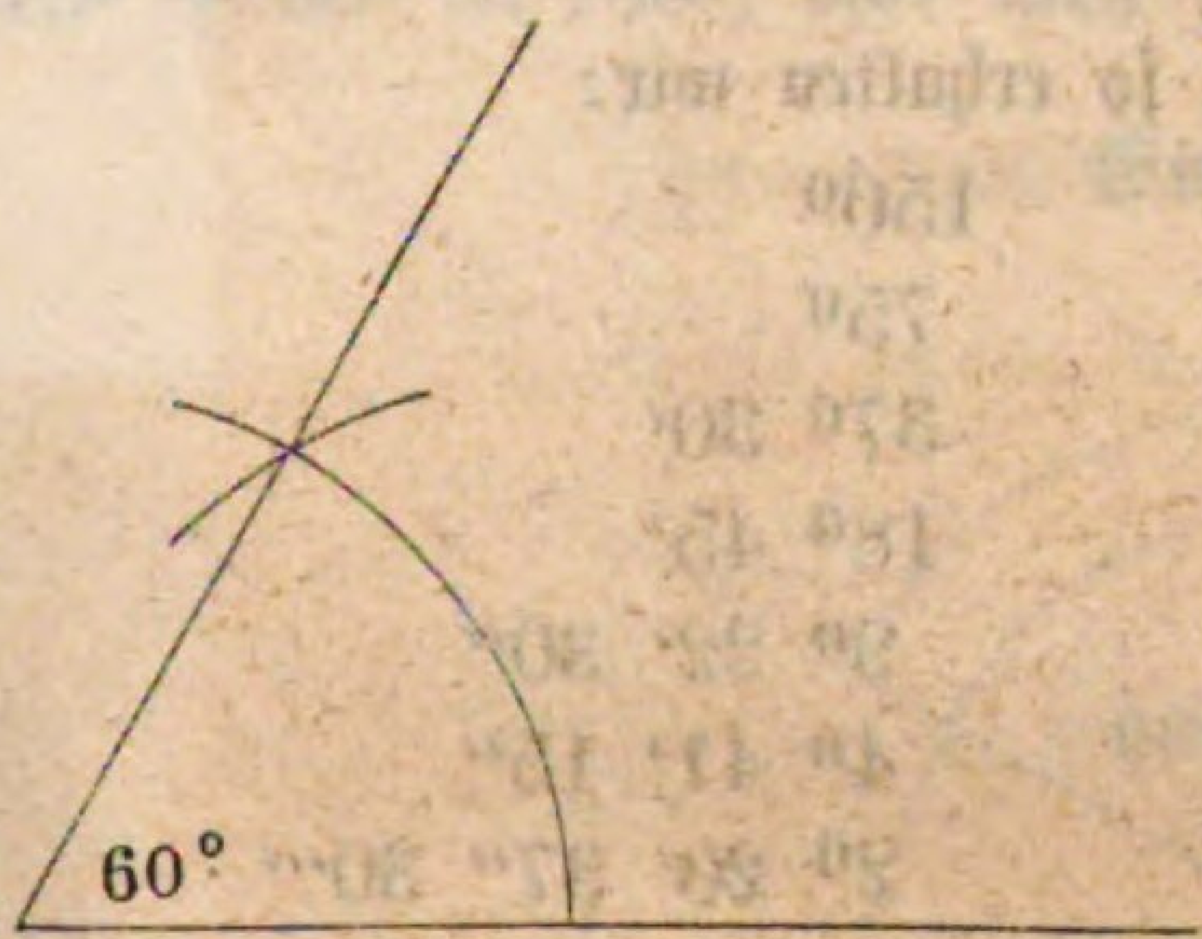
Auflösung:

Halbire erst den unzugänglichen Winkel, dann die Hälften und endlich die Viertel.

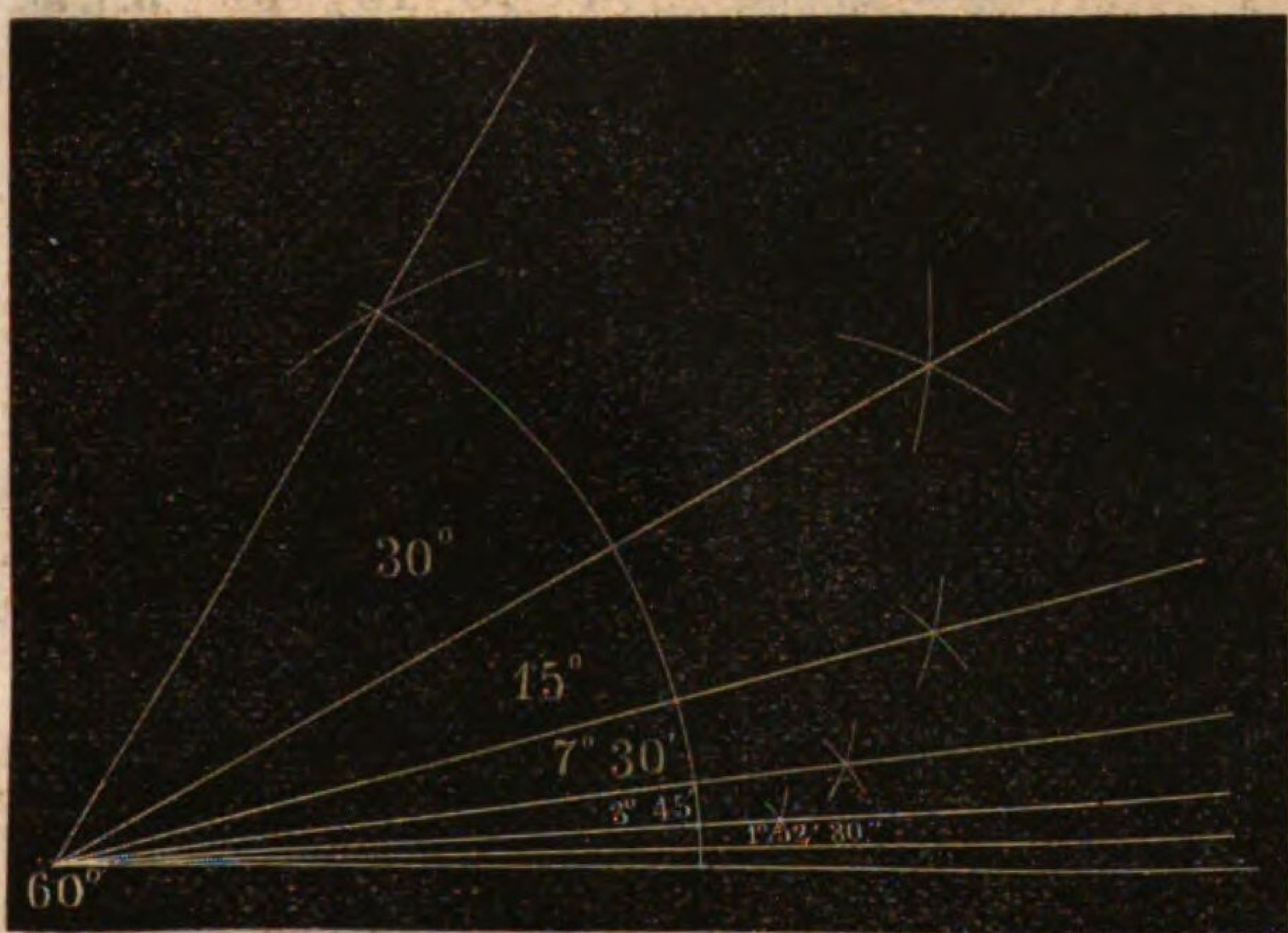


VII. Jeden verlangten Winkel ohne Transporteur mathematisch zu zeichnen.

1) Die ältere, nur annäherungsweise richtige Methode:

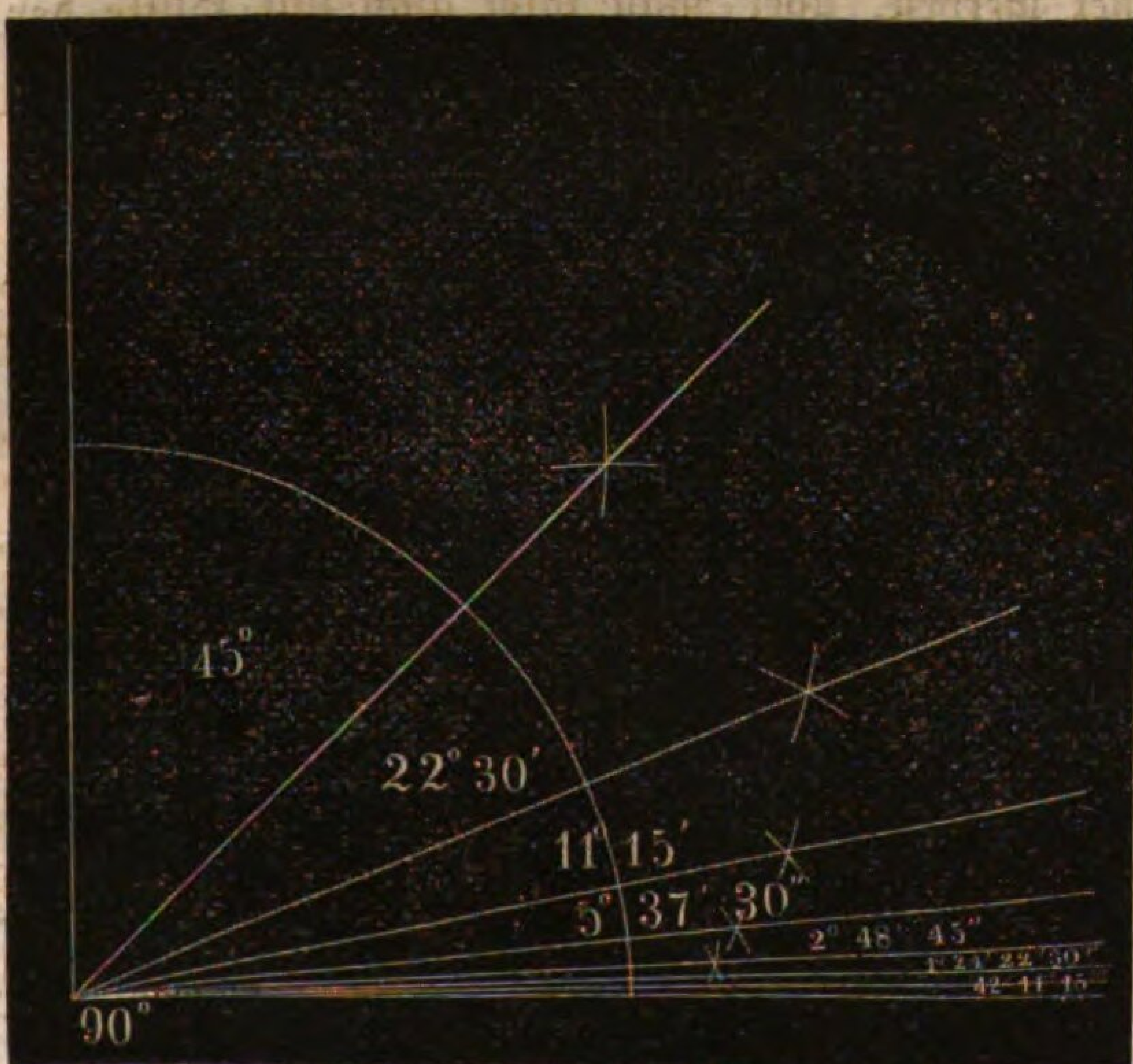


Einen spitzen Winkel von 60⁰ können wir nach dem ältesten geometrischen Satze des Thales, welcher lautet: Der Radius eines Kreises geht sechsmal in die Peripherie, mathematisch zeichnen.



Halbire ich diesen spitzen Winkel, so erhalte ich:

60⁰
30⁰
15⁰
7⁰ 30′
3⁰ 45′
1⁰ 52′ 30″ u. s. w.



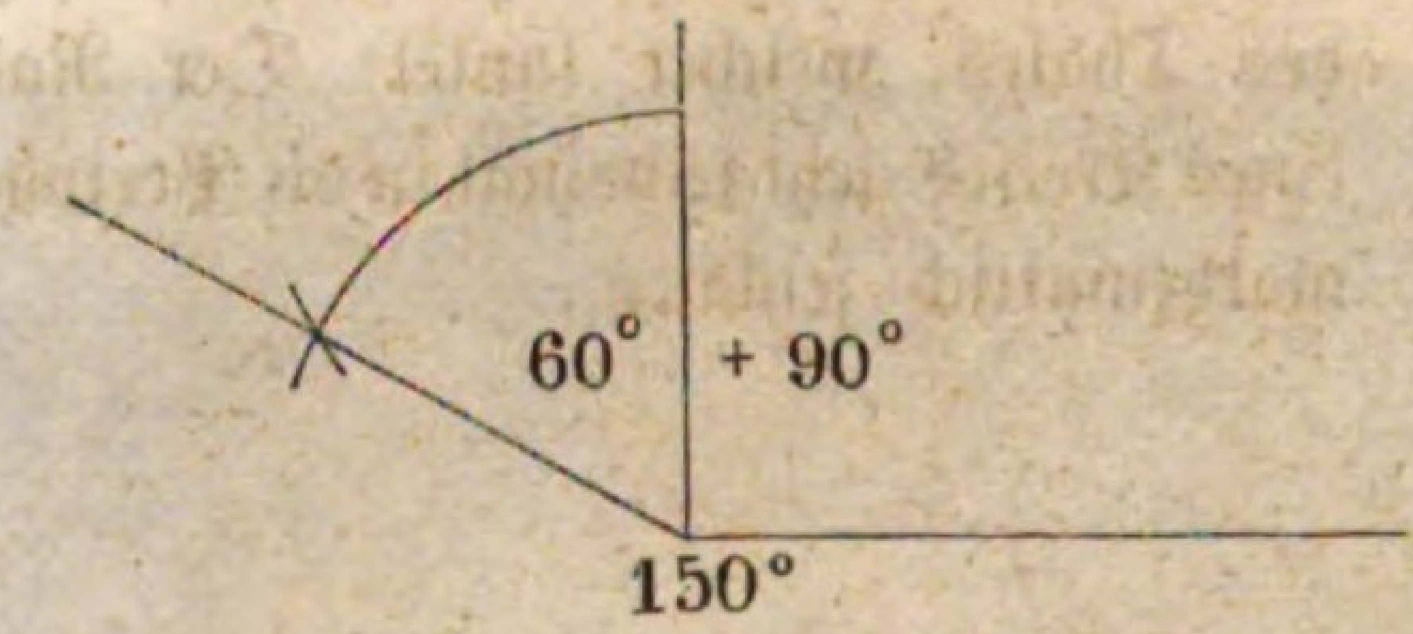
Ebenso können wir einen rechten Winkel ohne Transporteur zeichnen, indem wir zwei gerade Linien senkrecht auf einander setzen.

Wird dieser rechte Winkel halbirt, so erhalten wir folgende Reihe:

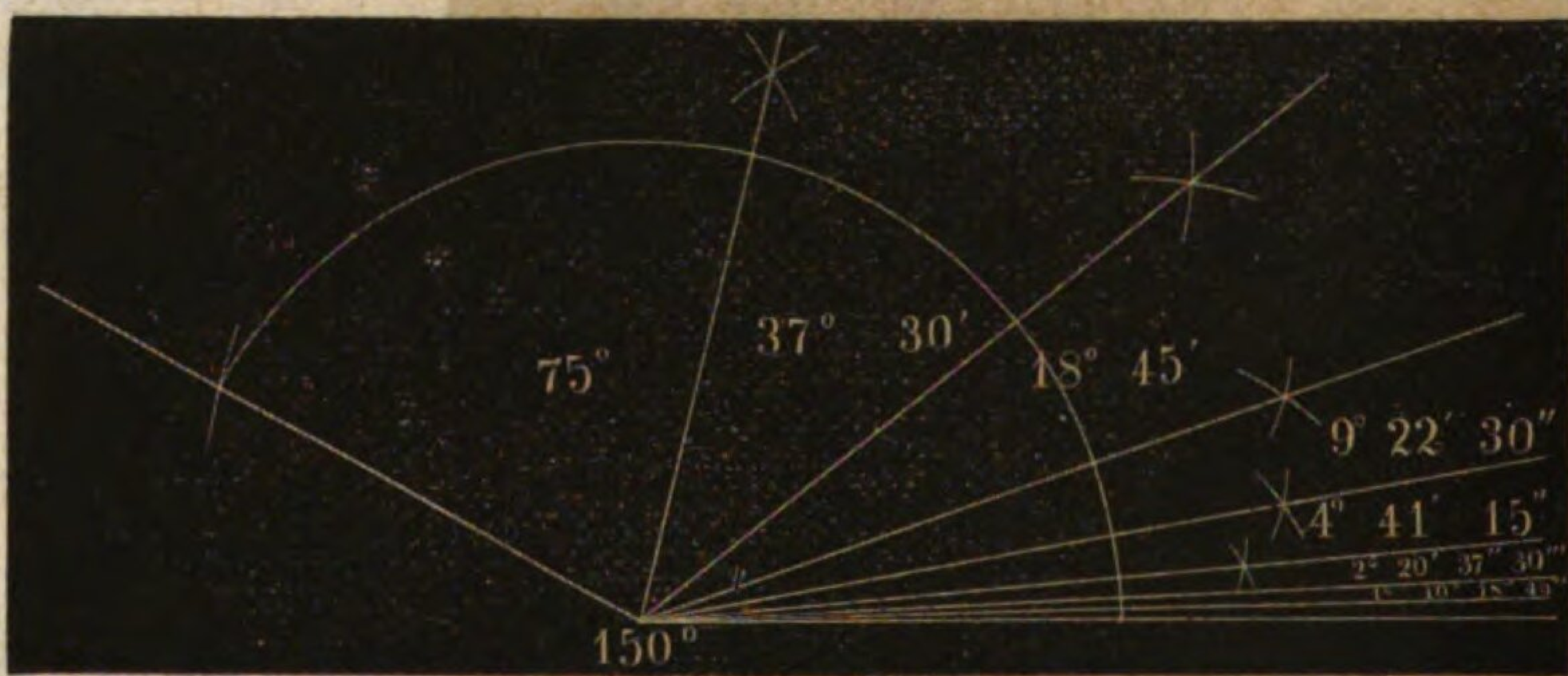
90⁰
45⁰
22⁰ 30′
11⁰ 15′
5⁰ 37′ 30″
2⁰ 48′ 45″
1⁰ 24′ 22″ 30‴
0⁰ 42′ 11″ 15‴ u. s. w.

Legen wir nun den rechten Winkel von 90° und den spitzen Winkel von 60° durch geometrische Construction zusammen, so erhalten wir einen stumpfen Winkel von 150°.

Halbiren wir diesen stumpfen Winkel, so erhalten wir:

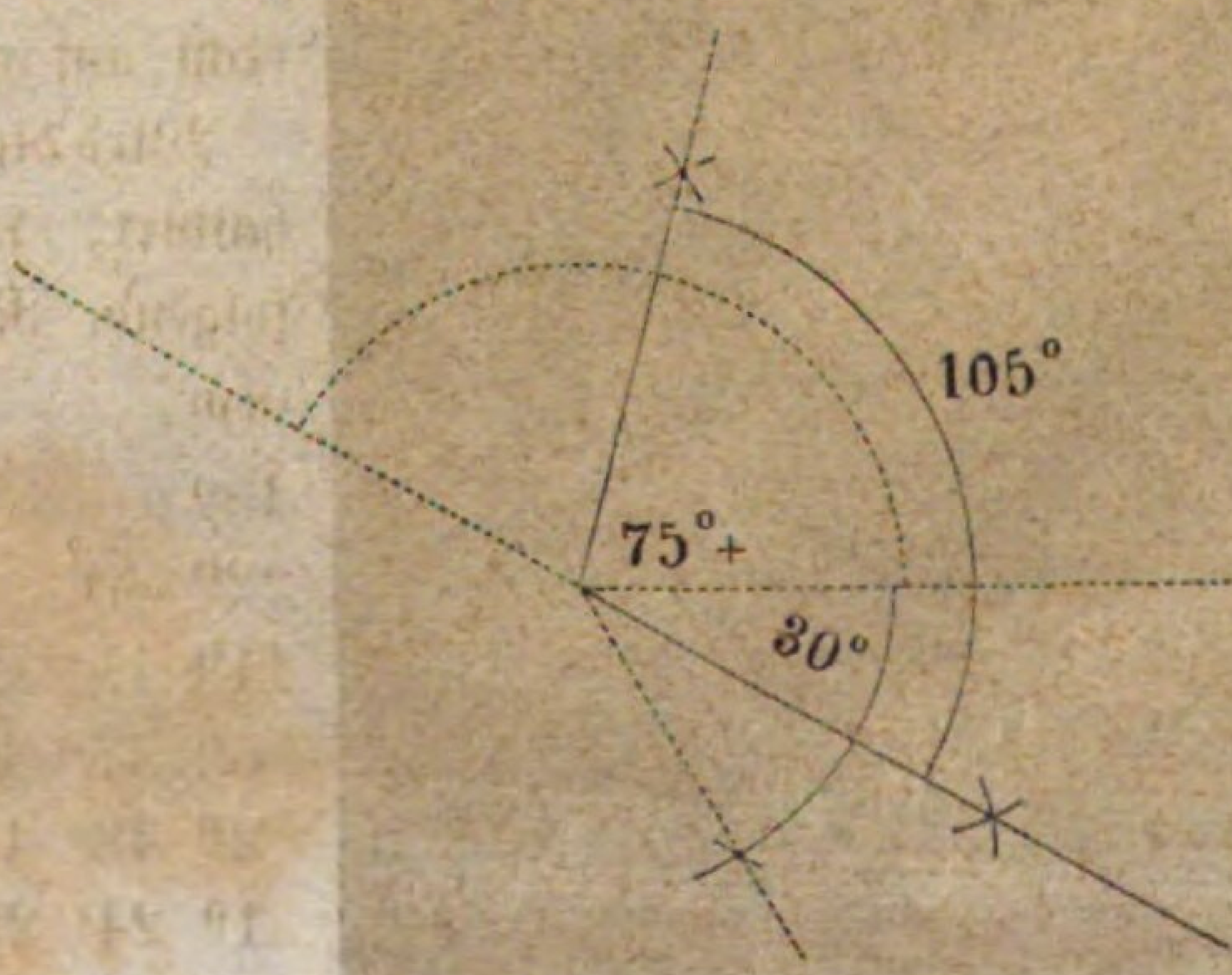


150°
75°
37° 30′
18° 45′
9° 22′ 30″
4° 41′ 15″
2° 20′ 37″ 30‴
1° 10′ 18″ 45‴ u. s. w.



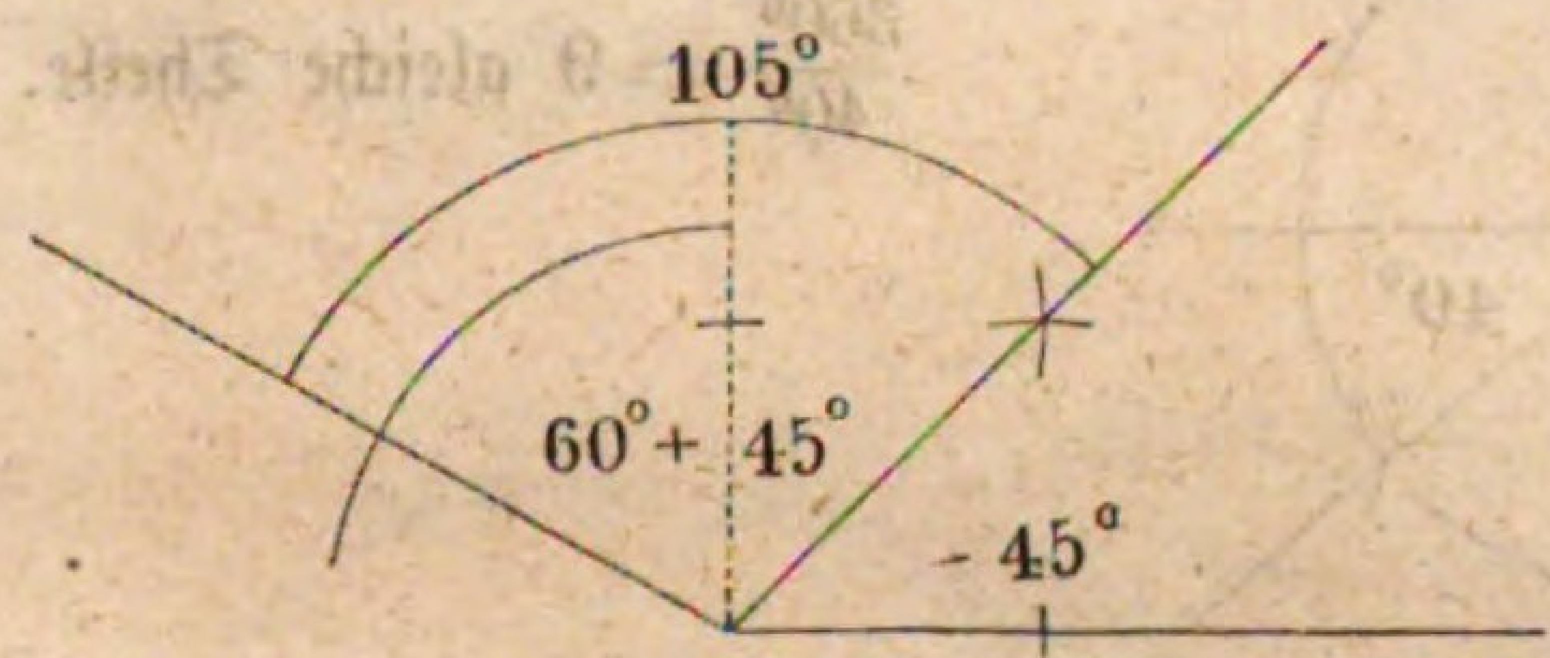
Die eben berechneten und construirten Winkel können also ohne Transporteur mathematisch gezeichnet werden, aber man kann auch mit Hülfe der Addition und Subtraction aus diesen Winkeln wieder eine ganze Reihe von

Addition.



andern Winkeln durch geometrische Construction zusammen setzen; sollte z. B. ein Winkel von 105° construirt werden, so addire man entweder 75° + 30° = 105°, oder man subtrahire 150° — 45° = 105°.

Subtraction:

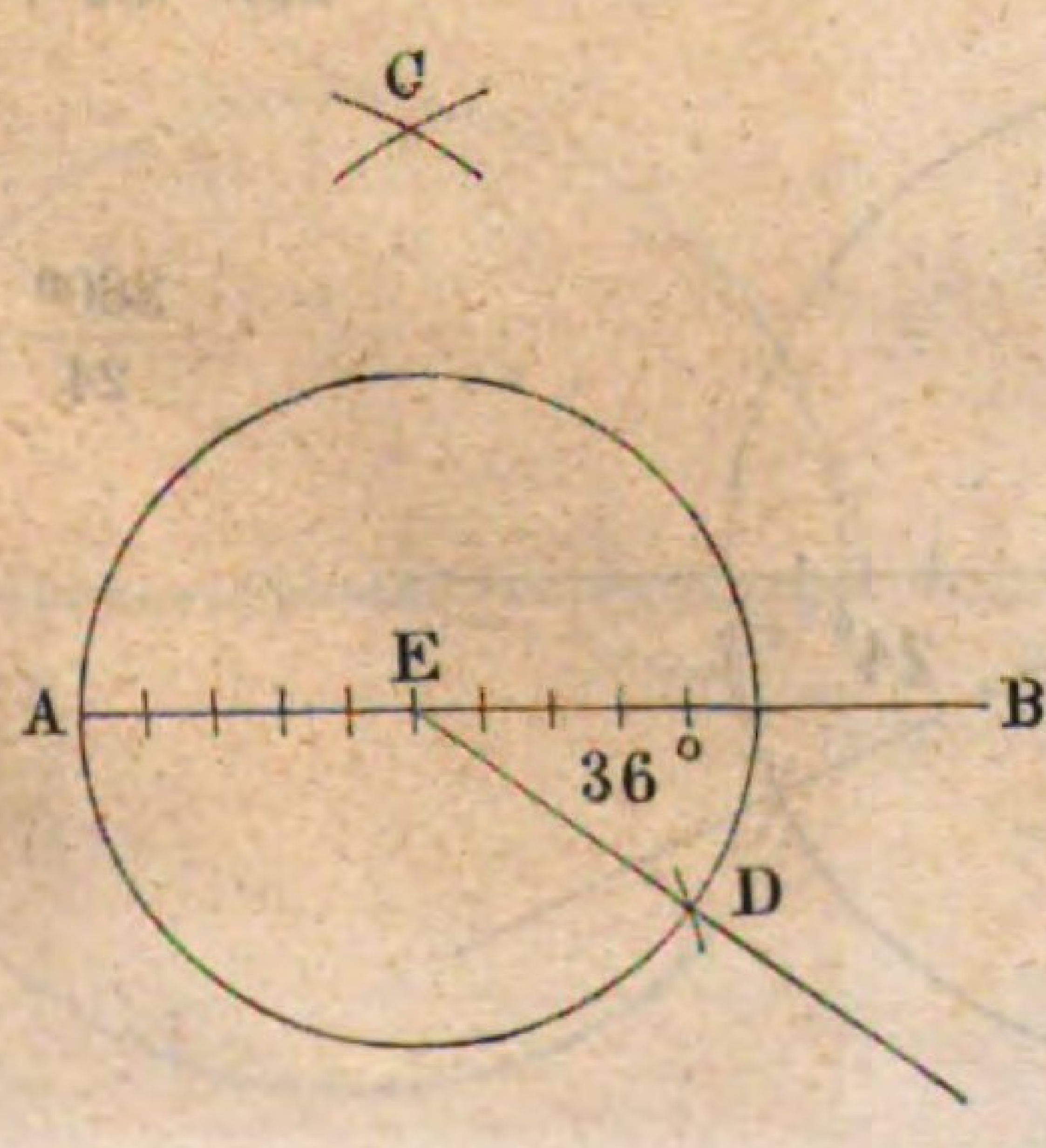


= 150° — 45°

Macht man sich nun durch fortgesetztes Halbiren eine ganze Anzahl von sehr kleinen oder spitzen Winkeln, so kann man allerdings mit Hülfe dieser Methode annäherungsweise jeden verlangten Winkel ohne Transporteur construiren; allein das Resultat würde wegen der zu schwierigen Zeichnung doch stets ungenau bleiben und zu viele Arbeit erfordern; daher geben wir 2) die neuere und allgemein gültige Methode:

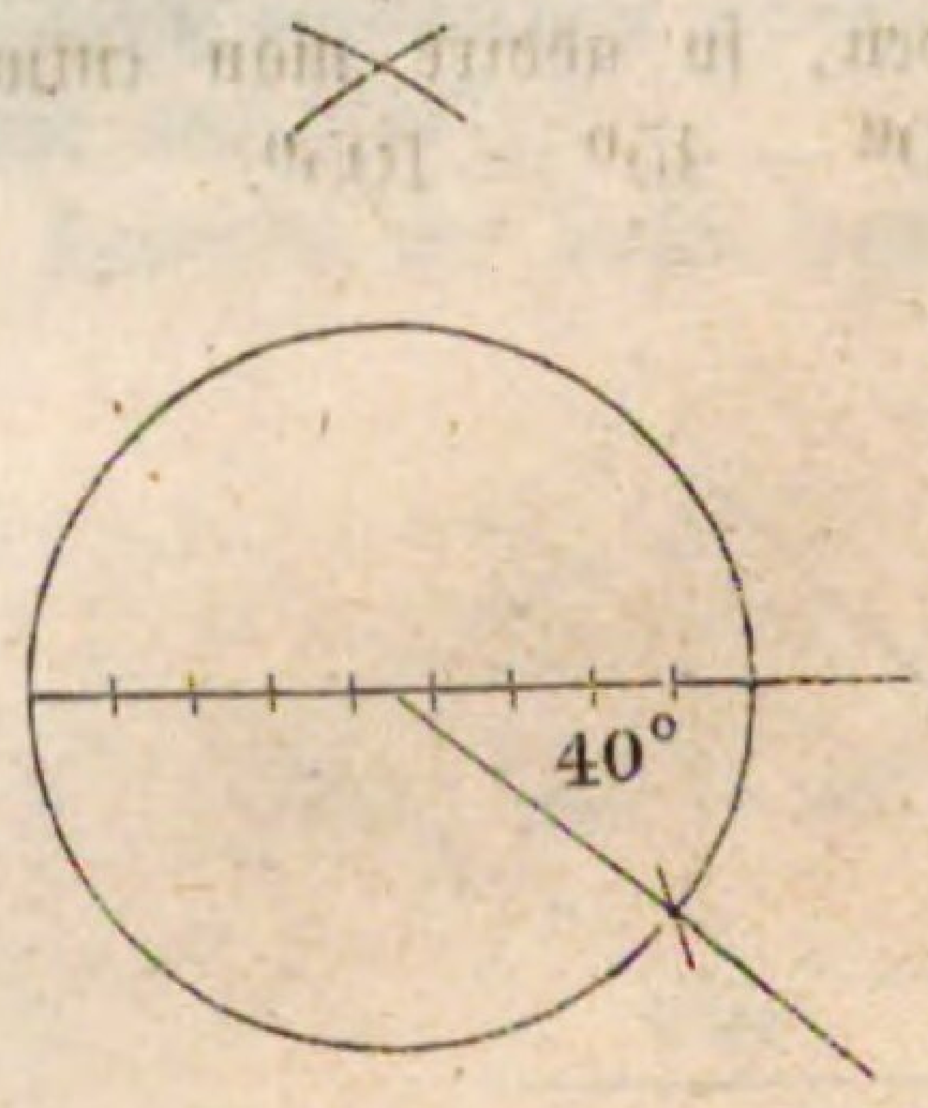
Sollte z. B. ein Winkel von 36° gezeichnet werden, so dividire man mit 36 in 360, d. h., mit der Anzahl der verlangten Grade in die Peripherie eines ganzen Kreises, so erhält man zum Quotienten die Zahl 10. Legt man nun eine gerade Linie AB hin, schneidet auf dieser 10 gleiche Theile ab, nimmt diese 10 gleiche Theile zum Durchmesser eines Kreises, construirt über den Durchmesser ein gleichseitiges Dreieck, zieht aus der Spitze C dieses Dreiecks durch den dritten Theilungspunkt des Diameters in die Peripherie des Kreises, und von diesem Treffpunkte D eine gerade Linie in das Centrum E des Kreises, so schließen die dadurch gebildeten beiden Radien des Kreises EB und ED den verlangten Winkel von 36° ein.

Zeichnung:



Uebungsaufgaben:

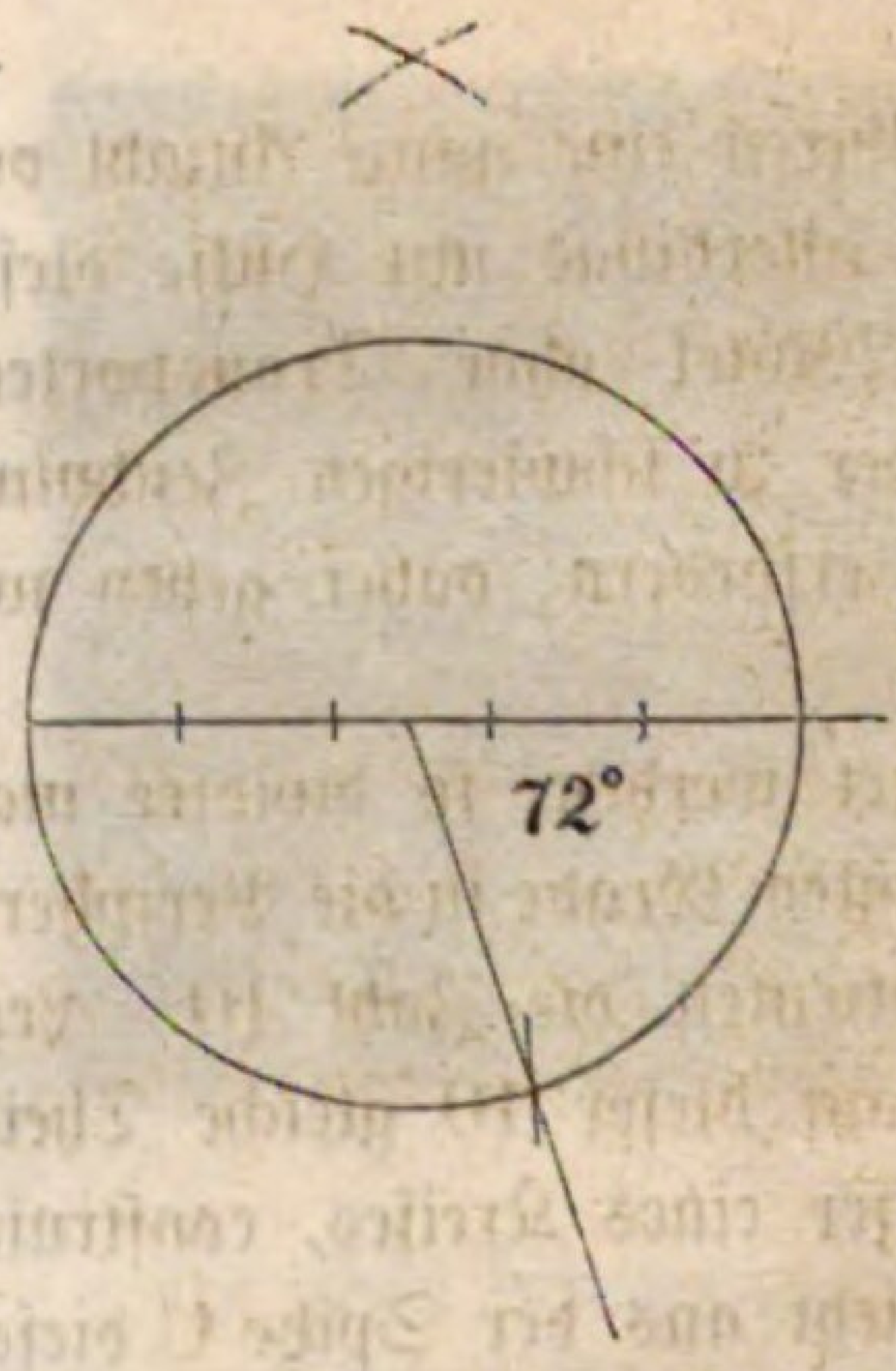
1) Construire einen Winkel von 40⁰!



Rechnung:

$$\frac{360^0}{40^0} = 9 \text{ gleiche Theile.}$$

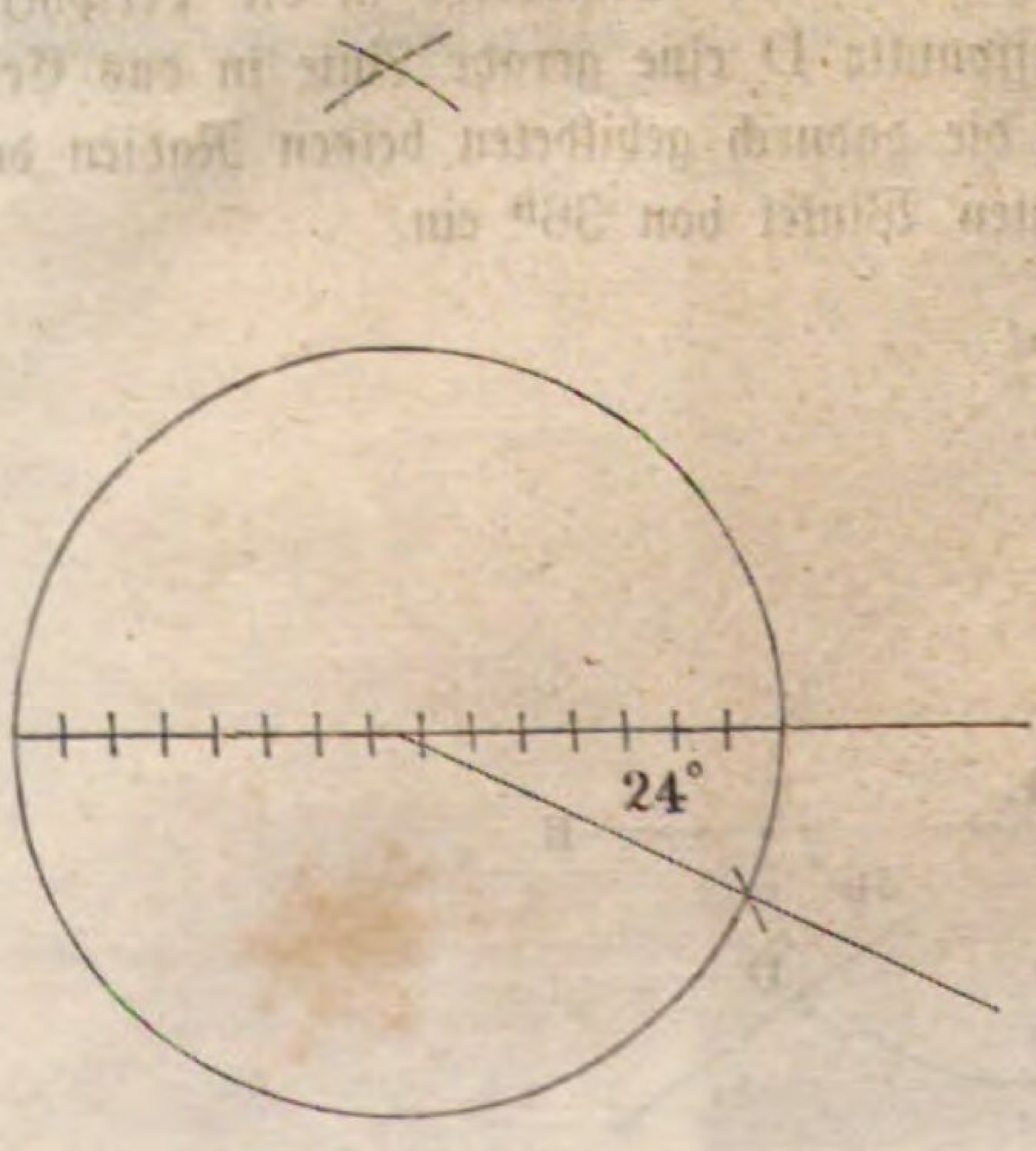
2) Construire einen Winkel von 72⁰!



Rechnung:

$$\frac{360^0}{72} = 5 \text{ gleiche Theile.}$$

3) Construire einen Winkel von 24⁰!



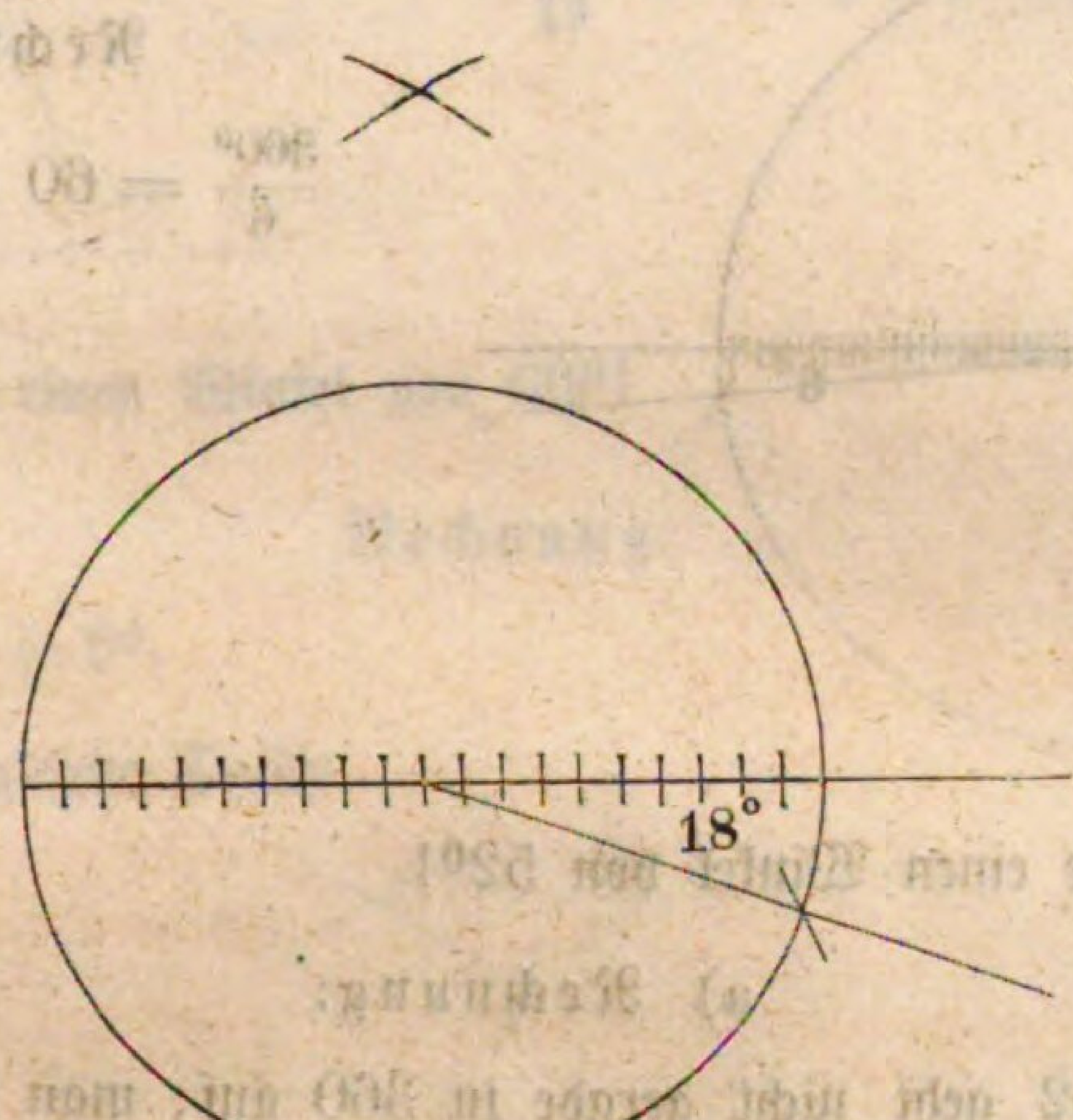
Rechnung:

$$\frac{360^0}{24} = 15 \text{ gleiche Theile.}$$

4) Construire einen Winkel von 18°!

Rechnung:

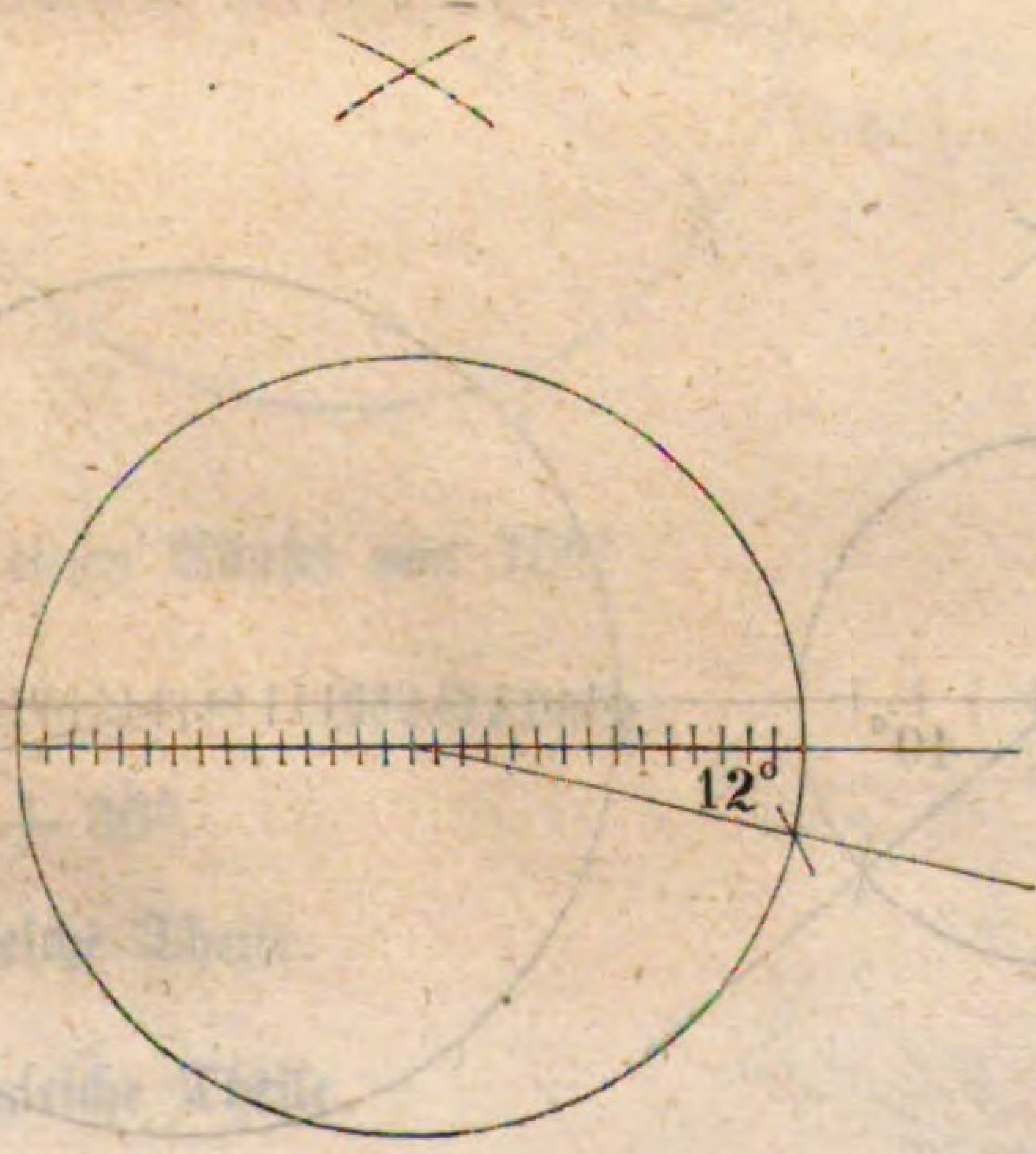
$$\frac{360^0}{18} = 20 \text{ gleiche Theile.}$$

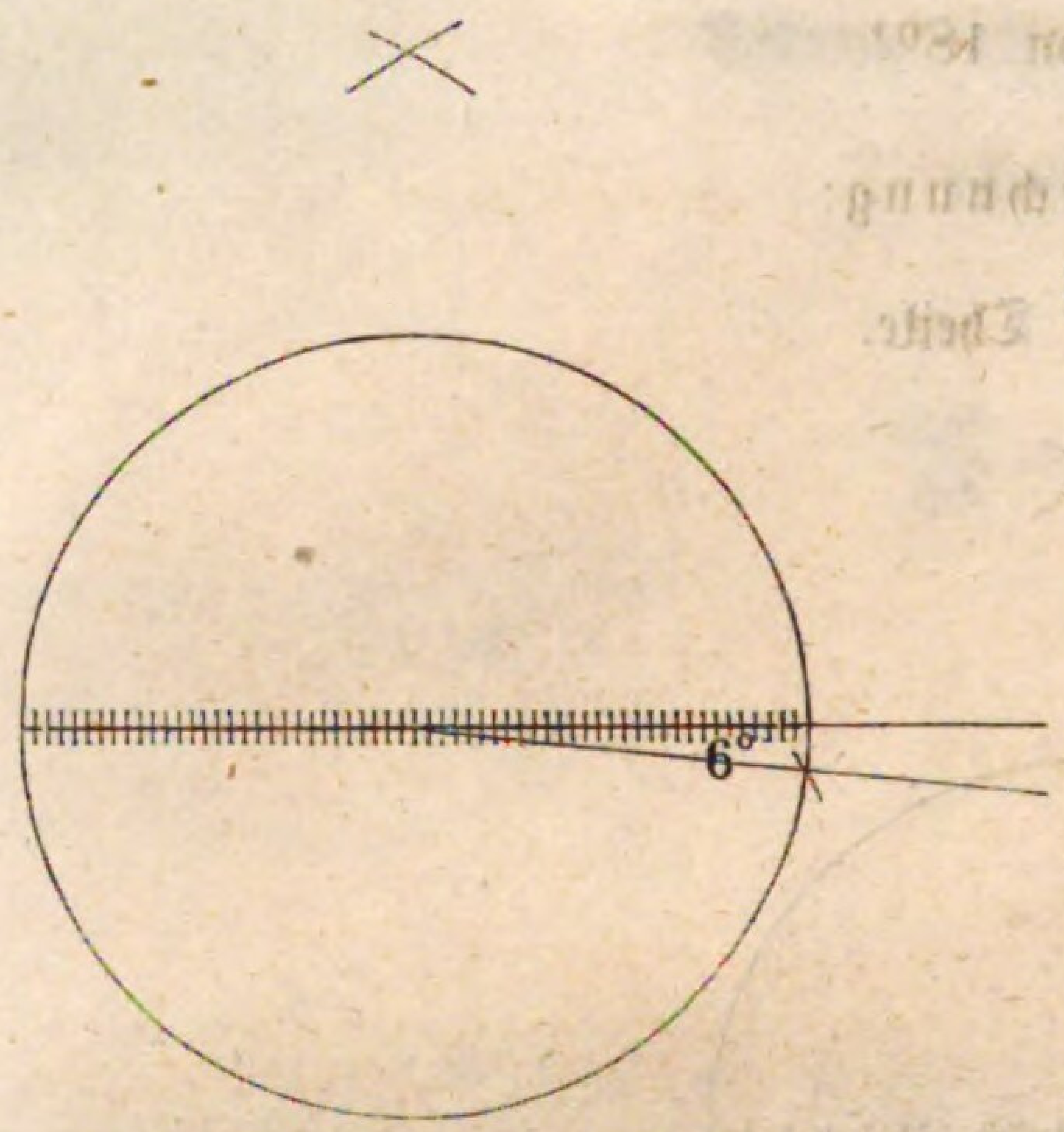


5) Construire einen Winkel von 12°!

Rechnung:

$$\frac{360^0}{12} = 30 \text{ gleiche Theile.}$$





6) Construire einen Winkel von 6^0!

Rechnung:

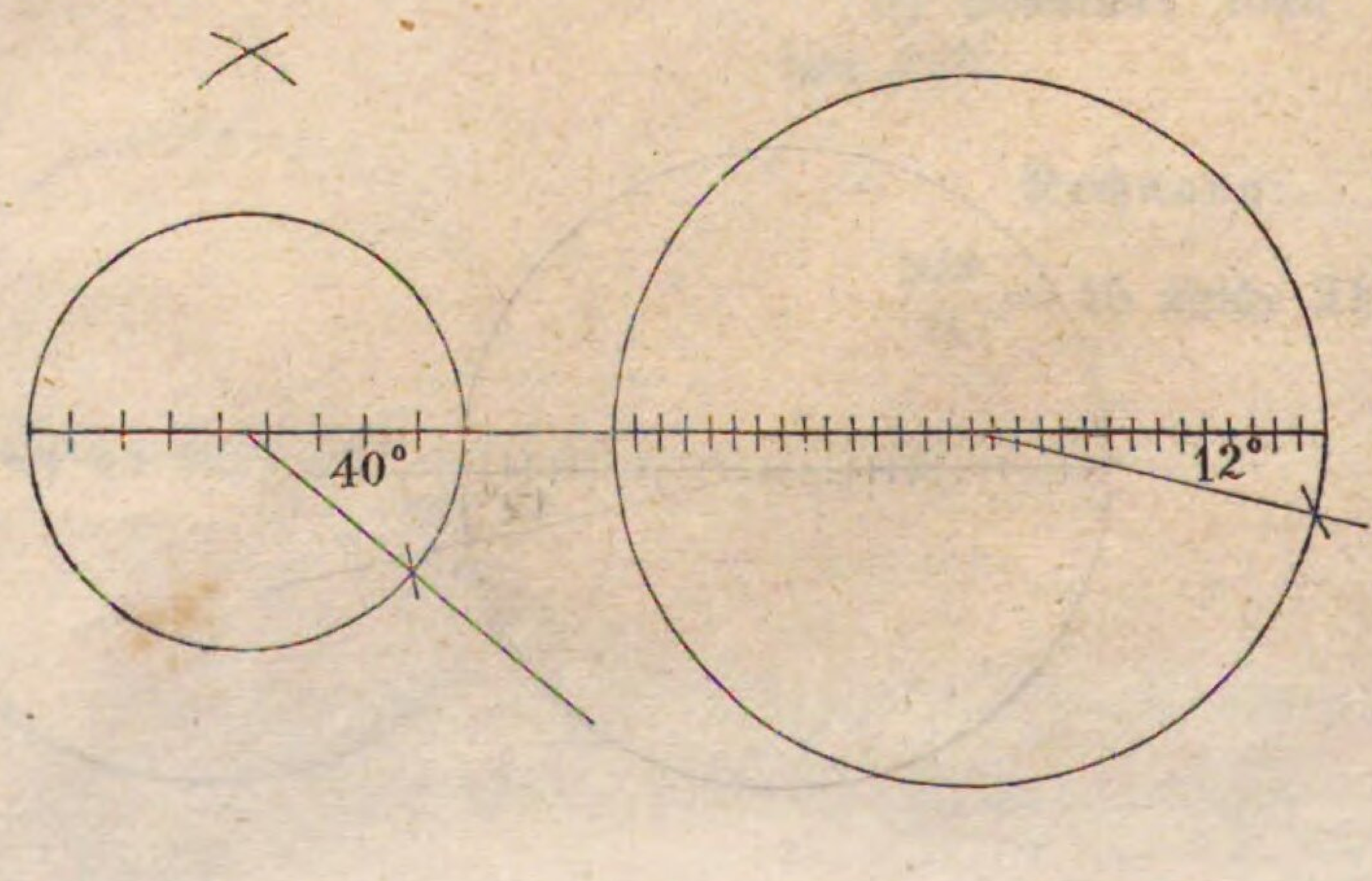
$$\frac{360^0}{6} = 60 \text{ gleiche Theile.}$$

7) Construire einen Winkel von 52^0!

a) Rechnung:

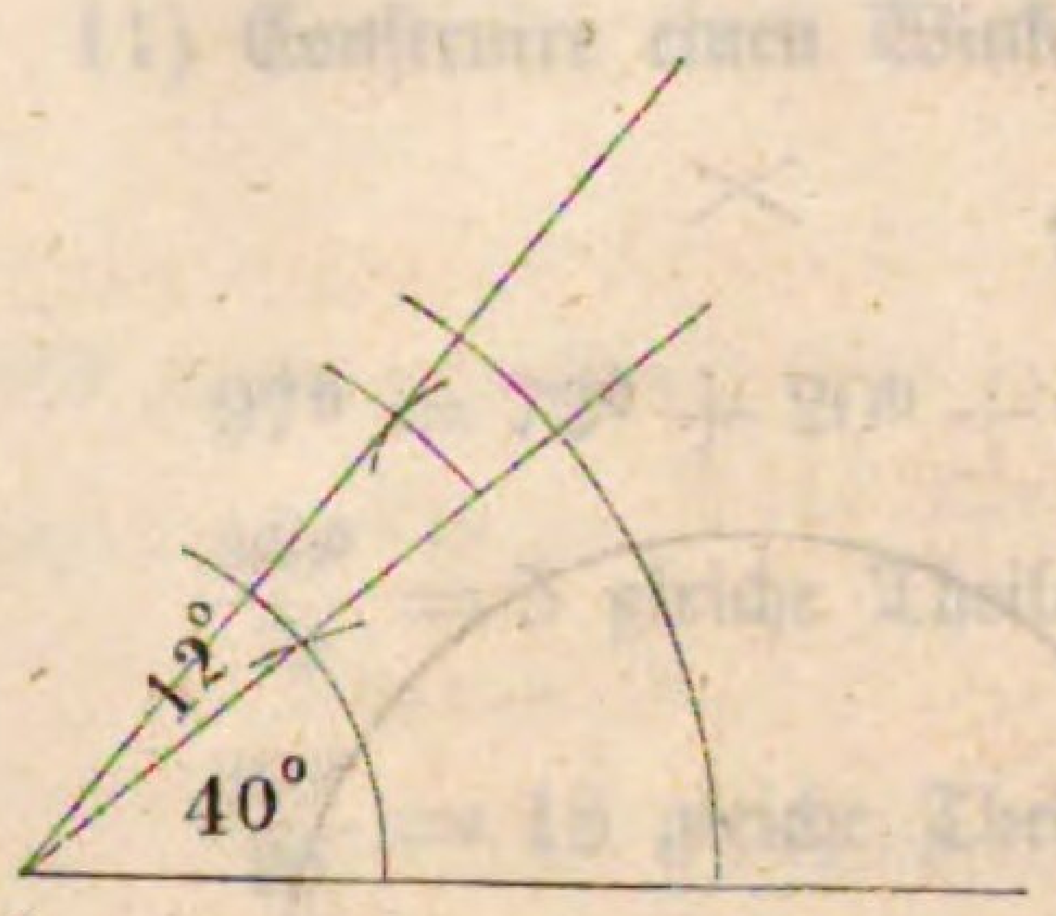
Die Zahl 52 geht nicht gerade in 360 auf; man löſ't daher die gegebene Summe in ſolche Summanden auf, welche in 360 aufgehen, alſo: $52 = 40 + 12$; alsdann zeichnet man nach der eben angegebenen Weiſe einen Winkel von 40^0 und einen andern von 12^0 und addirt dieſe beiden Summanden durch geometriſche Conſtruction.

b) Zeichnung:



$\frac{360^0}{40} = 9$ gleiche Theile.

$\frac{360^0}{12} = 30$ gleiche Theile.



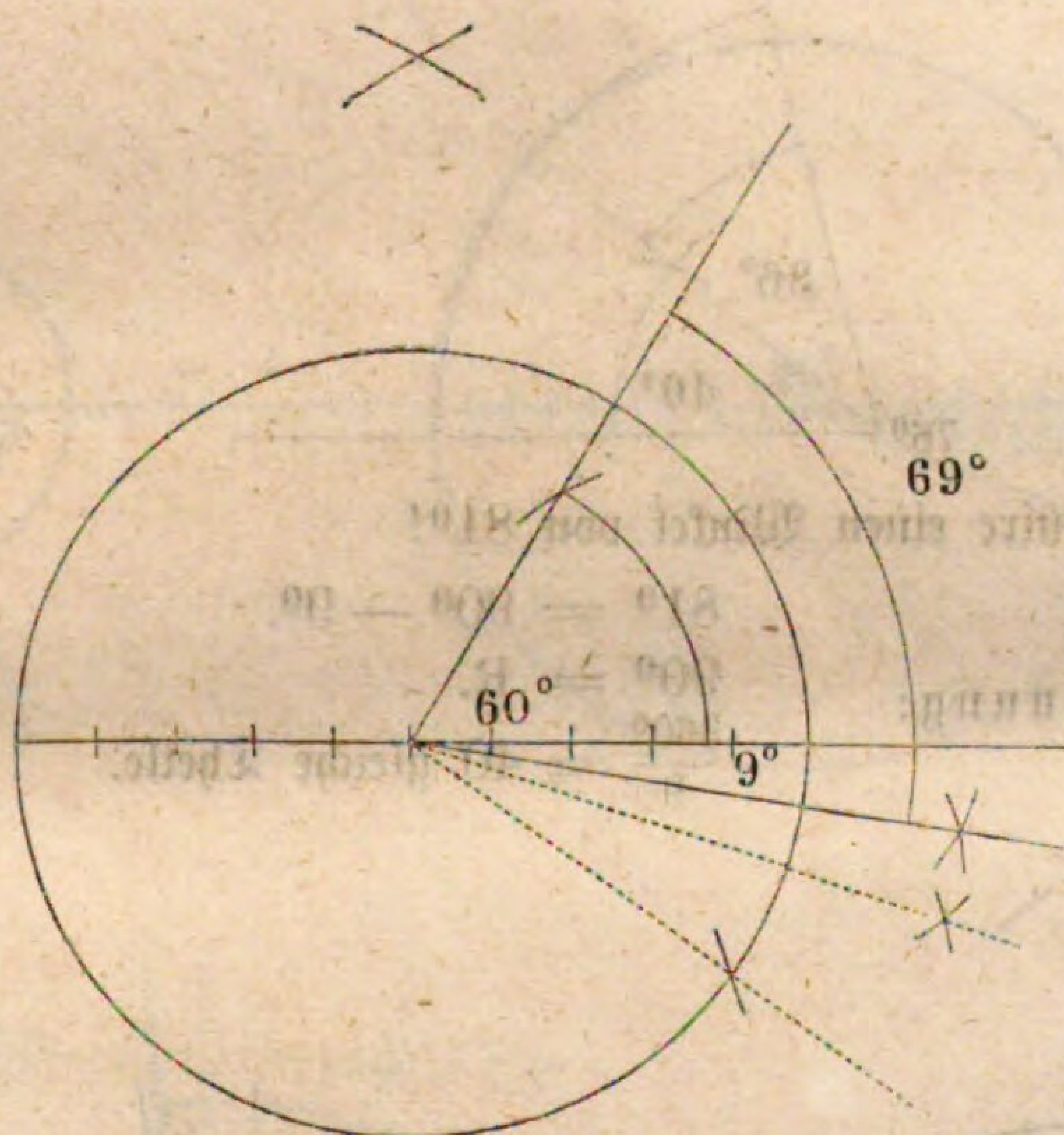
52^0

8) Construire einen Winkel von 69^0!

Rechnung:

$69^0 = 60^0 + 9^0.$

$\frac{360^0}{9} = 40$ gleiche Theile.



9) Construire einen Winkel von 76^0!

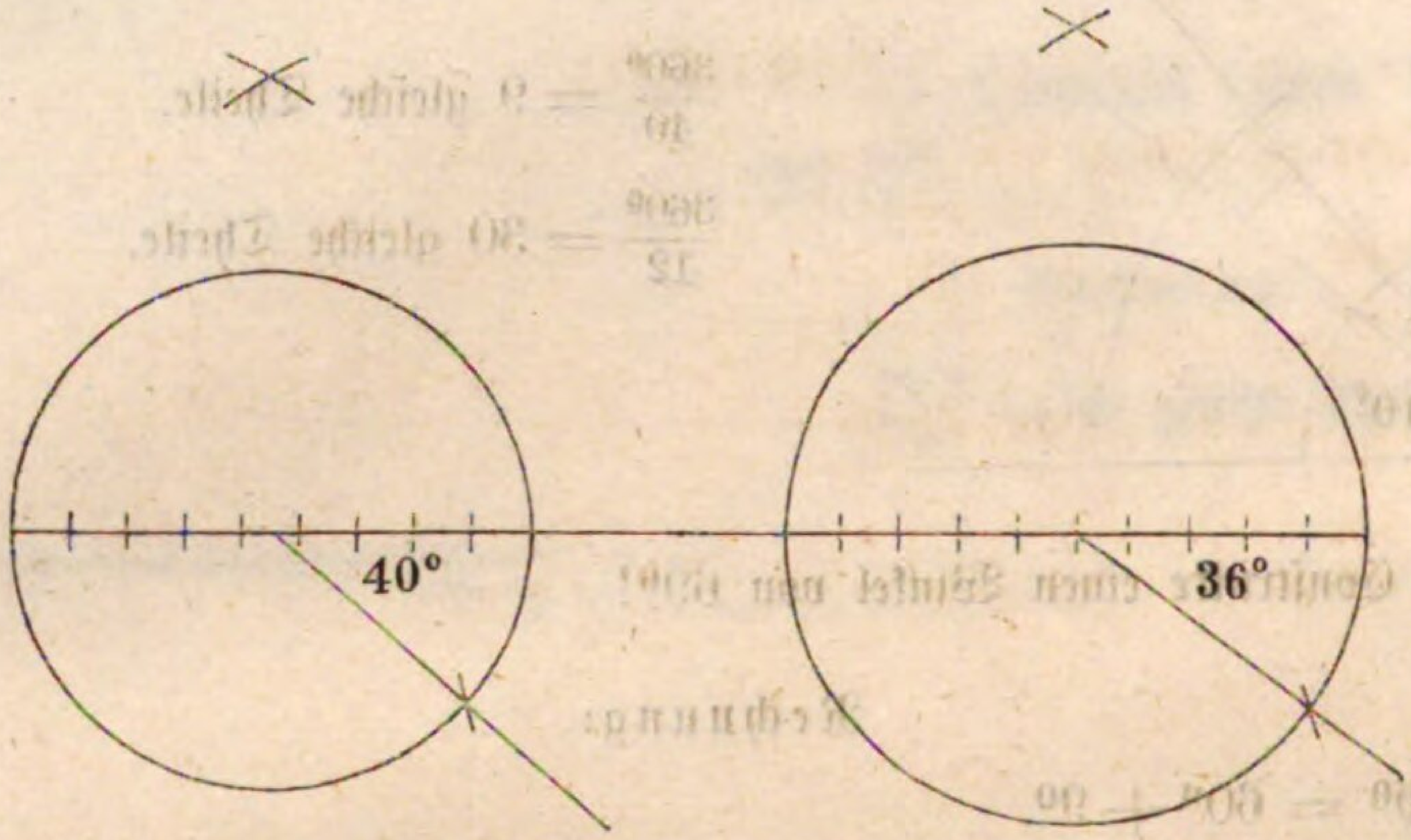
Rechnung:

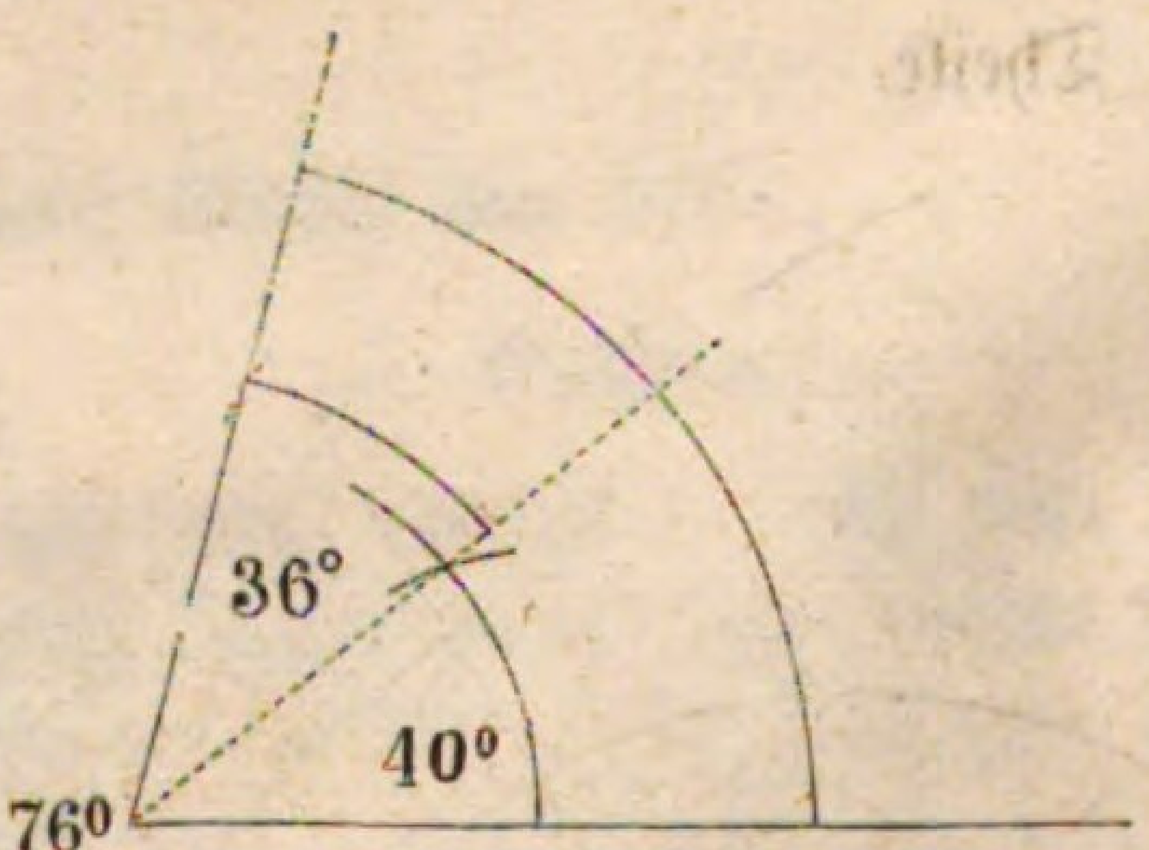
$76^0 = 40^0 + 36^0.$

$\frac{360^0}{40} = 9$ gleiche Theile.

$\frac{360^0}{36} = 10$ gleiche Theile.

Zeichnung:

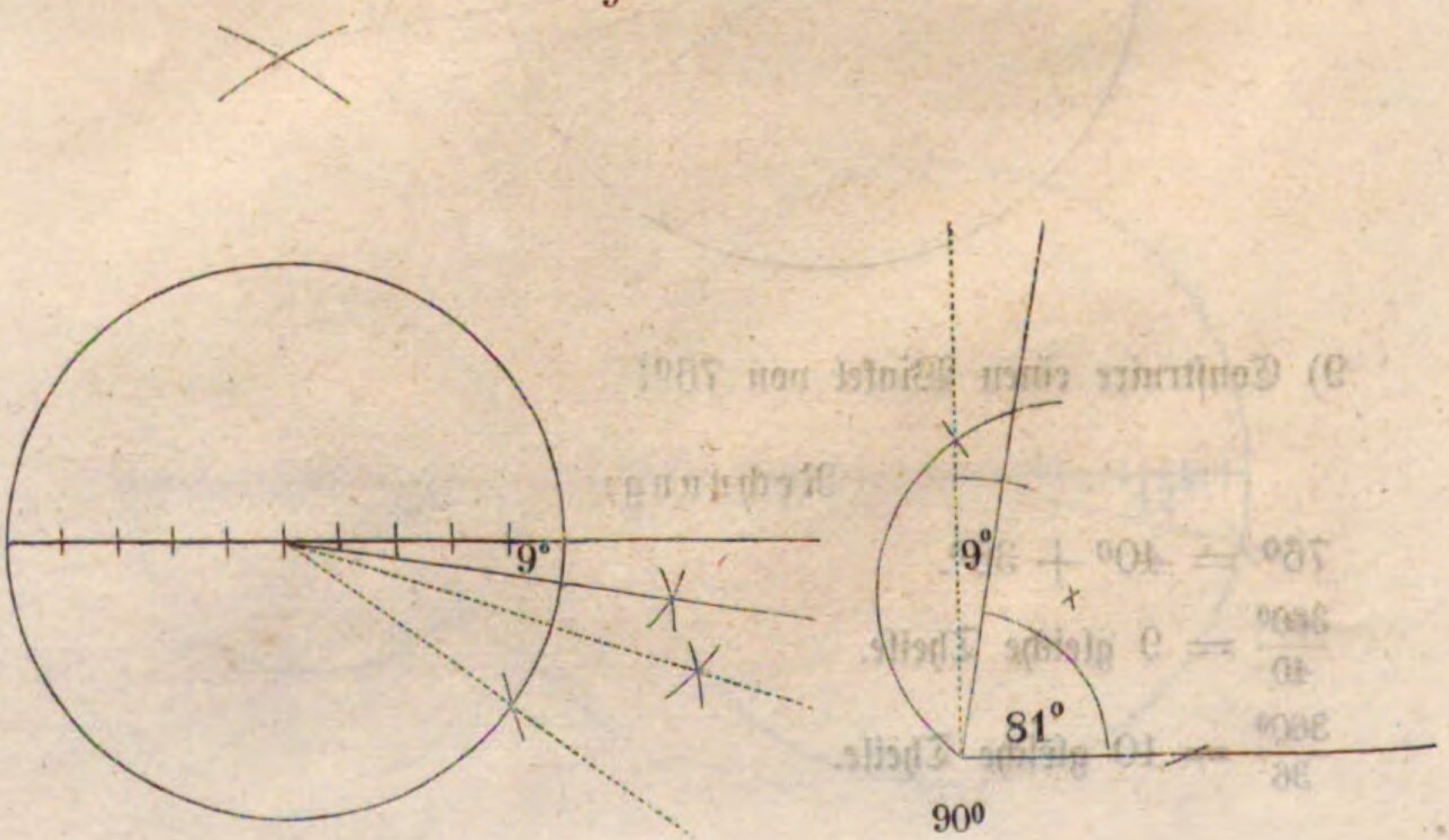




10) Construire einen Winkel von 81°!

Rechnung:

$$81^0 = 90^0 - 9^0.$$
$$90^0 = R.$$
$$\frac{360^0}{9} = 40 \text{ gleiche Theile.}$$



11) Construire einen Winkel von 97⁰!

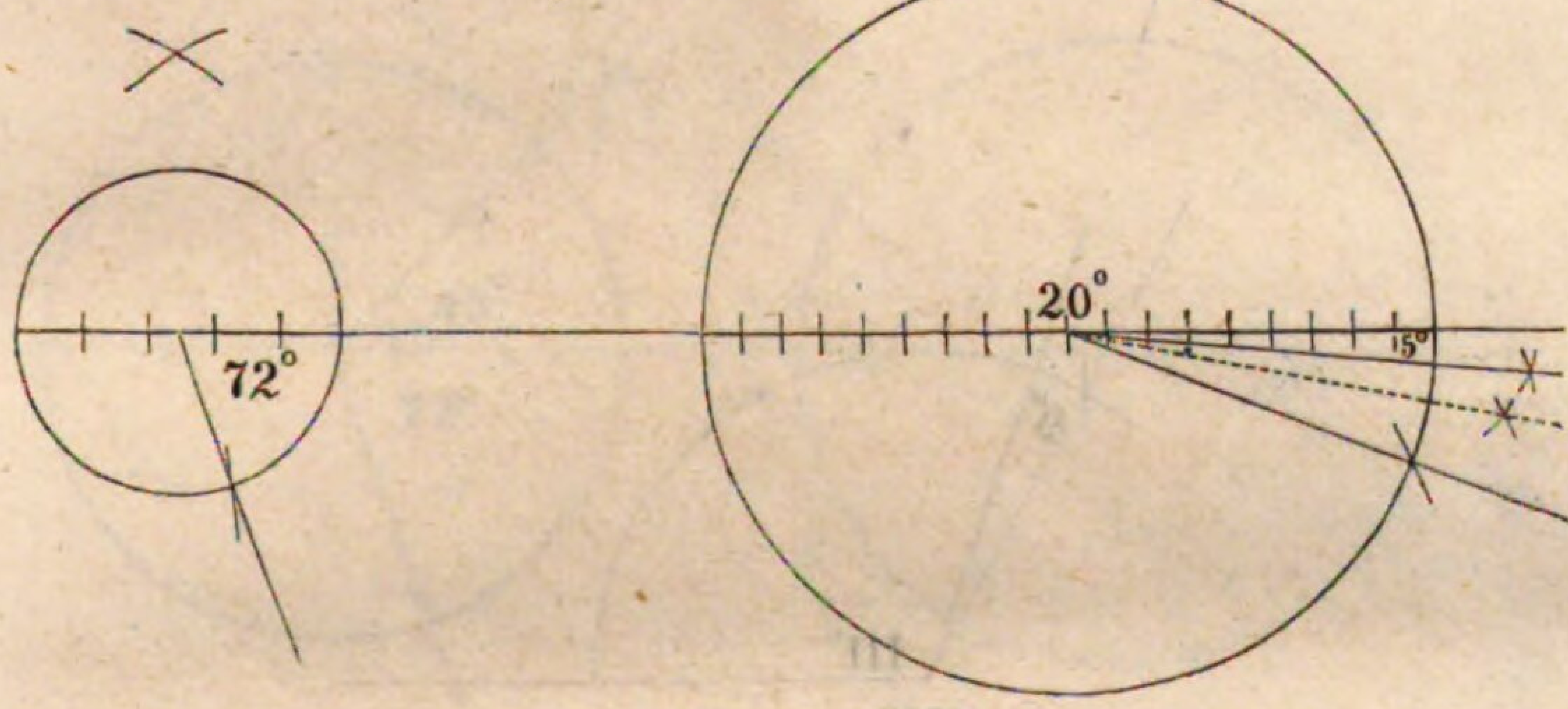
Rechnung:

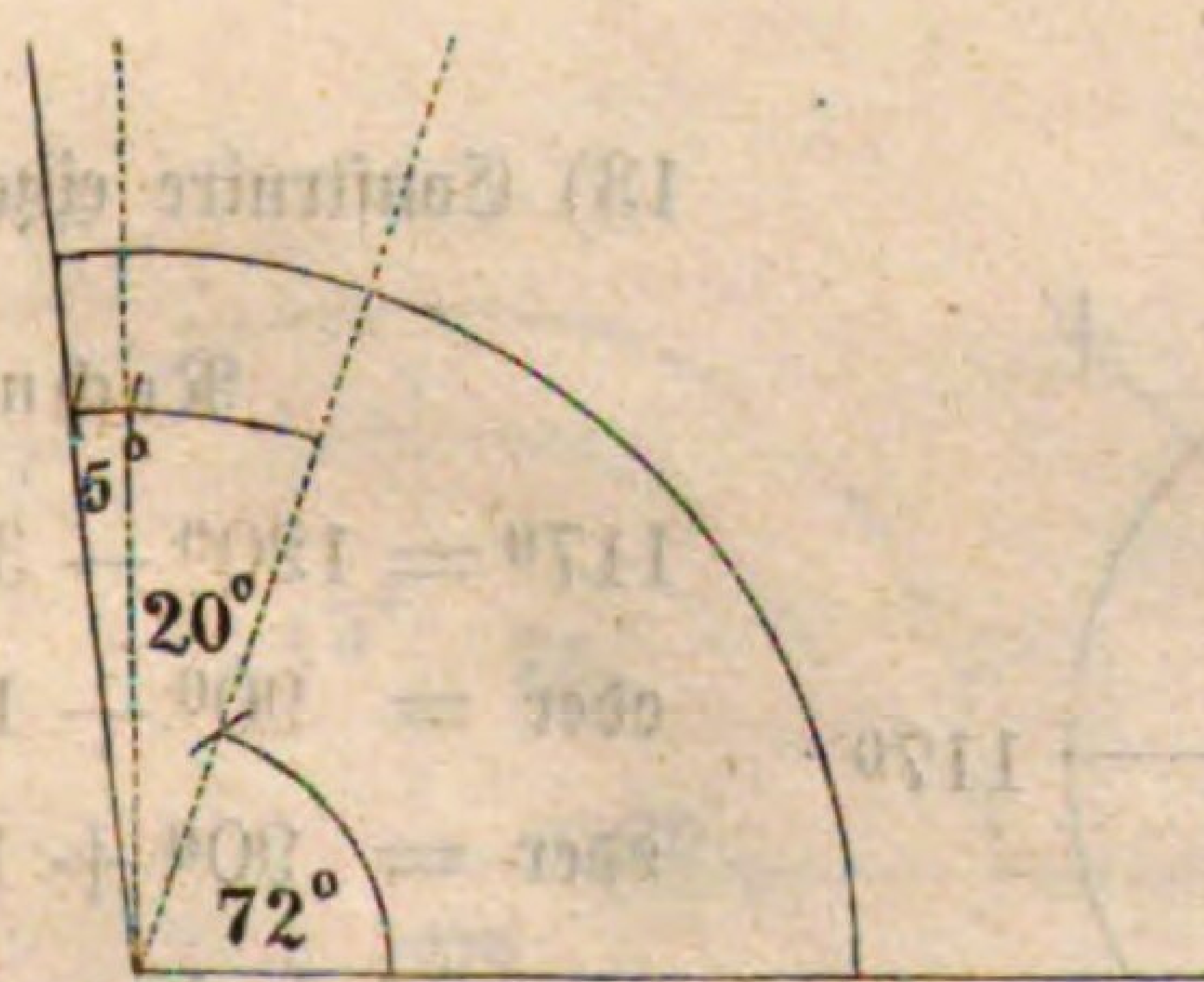
$97^0 = 72^0 + 20^0 + 5^0.$

$\frac{360^0}{72} = 5$ gleiche Theile.

$\frac{360^0}{20} = 18$ gleiche Theile.

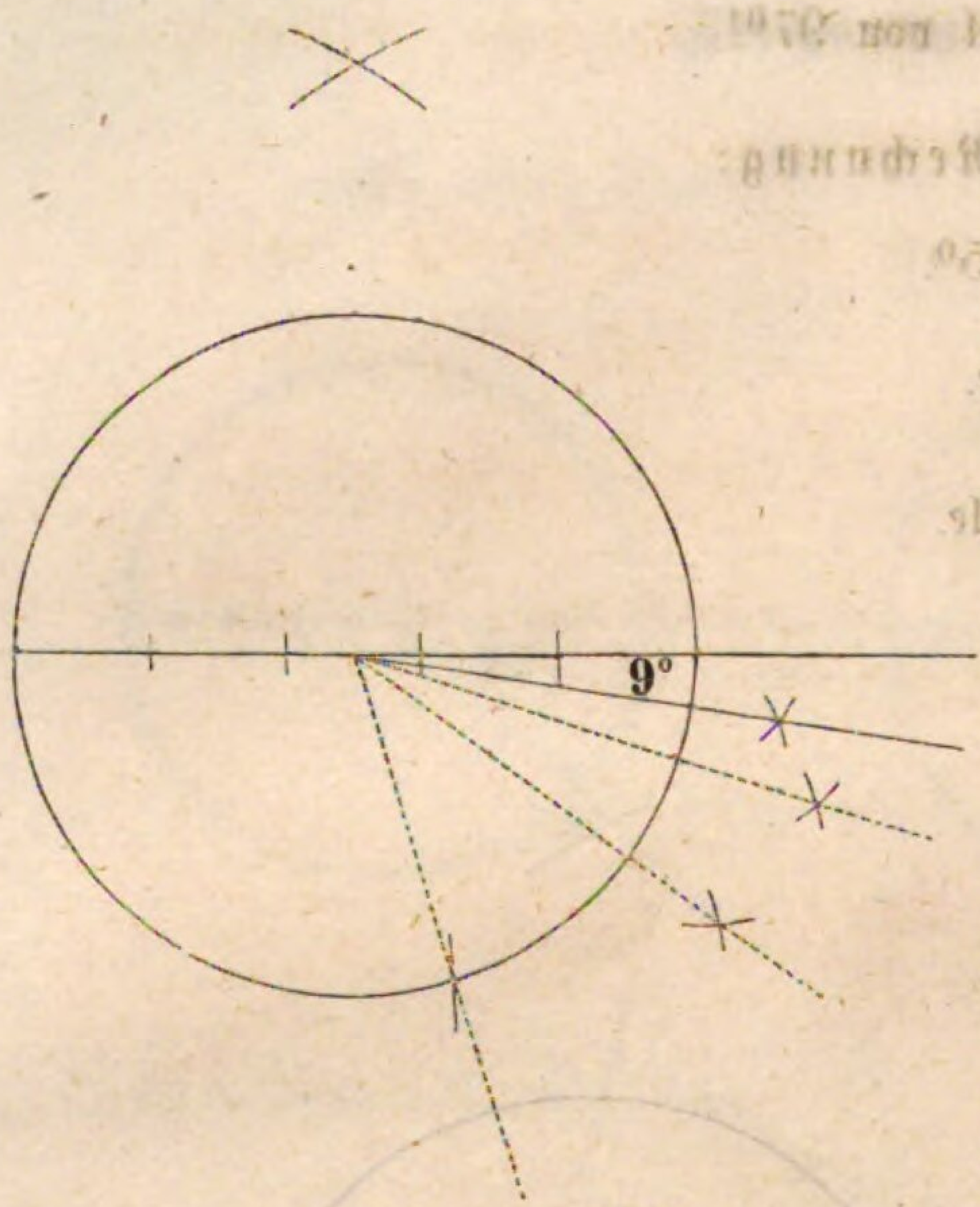
$\frac{20^0}{4} = 5^0.$





97⁰

12) Conſtruire einen Winkel von 111°!



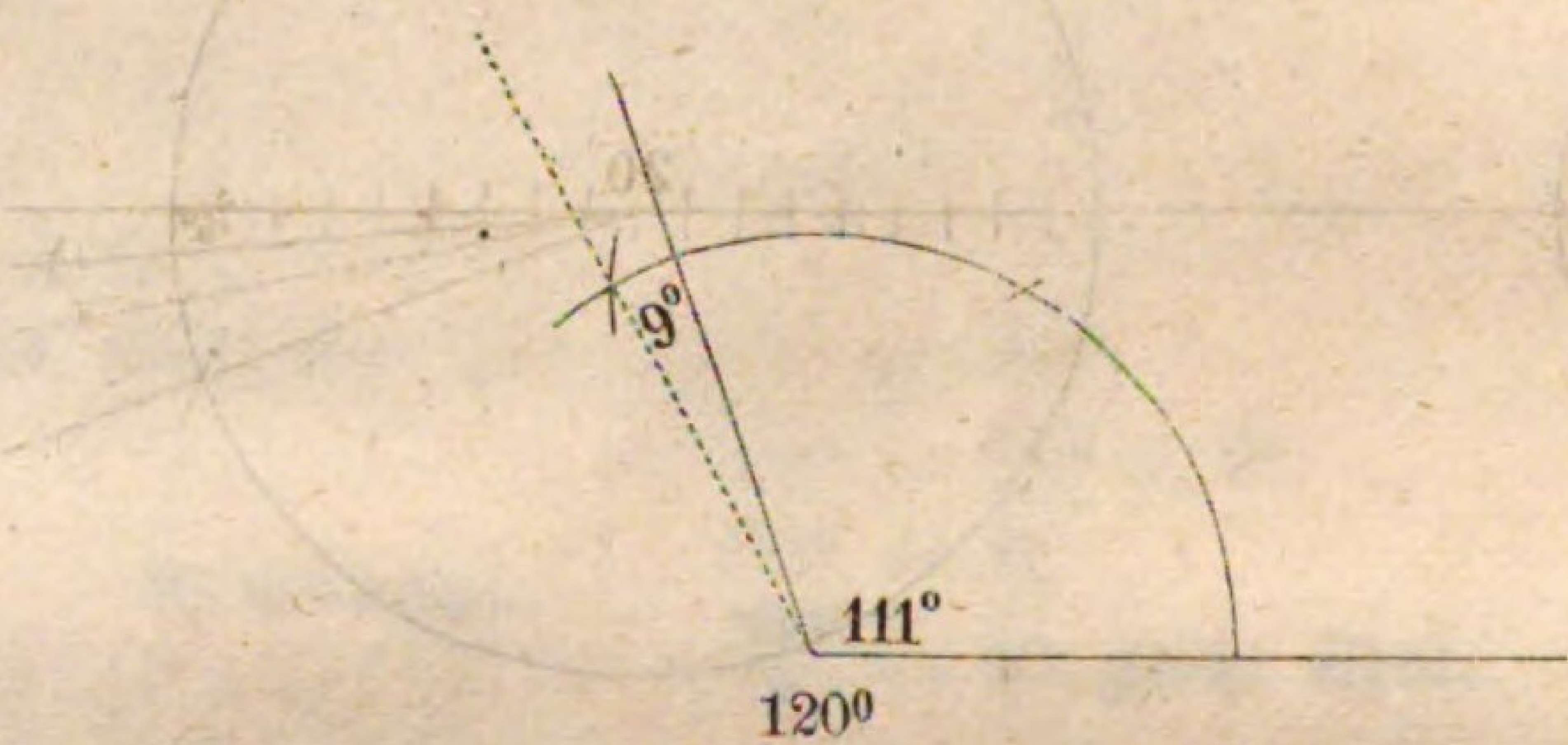
Rechnung:

$111^0 = 120^0 - 9^0.$

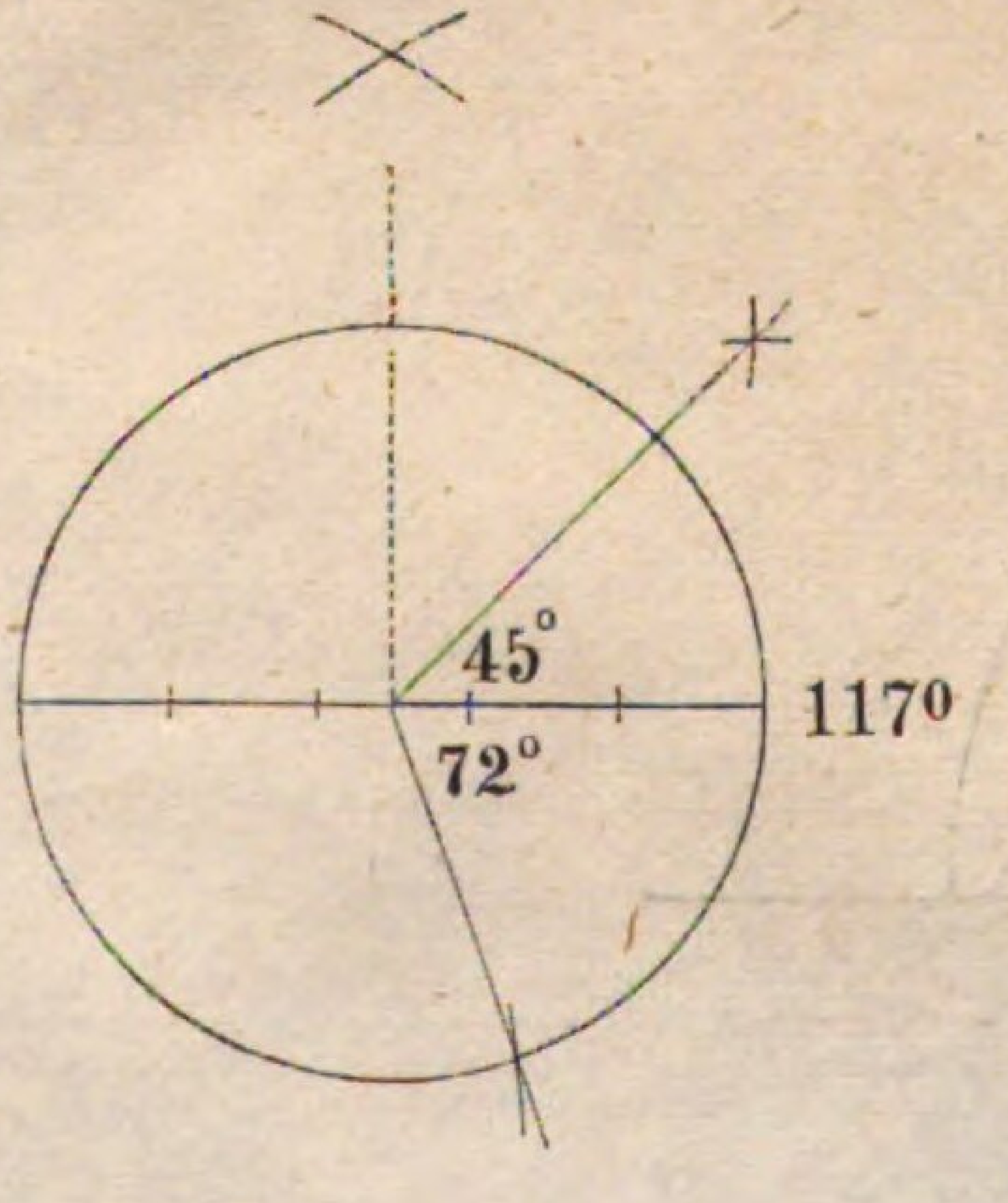
$= 45^0 + 30^0 + 36^0.$

$120^0 = 2 \times 60^0.$

$\frac{360^0}{9} = 40$ gleiche Theile.



13) Conſtruire einen Winkel von 117°!



Rechnung:

$117^0 = 120^0 - 3^0.$

oder $= 90^0 + 18^0 + 9^0.$

oder $= 90^0 + 15^0 + 12^0.$

oder $72 + 45.$

14) Construire einen Winkel von 137⁰.

Rechnung:

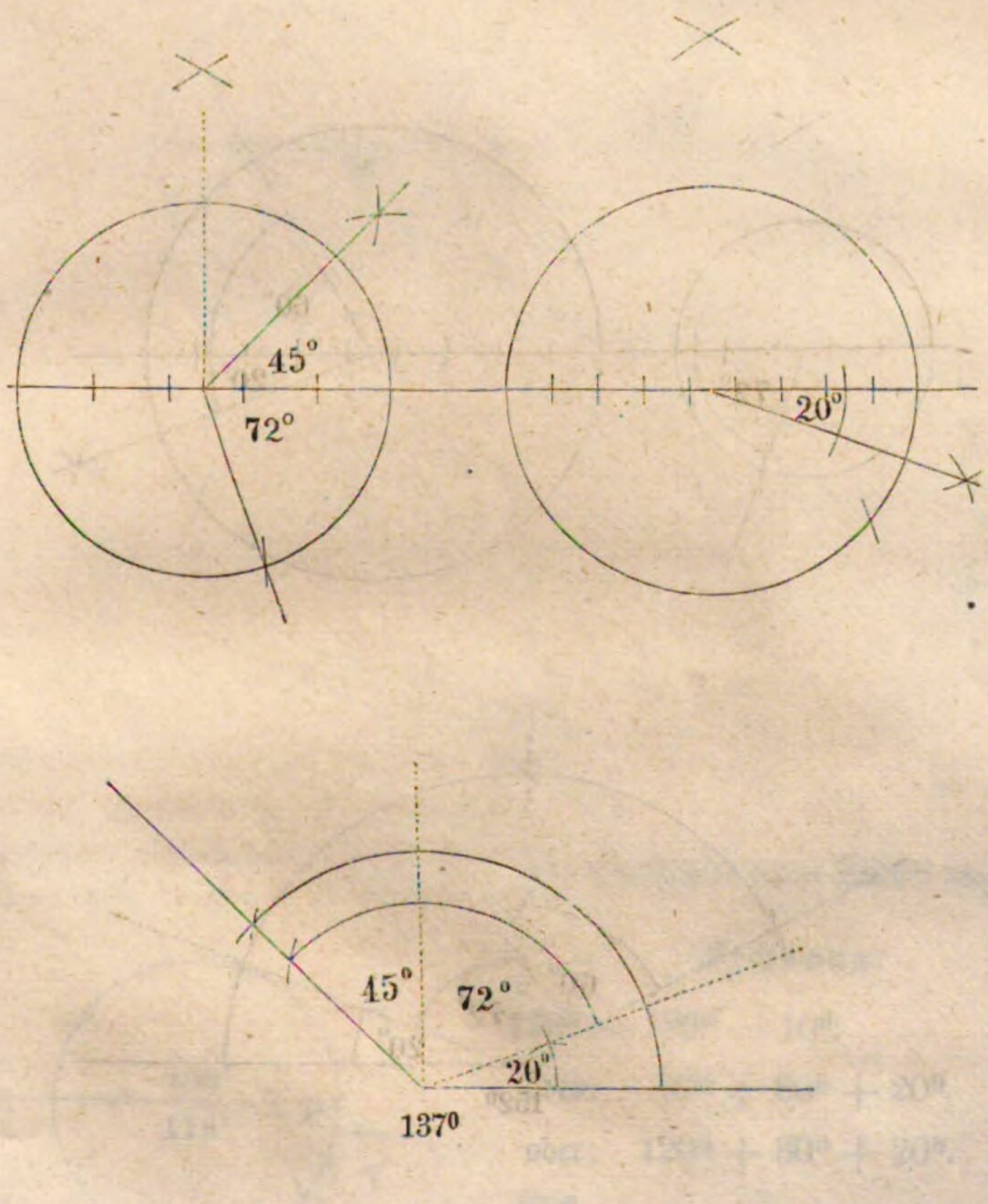
$137^0 = 45^0 + 72^0 + 20^0.$

oder: $120^0 + 9^0 + 8^0.$

$45^0 = \frac{1}{2}$ R.

$\frac{360^0}{72} = 5$ gleiche Theile.

$\frac{360^0}{20} = 18$ gleiche Theile.



15) Construire einen Winkel von 152⁰!

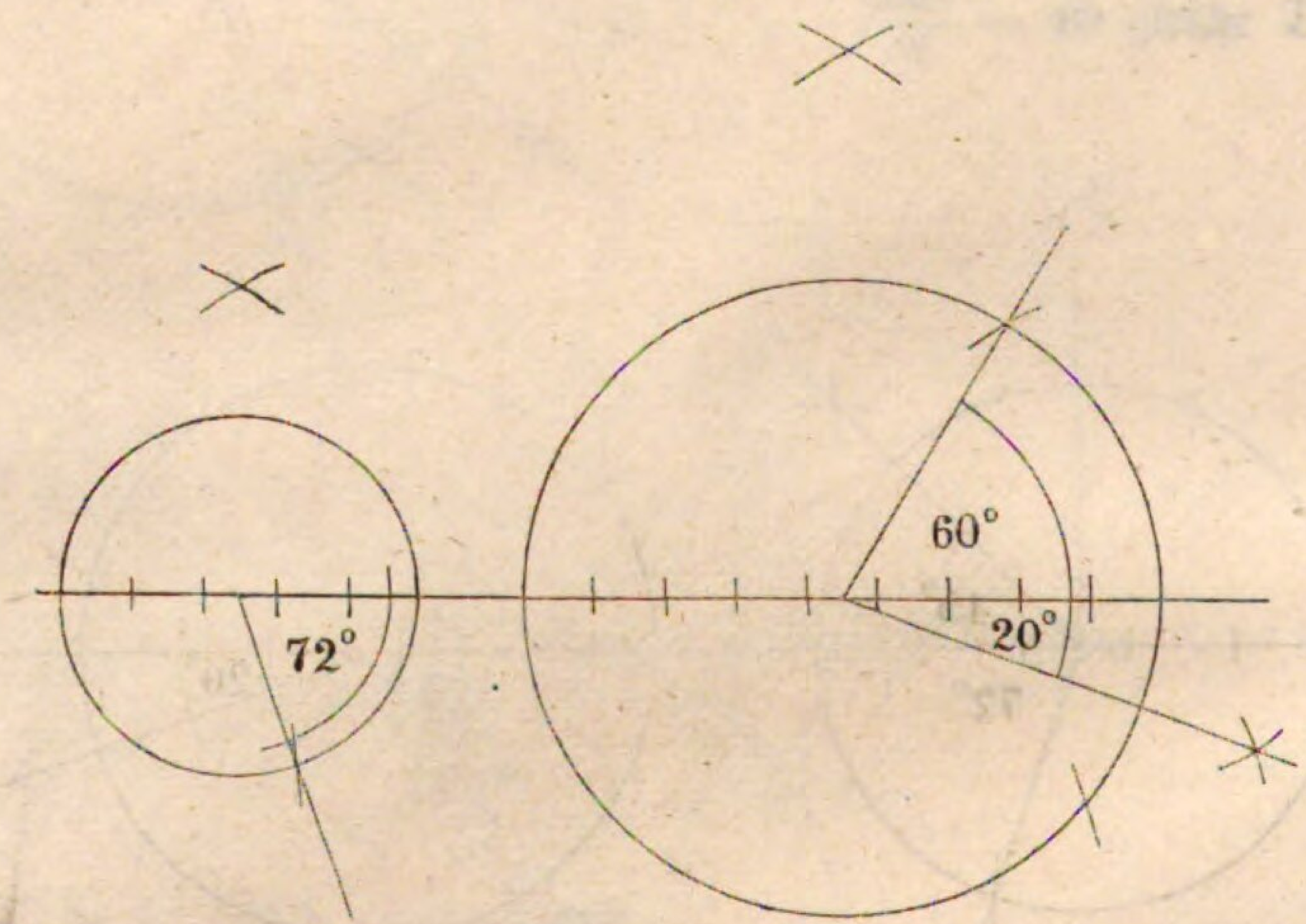
Rechnung:

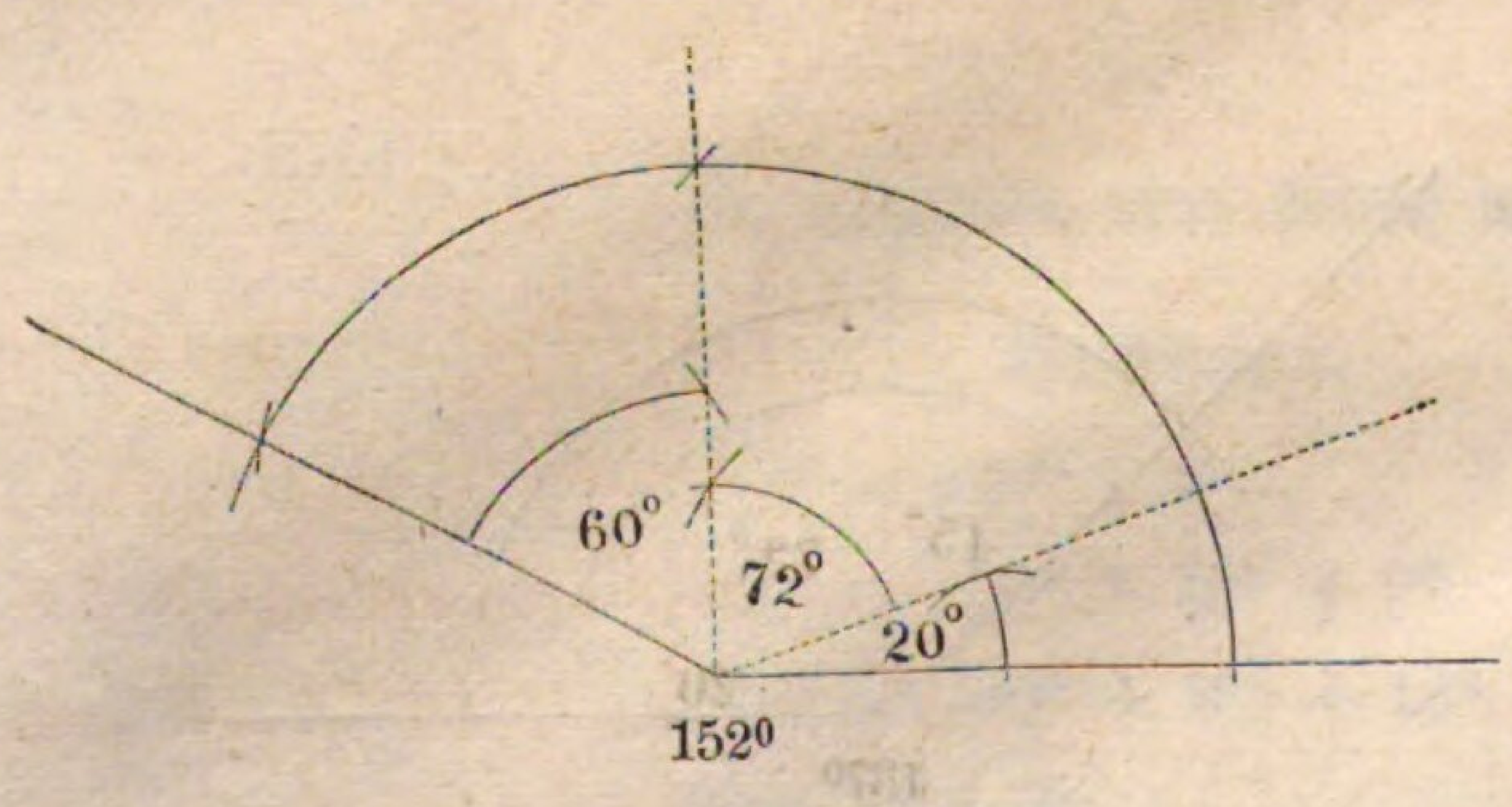
$152^0 = 60^0 + 72^0 + 20^0.$

60^0 Satz von Thales.

$\frac{360^0}{72} = 5$ gleiche Theile.

$\frac{360^0}{20} = 18$ gleiche Theile.





16) Construire einen Winkel von 161⁰!

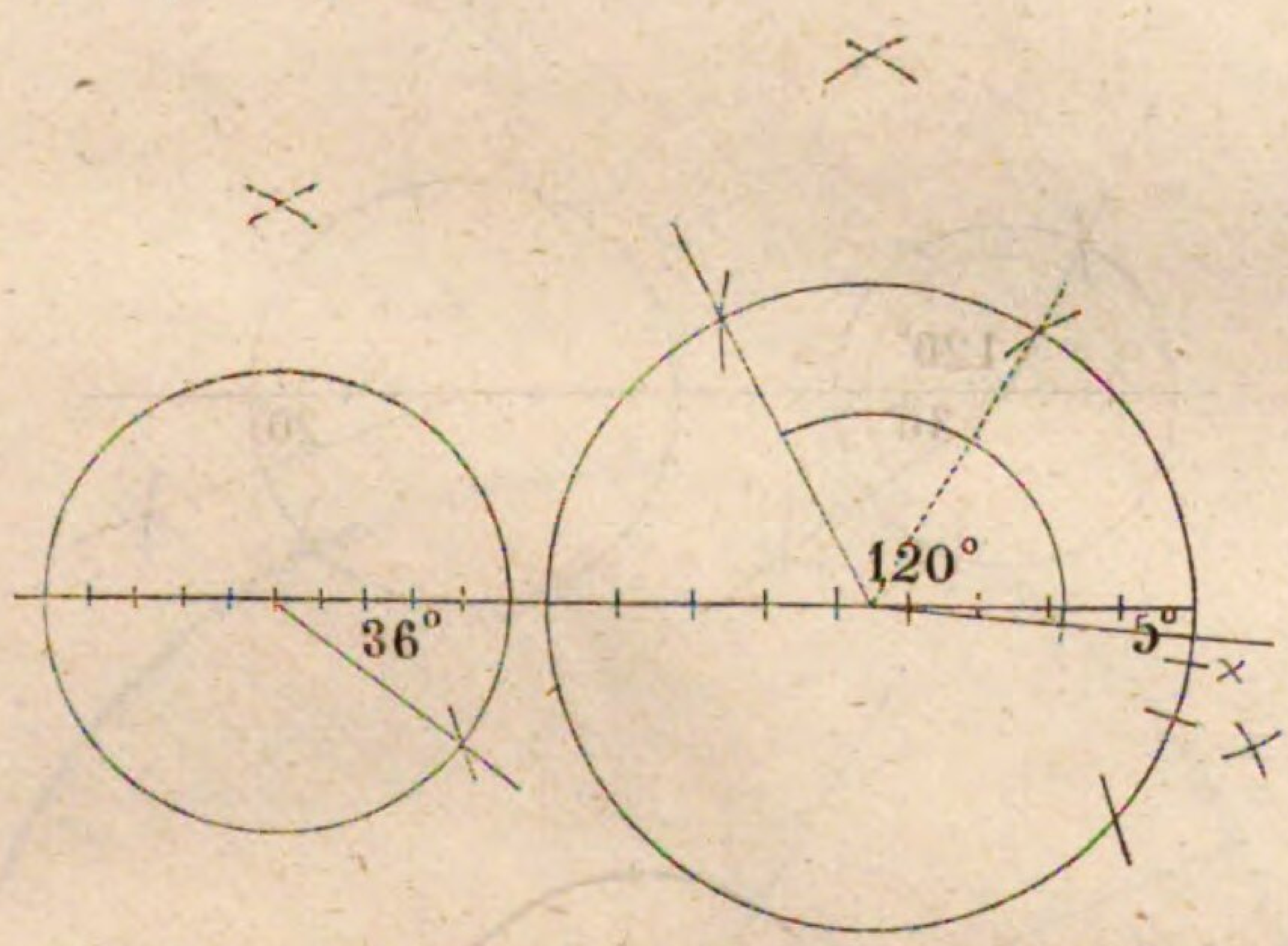
Rechnung:

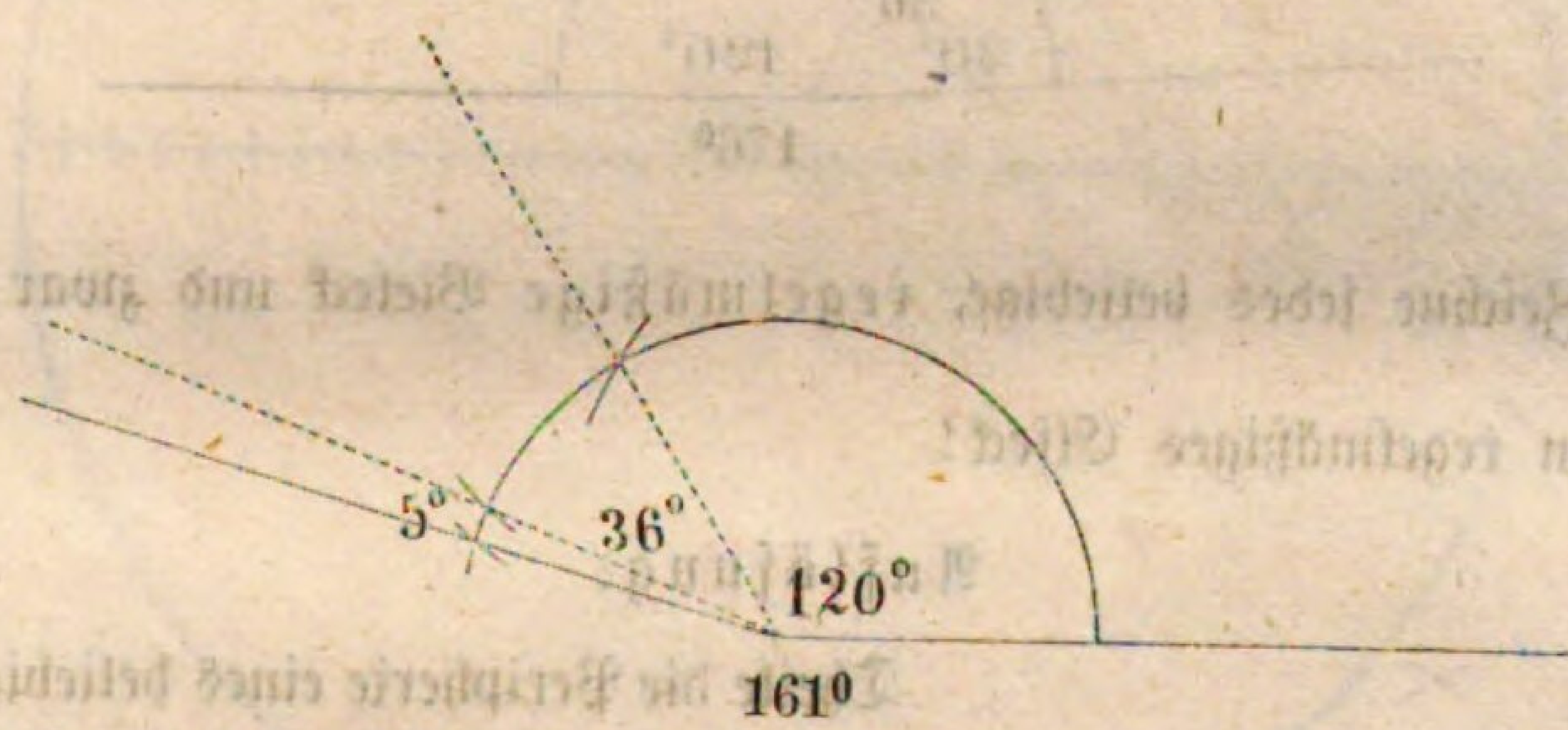
$161^0 = 90^0 + 45^0 + 20^0 + 66^0.$

oder: $120^0 + 36^0 + 5^0.$

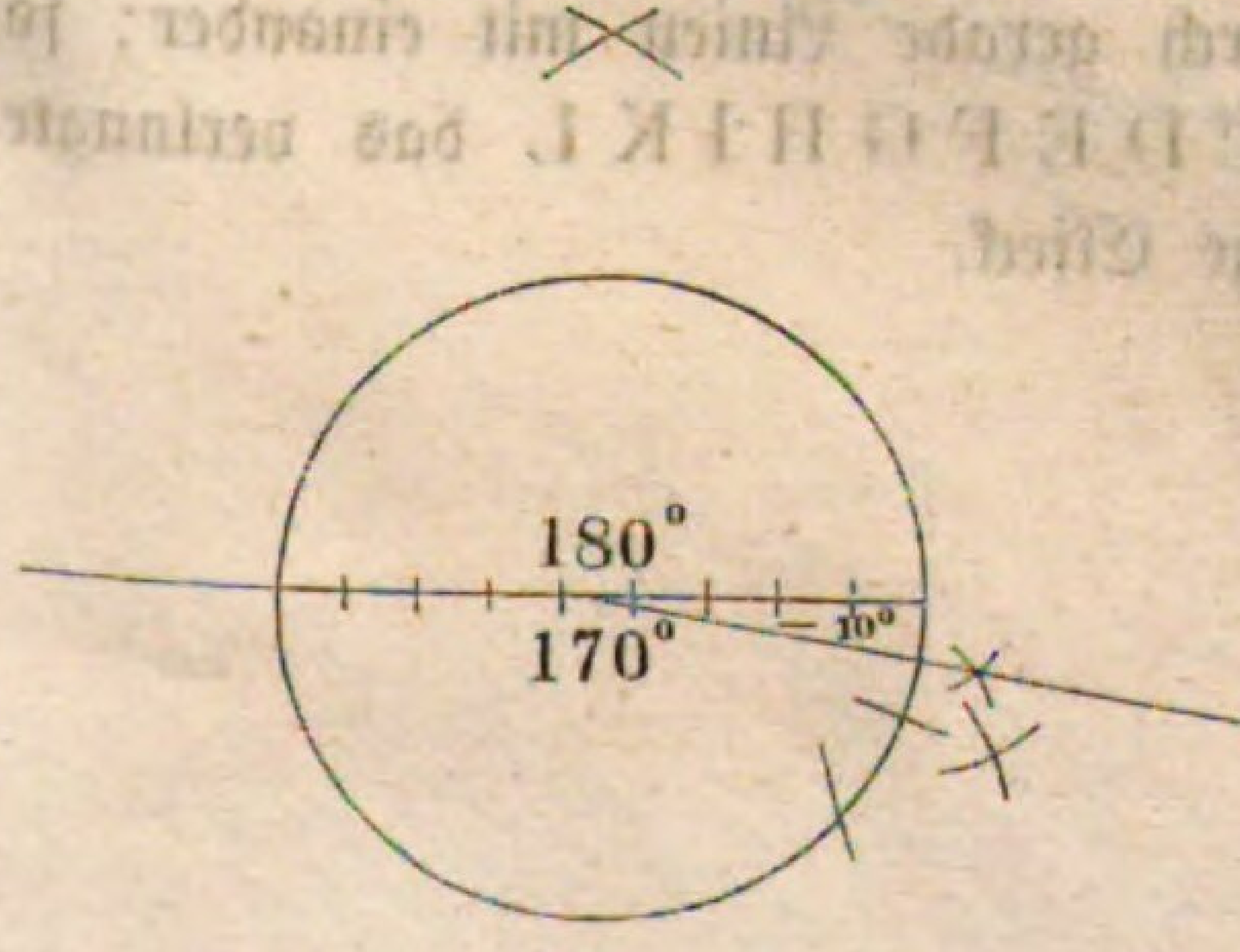
oder: $40^0 + 75^0 + 36^0 + 10^0.$

oder: $150^0 + 6^0 + 5^0.$





17) Construire einen Winkel von 170⁰!



Rechnung:

$170^0 = 180^0 - 10^0.$

oder: $90^0 + 60^0 + 20^0.$

oder: $120^0 + 30^0 + 20^0.$

$\frac{360^0}{10} = 36$ gleiche Theile.

18) Construire einen Winkel von 176⁰!

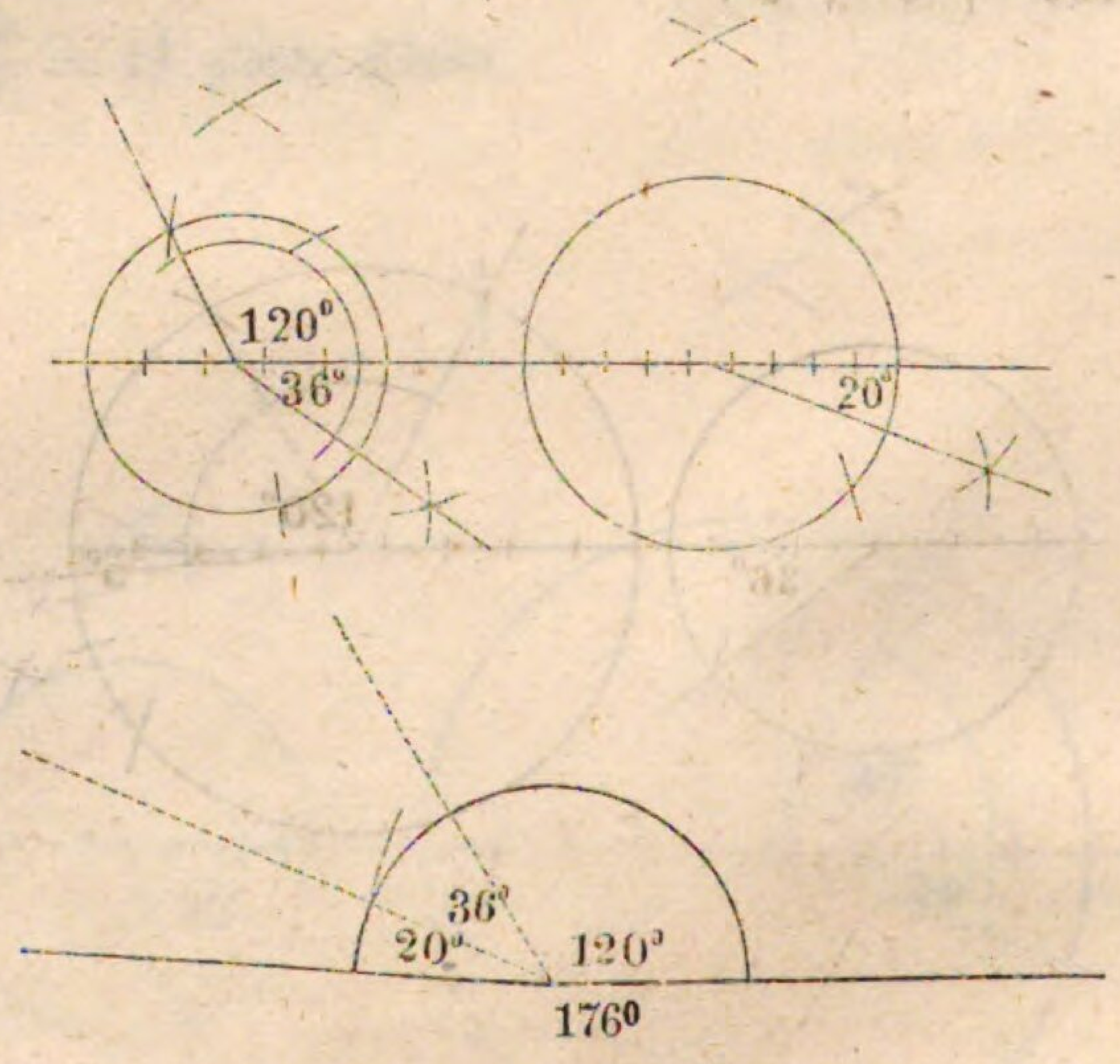
Rechnung:

$176^0 = 180^0 - 4^0.$

oder: $120^0 + 36^0 + 20^0.$

oder: $40^0 + 40^0 + 60^0 + 36^0.$

oder: $90^0 + 30^0 + 36^0 + 20^0.$

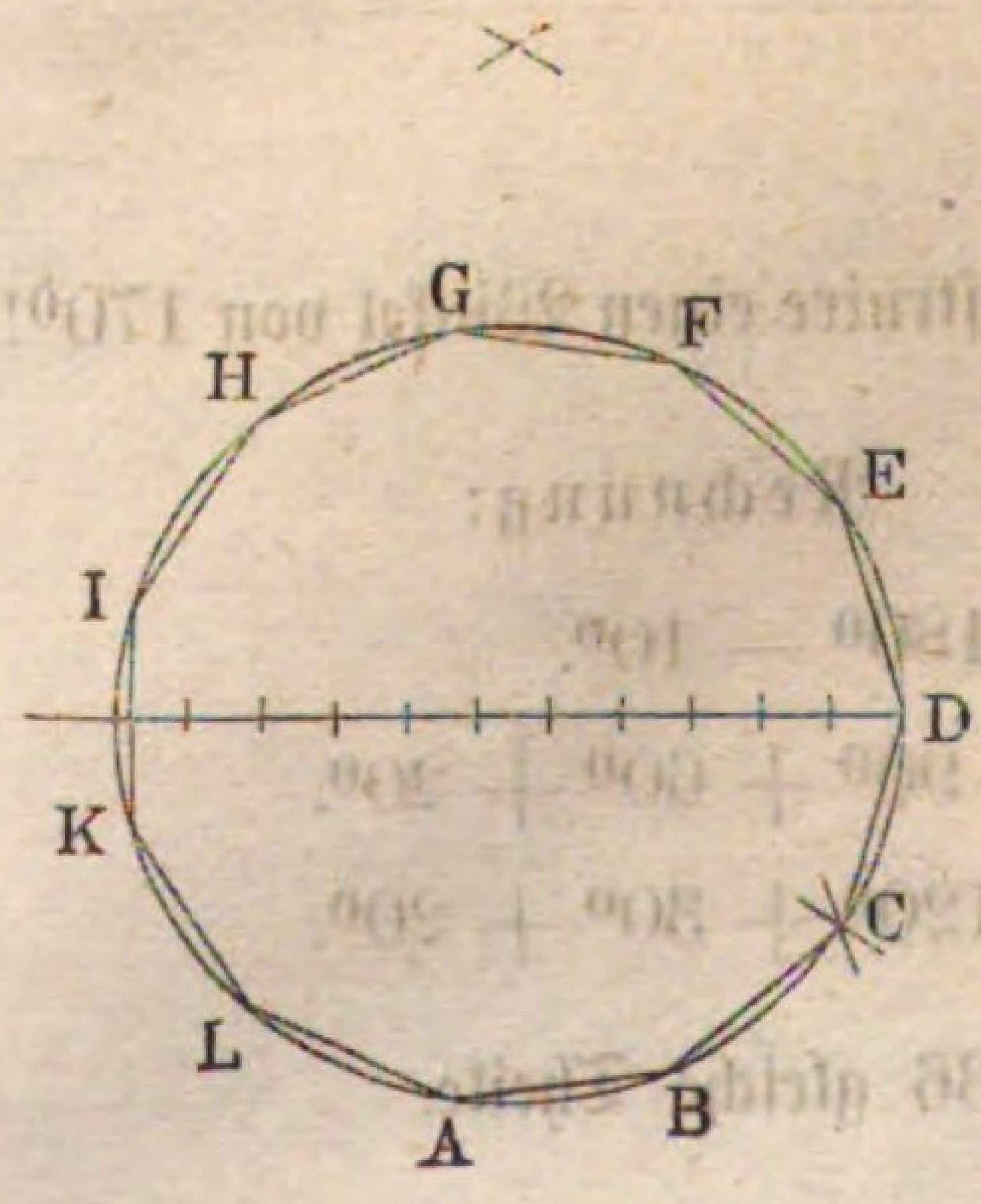


VIII. Zeichne jedes beliebige, regelmäßige Vieleck und zwar:

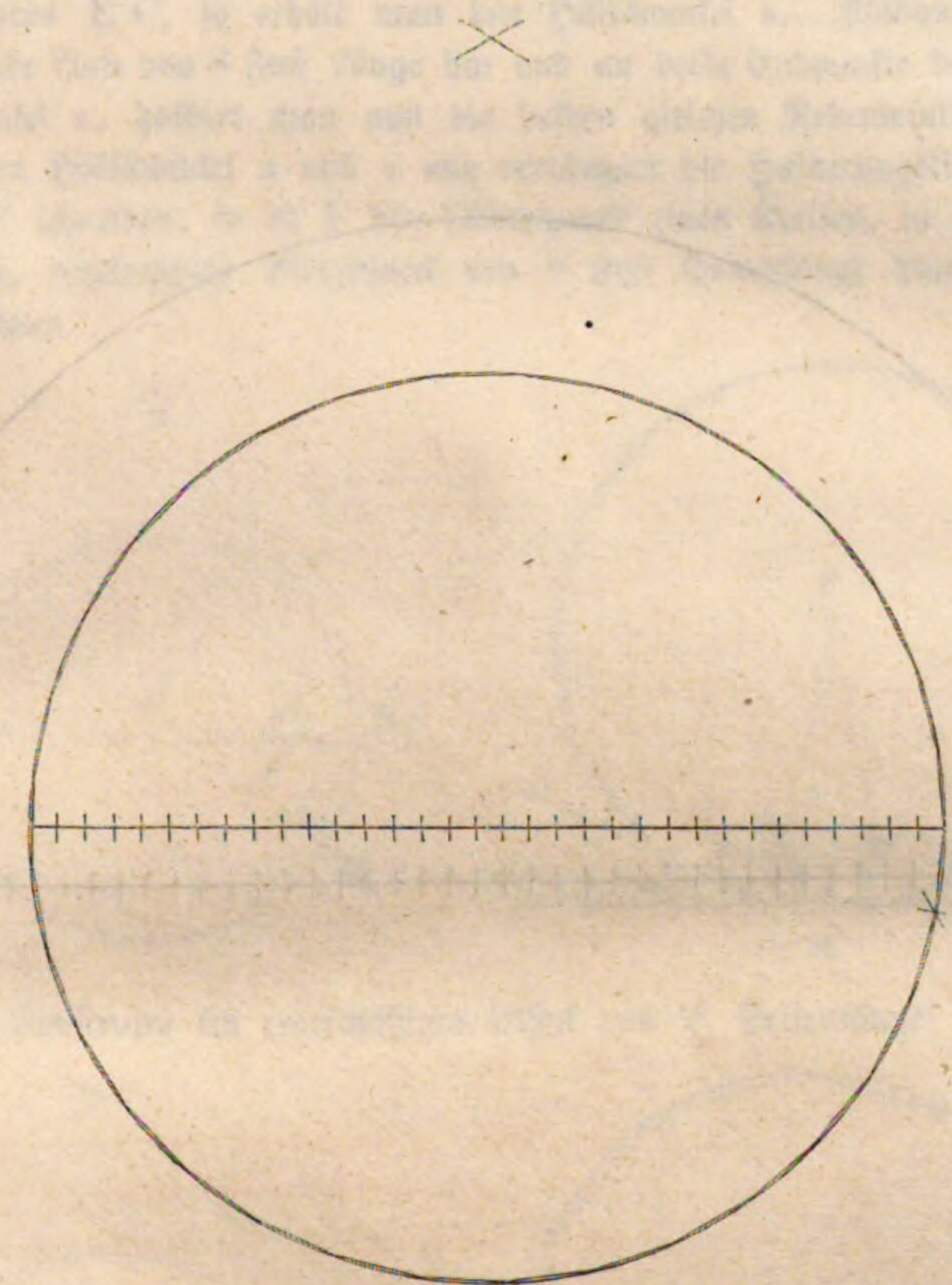
1) Ein regelmäßiges Elfeck!

Auflösung:

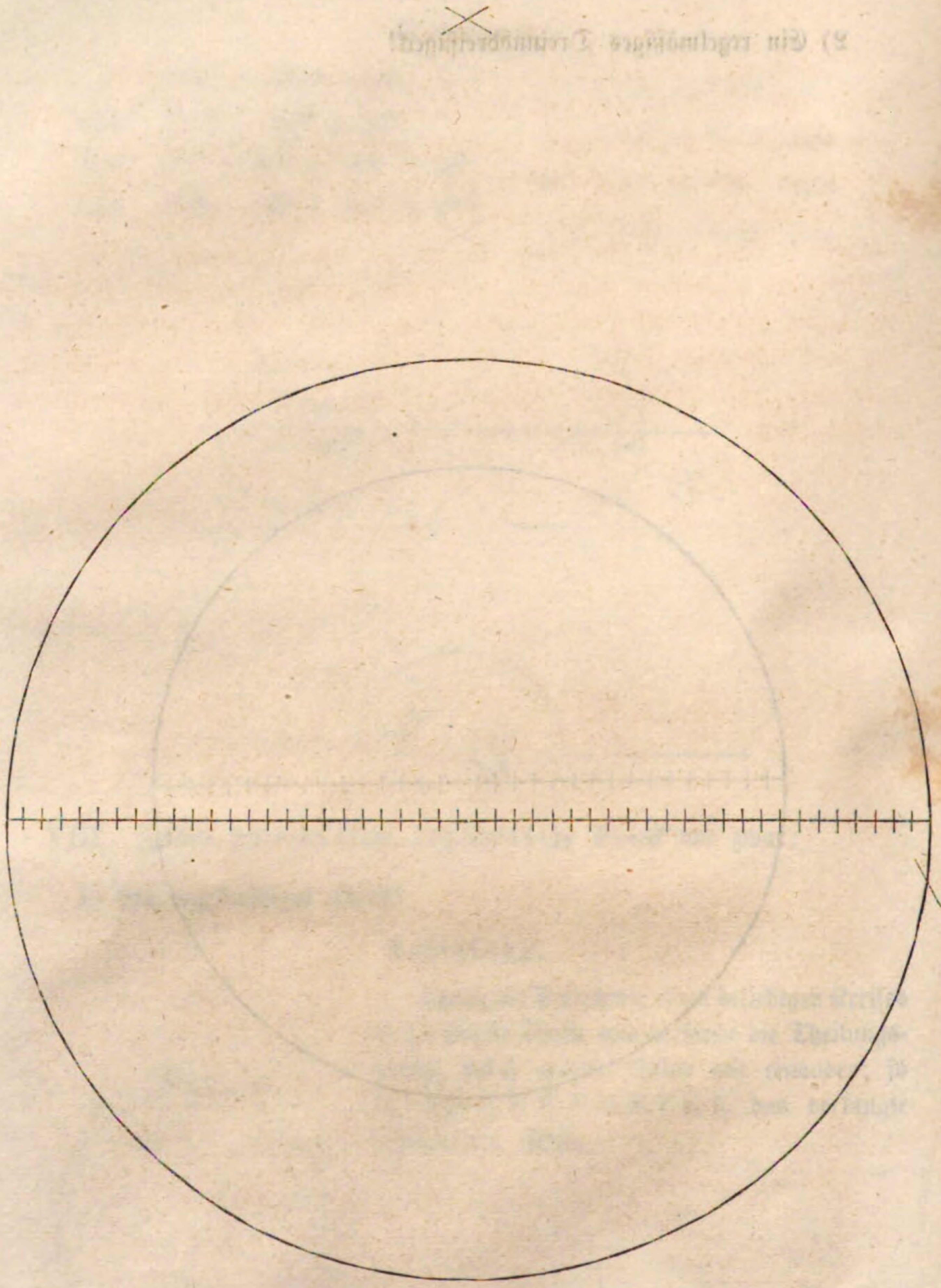
Theile die Peripherie eines beliebigen Kreises in 11 gleiche Theile und verbinde die Theilungspunkte durch gerade Linien mit einander; so ist A B C D E F G H I K L das verlangte regelmäßige Elfeck.



2) Ein regelmäßiges Dreiunddreißigeck!



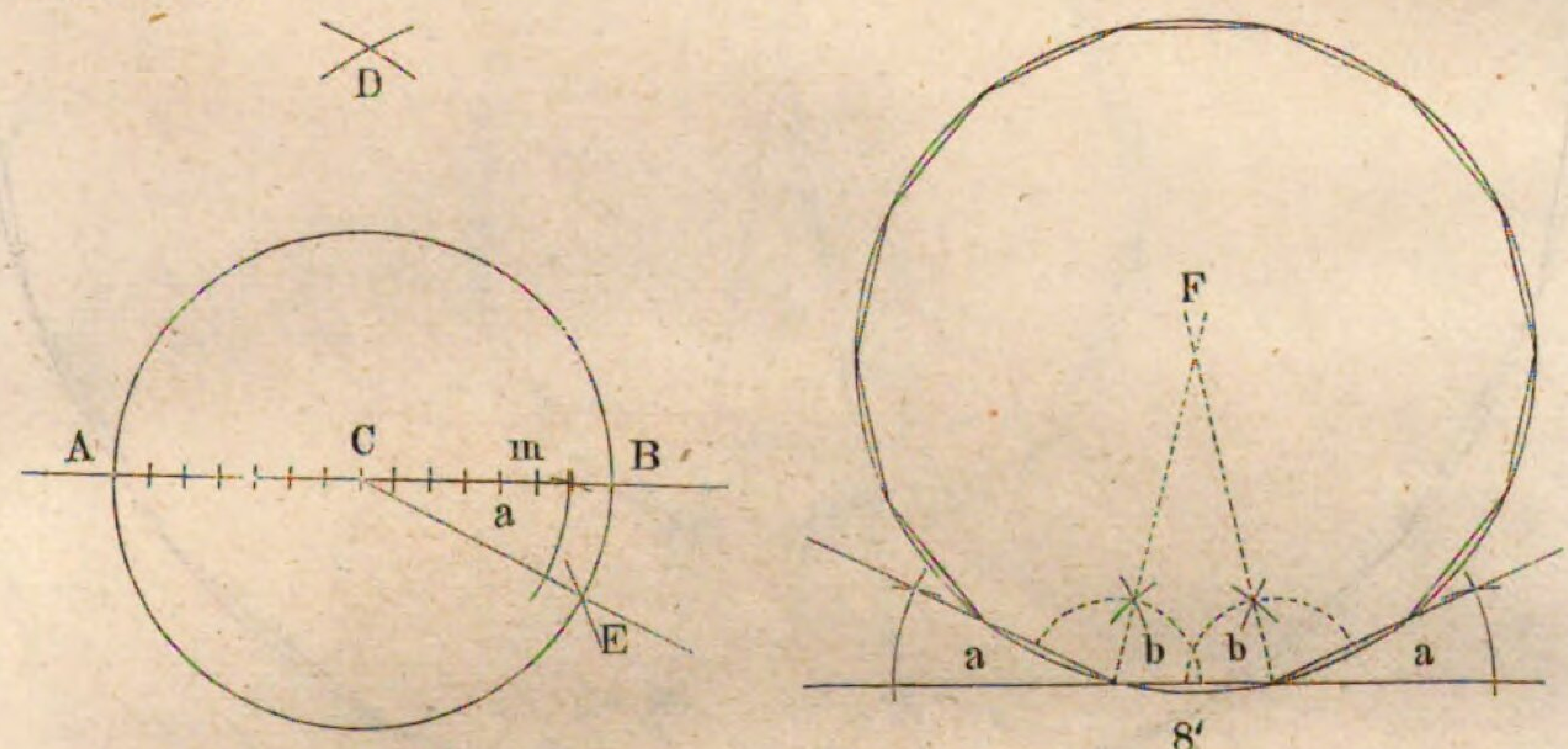
3) Ein reguläres Neunundvierzigeck!



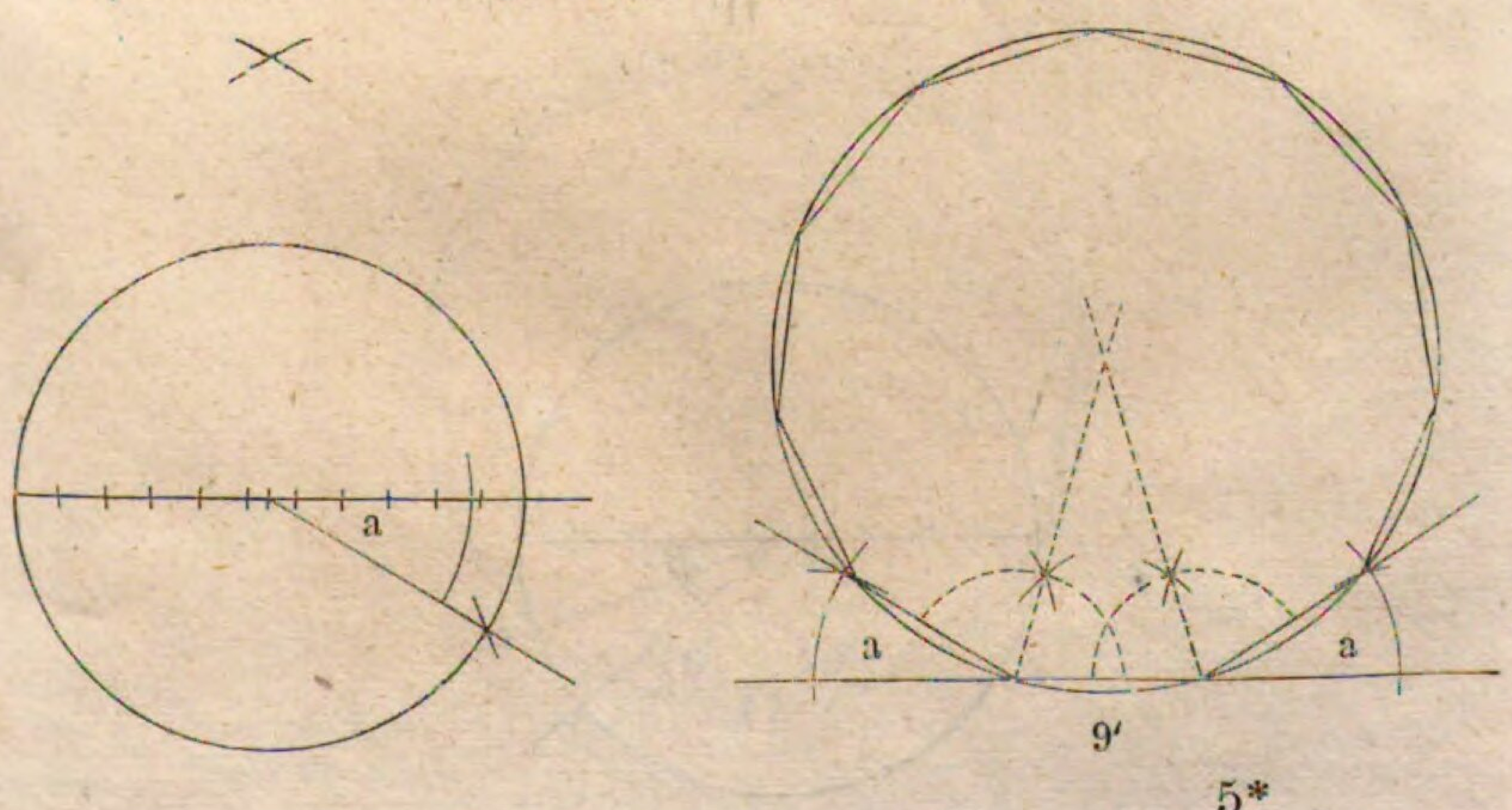
4) Construire ein regelmäßiges Vierzehneck von 8′ Seitenlänge!

Auflösung:

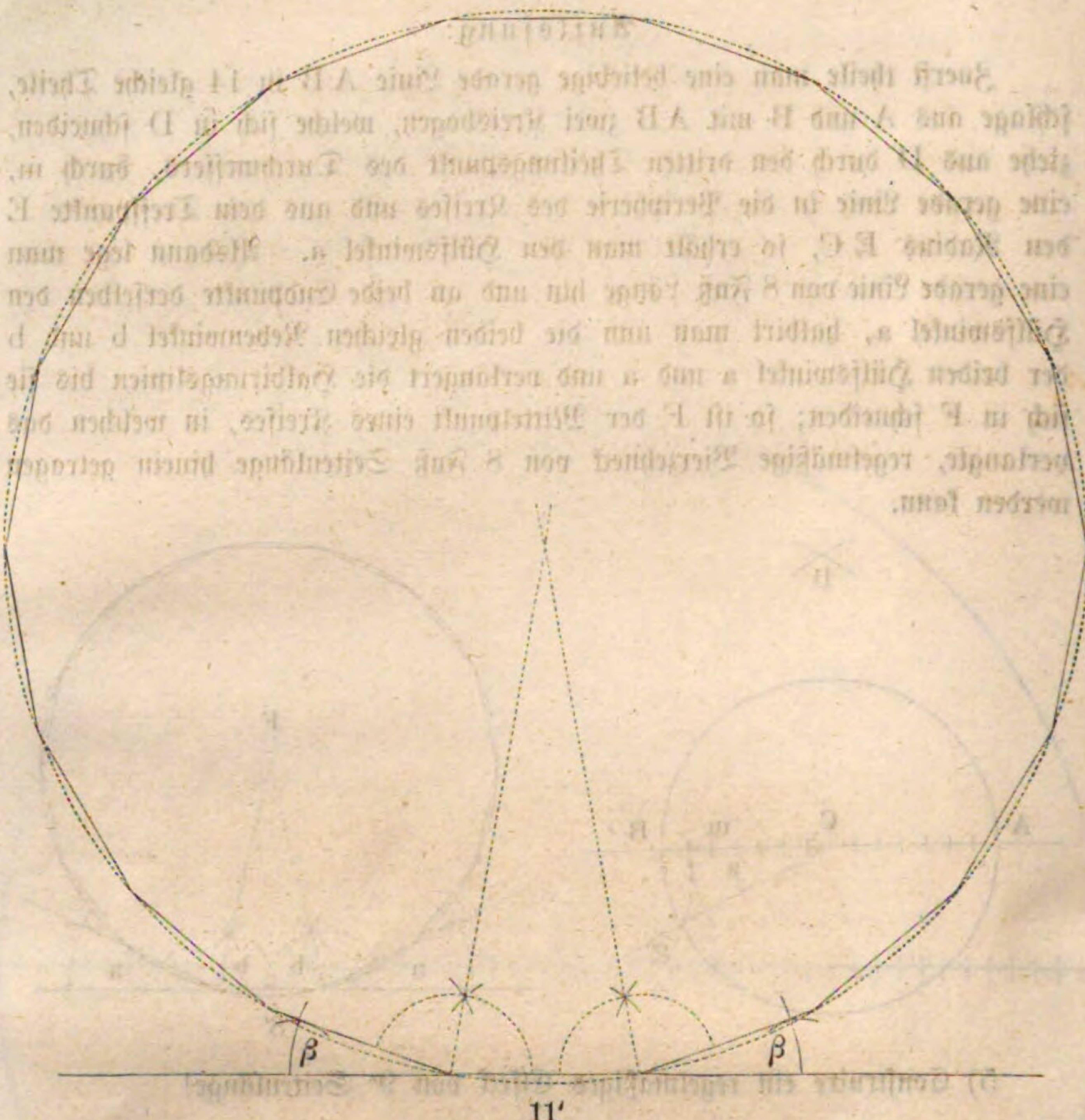
Zuerst theile man eine beliebige gerade Linie A B in 14 gleiche Theile, schlage aus A und B mit A B zwei Kreisbogen, welche sich in D schneiden, ziehe aus D durch den dritten Theilungspunkt des Durchmessers, durch m, eine gerade Linie in die Peripherie des Kreises und aus dem Treffpunkte E den Radius E C, so erhält man den Hülfswinkel a. Alsdann lege man eine gerade Linie von 8 Fuß Länge hin und an beide Endpunkte derselben den Hülfswinkel a, halbirt man nun die beiden gleichen Nebenwinkel b und b der beiden Hülfswinkel a und a und verlängert die Halbirungslinien bis sie sich in F schneiden; so ist F der Mittelpunkt eines Kreises, in welchen das verlangte, regelmäßige Vierzehneck von 8 Fuß Seitenlänge hinein getragen werden kann.

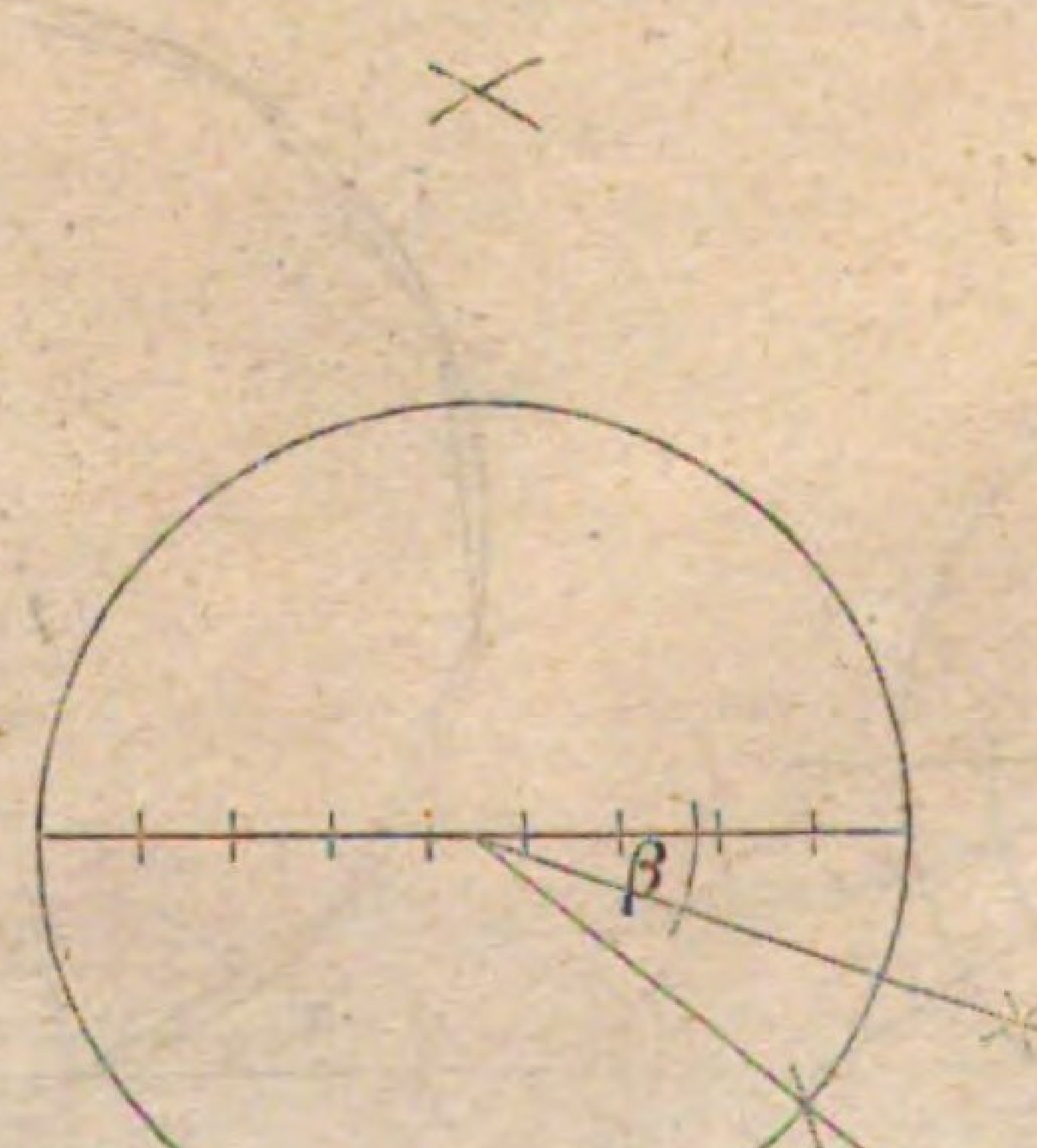


5) Construire ein regelmäßiges Elfeck von 9′ Seitenlänge!



6) Construire ein regelmäßiges Achtzehneck von 11′ Seitenlänge!

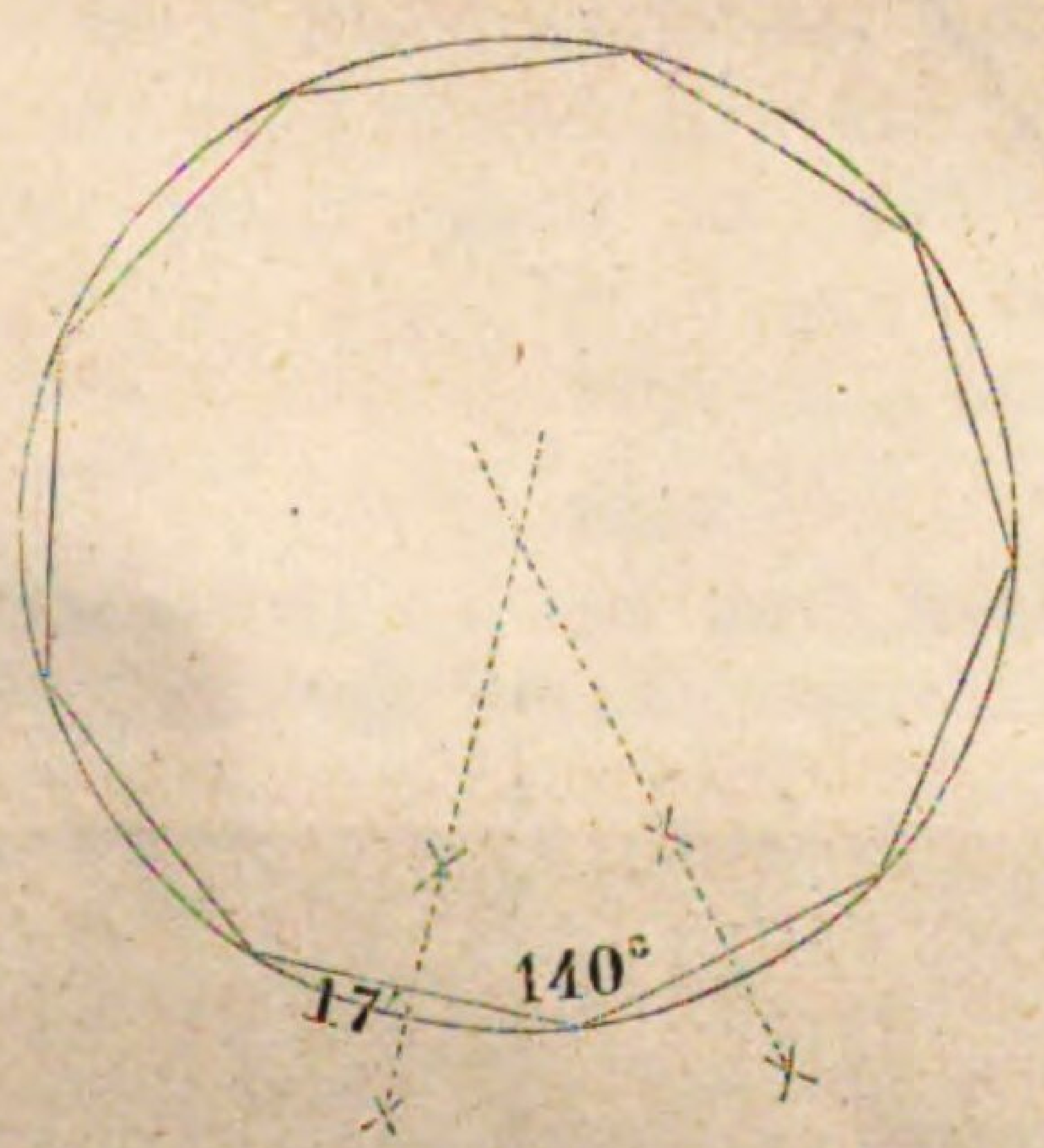




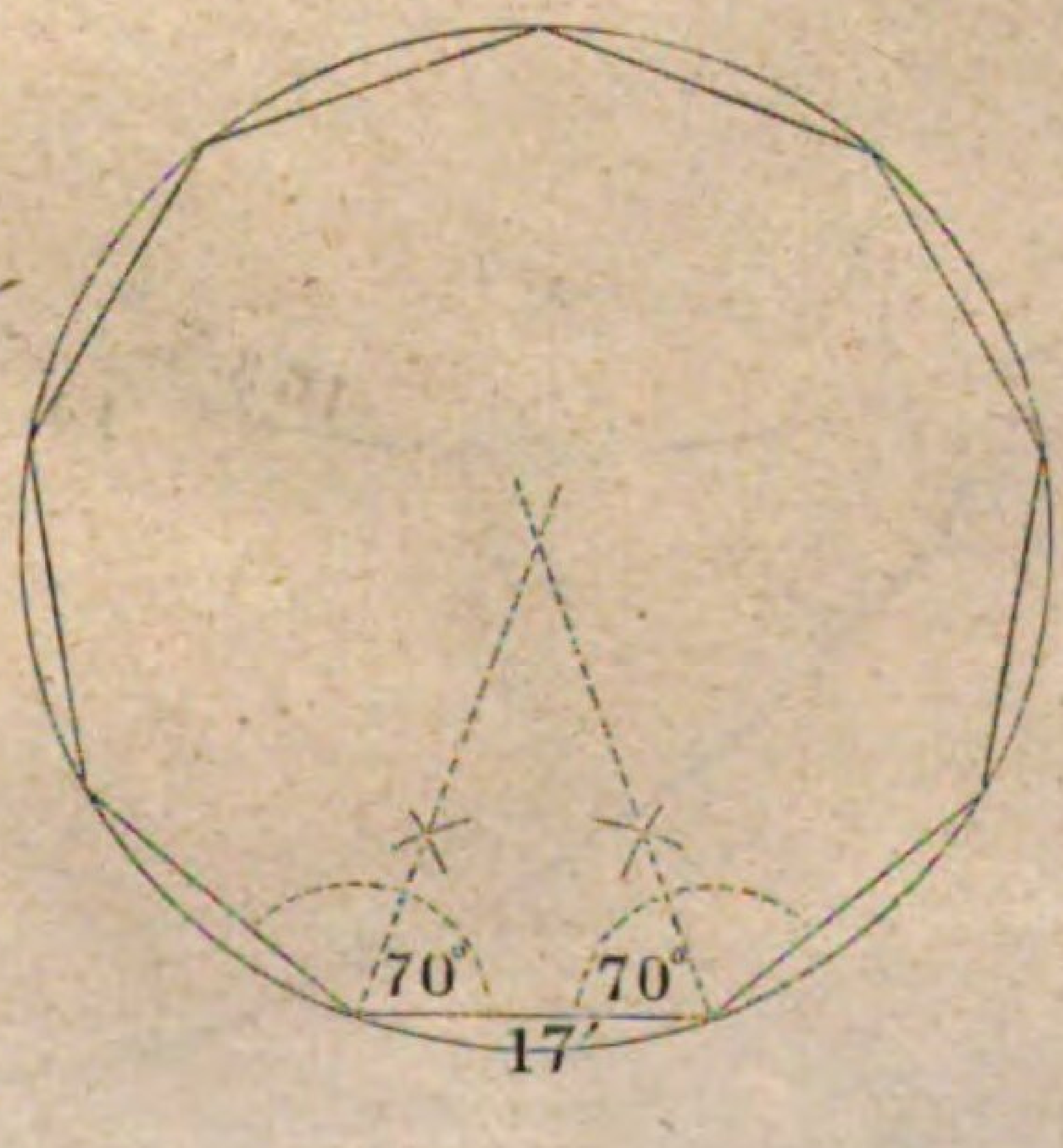
Der Polygonwinkel eines regelmäßigen Vielecks hat immer so viele Grade, wie die Figur Seiten hat, weniger 2, mal 180°, dividirt durch die Anzahl der Seiten, z. B. ist der Polygonwinkel eines regelmäßigen Vierundzwanzigecks $= \frac{22 \times 180^0}{24} = 165^0$.

Nehmen wir diesen planimetrischen Satz zu Hülfe, so können wir durch Berechnung des Polygonwinkels und durch Halbirung desselben jedes verlangte regelmäßige Vieleck von bestimmter Seitenlänge auch anders construiren; daher

$$\text{Polygonwinkel} = \frac{7 \times 180^0}{9} = 140^0.$$

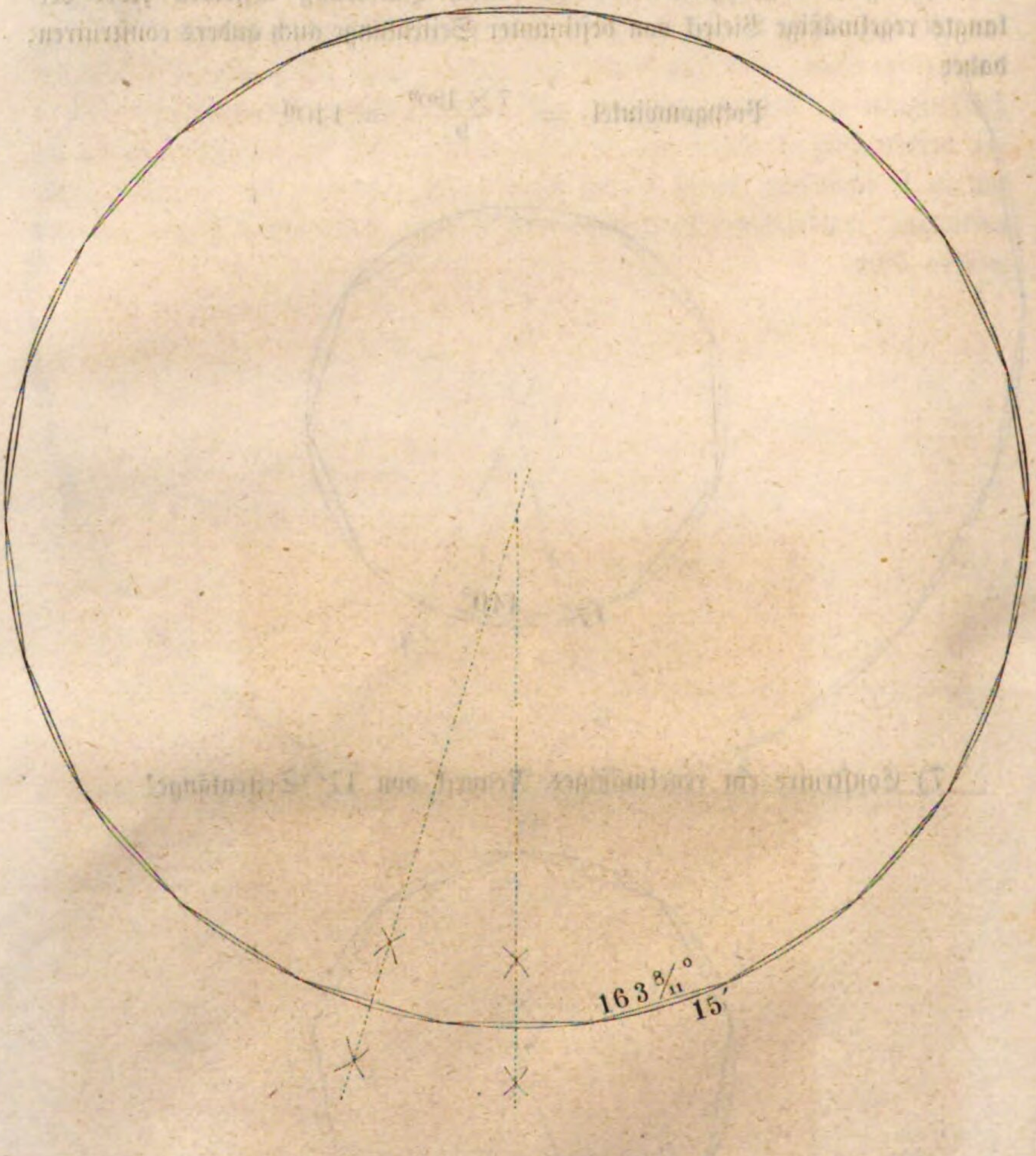


7) Construire ein regelmäßiges Neuneck von 17′ Seitenlänge!



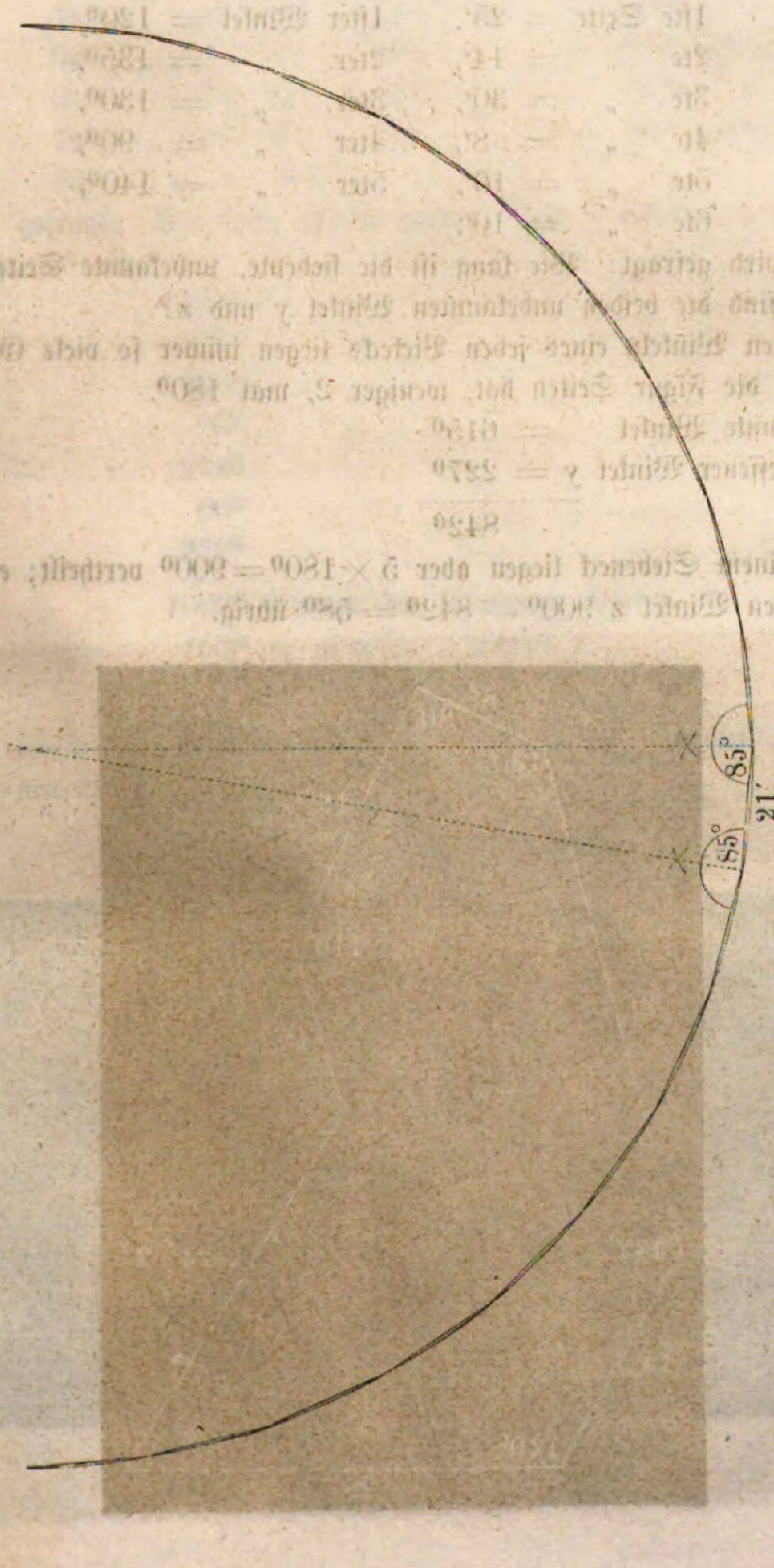
8) Construire ein regelmäßiges Zweiundzwanzigeck von 15′ Seitenlänge durch Hülfe der Halbirung zweier Seiten!

$$\text{Polygonwinkel} = \frac{20 \times 180^0}{22} = 163^8/_{11}{}^0.$$



9) Zeichne ein regelmäßiges Sechsunddreißigeck von 21′ Seitenlänge mit Hülfe des halben Polygonwinkels!

$$\text{Polygonwinkel} = \frac{34 \times 180^0}{36} = 170^0.$$



Hälfte des Sechsunddreißigecks.

IX. Zeichne jedes beliebige unregelmäßige Vieleck, wenn angegeben sind die Längen der Seiten bis auf eine und die Größe der Winkel bis auf zwei, und zwar:

1) Ein Siebeneck nach folgenden Bestimmungen:

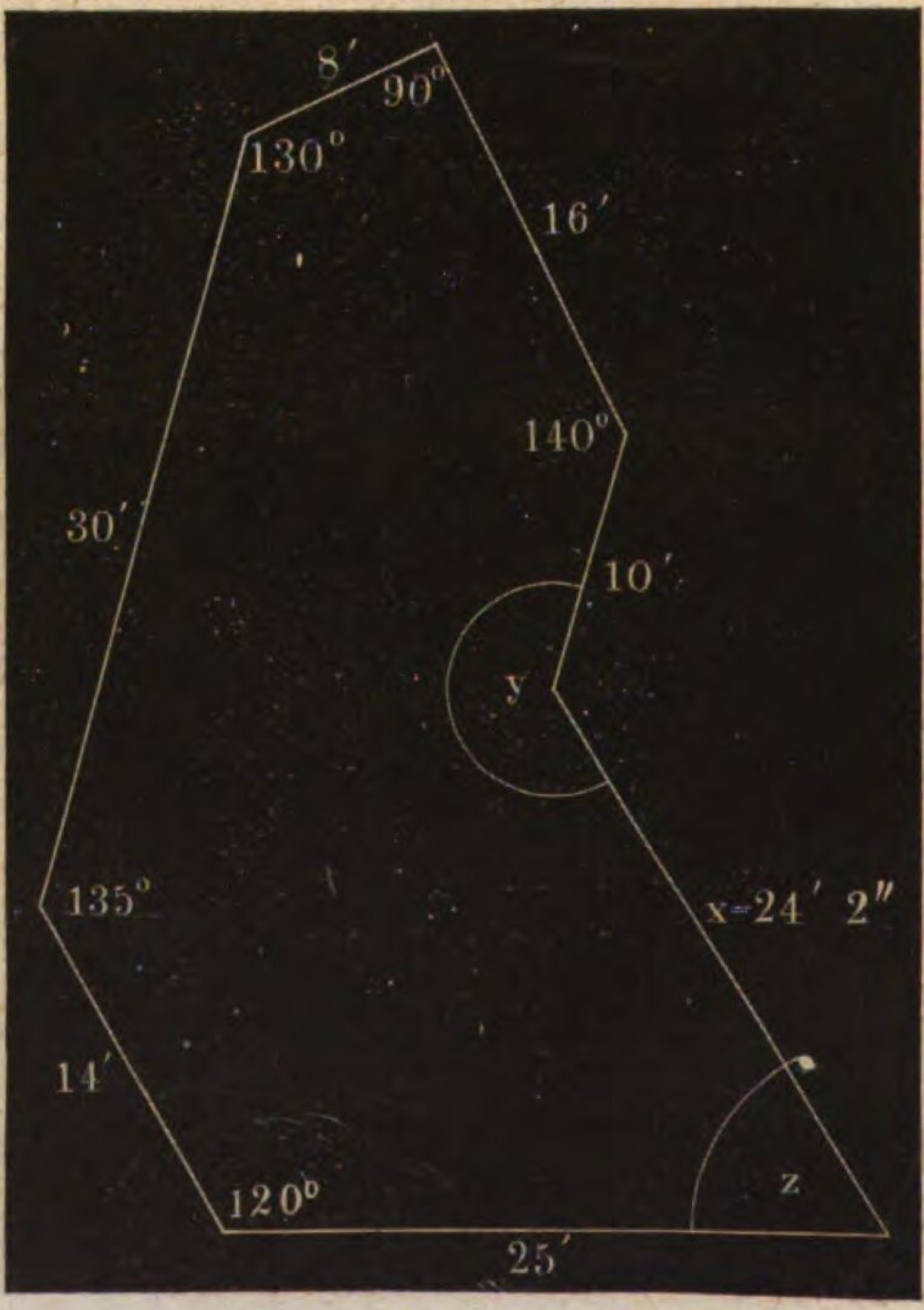
1ste Seite	= 25′,	1ster Winkel	= 120°,
2te „	= 14′,	2ter „	= 135°,
3te „	= 30′,	3ter „	= 130°,
4te „	= 8′,	4ter „	= 90°,
5te „	= 16′,	5ter „	= 140°,
6te „	= 10′.		

Es wird gefragt: Wie lang ist die siebente, unbekannte Seite x, und wie groß sind die beiden unbekannten Winkel y und z?

In den Winkeln eines jeden Vielecks liegen immer so viele Grade vertheilt, wie die Figur Seiten hat, weniger 2, mal 180°.

Bekannte Winkel = 615°
Gemessener Winkel y = 227°
842°

In einem Siebeneck liegen aber $5 \times 180° = 900°$ vertheilt; es bleiben also für den Winkel z $900° - 842° = 58°$ übrig.



2) Ein Neuneck nach folgenden Angaben:

1ste Seite	$= 29'$,	1ster Winkel	$= 125^0$,
2te „	$= 12'$,	2ter „	$= 131^0$,
3te „	$= 16'$,	3ter „	$= 105^0$,
4te „	$= 22'$,	4ter „	$= 90^0$,
5te „	$= 14'$,	5ter „	$= 82^0$ außen,
6te „	$= 20'$,	6ter „	$= 90^0$,
7te „	$= 8'$,	7ter „	$= 90^0$ außen,
8te „	$= 4'$;		

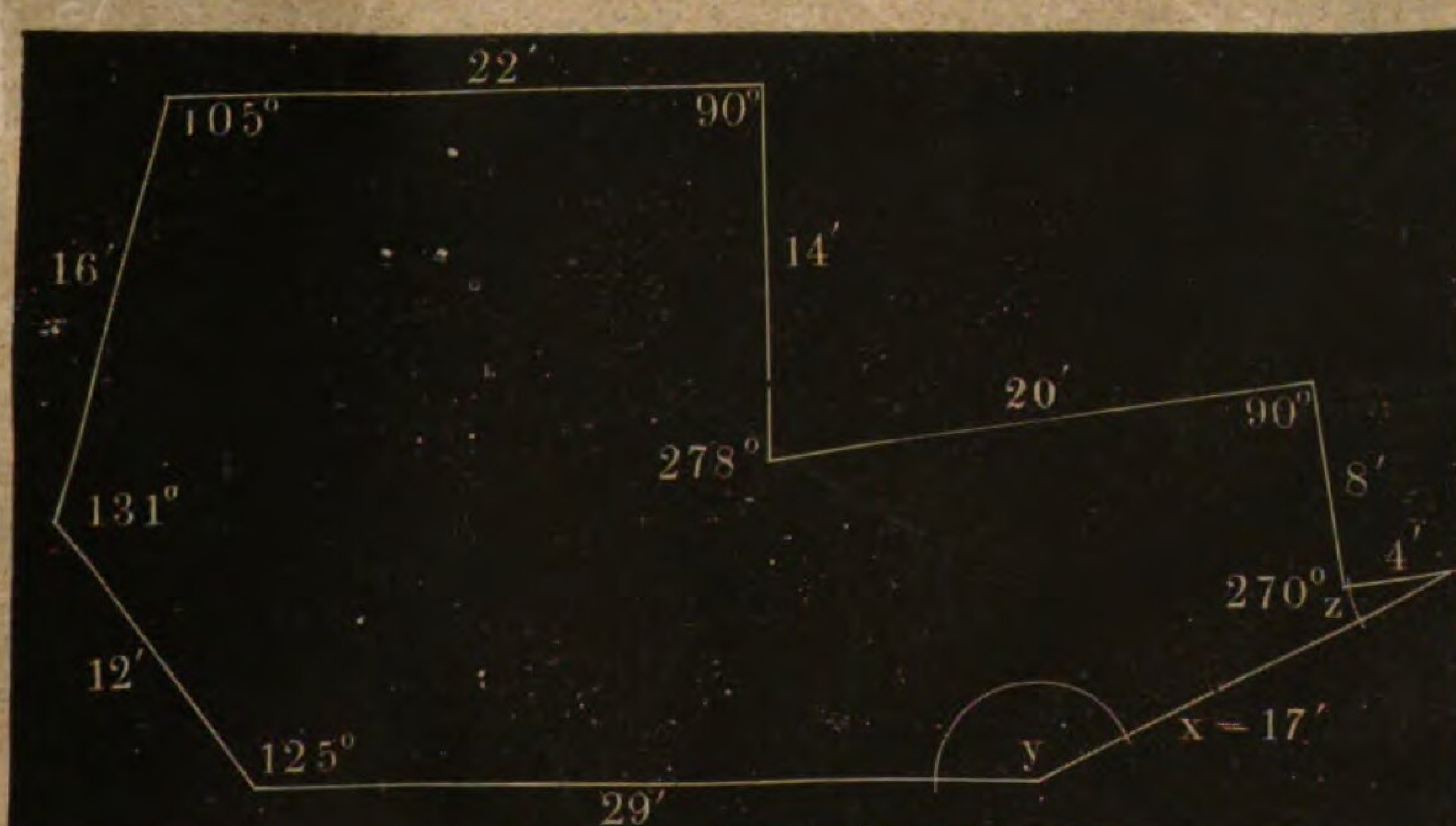
es wird gefragt: Wie lang ist die neunte Seite x und wie groß sind die Winkel y und z?

125^0
131^0
105^0
90^0
278^0
90^0
270^0

1089^0 Summe der bekannten Winkel
152^0 = gemessener Winkel y

1241^0.

In einem Neuneck liegen aber $7 \times 180^0 = 1260^0$ vertheilt; es bleiben also für den Winkel z noch $1260^0 - 1241^0 = 19^0$ übrig.



3) Ein Vierzehneck, in welchem sind:

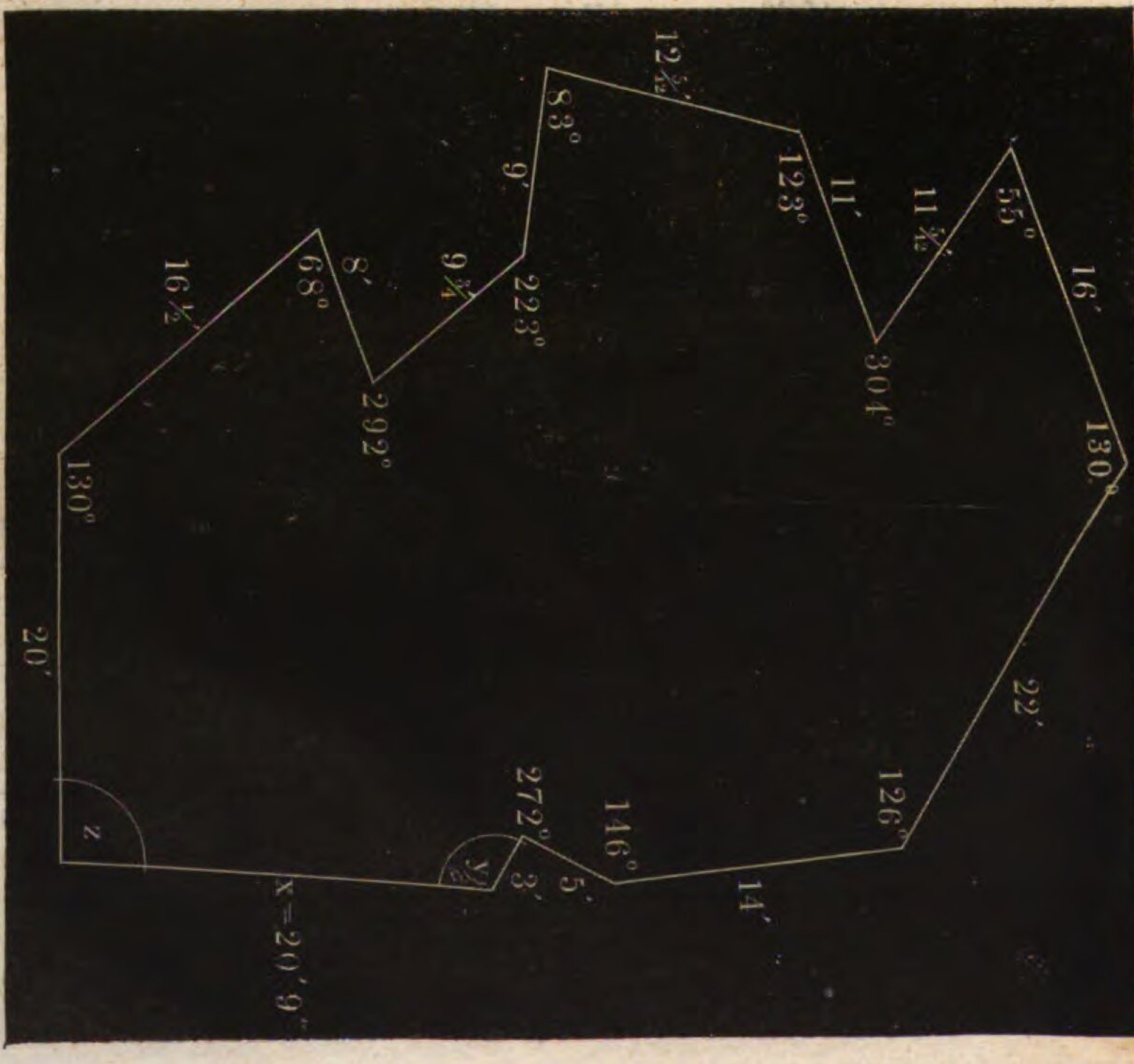
1ste Seite	$= 20'$,	1ster Winkel	$= 130^0$,
2te „	$= 16^1/_2{}'$,	2ter „	$= 68^0$,
3te „	$= 8'$,	3ter „	$= 292^0$,
4te „	$= 9^3/_4{}'$,	4ter „	$= 223^0$,
5te „	$= 9'$,	5ter „	$= 83^0$,
6te „	$= 12^5/_{12}{}'$,	6ter „	$= 123^0$,
7te „	$= 11'$,	7ter „	$= 304^0$,
8te „	$= 11^5/_{12}{}'$,	8ter „	$= 55^0$,
9te „	$= 16'$,	9ter „	$= 130^0$,
10te „	$= 22'$,	10ter „	$= 126^0$,
11te „	$= 14'$,	11ter „	$= 146^0$,
12te „	$= 5'$,	12ter „	$= 272^0$,
13te „	$= 3'$;		

es wird gefragt: Wie lang ist die Seite x und wie groß sind die beiden Winkel y und z?

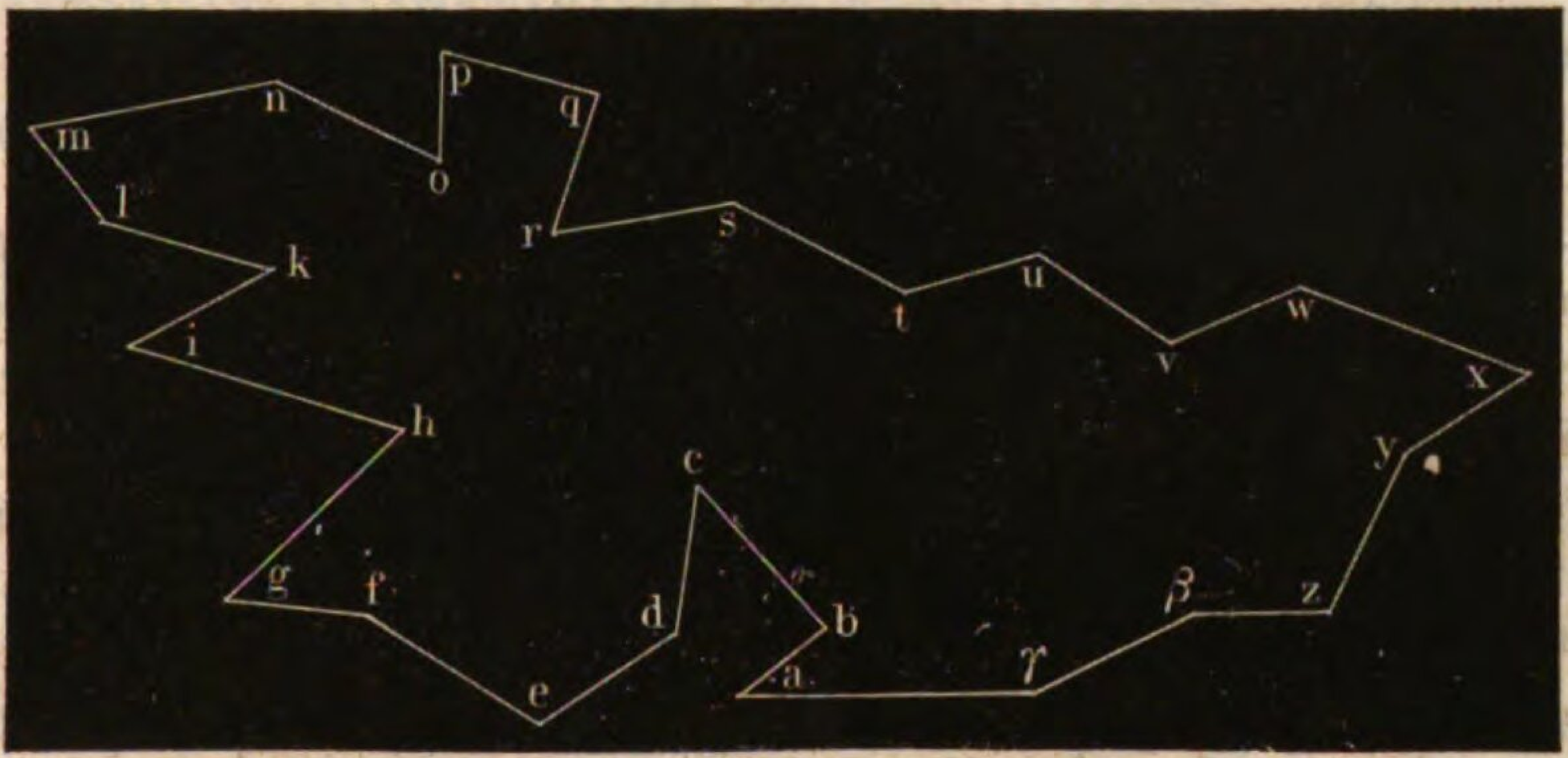
$1952^0 =$ Summe der bekannten Winkel.

Gemessener Winkel $z = 94^0$

Winkel $y = 2160^0 - (1952^0 + 94^0) = 114^0$.



X. Zeichne ein beliebiges unregelmäßiges Siebenundzwanzigeck, miß die Winkel mit dem Transporteur und bestimme durch Rechnung: Wie viele Grade vermessen sind!



Winkel	a = 31°	Winkel	p = 76°
„	b = 282°	„	q = 90°
„	c = 305°	„	r = 295°
„	d = 129°	„	s = 143°
„	e = 122°	„	t = 223°
„	f = 200°	„	u = 130°
„	g = 52°	„	v = 236°
„	h = 300°	„	w = 139°
„	i = 48°	„	x = 54°
„	k = 313°	„	y = 214°
„	l = 146°	„	z = 115°
„	m = 60°	„	β = 204°
„	n = 145°	„	γ = 154°
„	o = 292°		Summa = 4498°

In einem Siebenundzwanzigeck liegen aber $25 \times 180^0 = 4500^0$ vertheilt; also ist der Fehler der Messung $= 4500^0 - 4498^0 = 2^0$.

II. Abschnitt.

Von der Congruenz der geradlinigen Figuren.

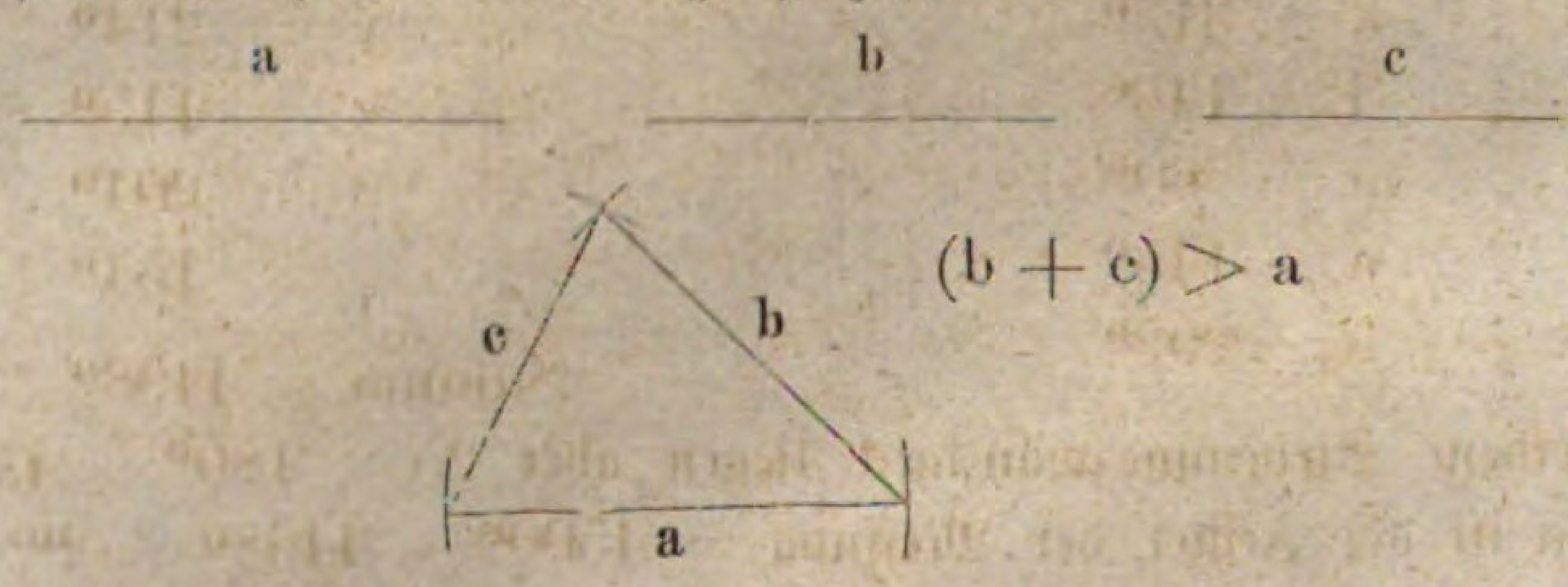
§. 1.

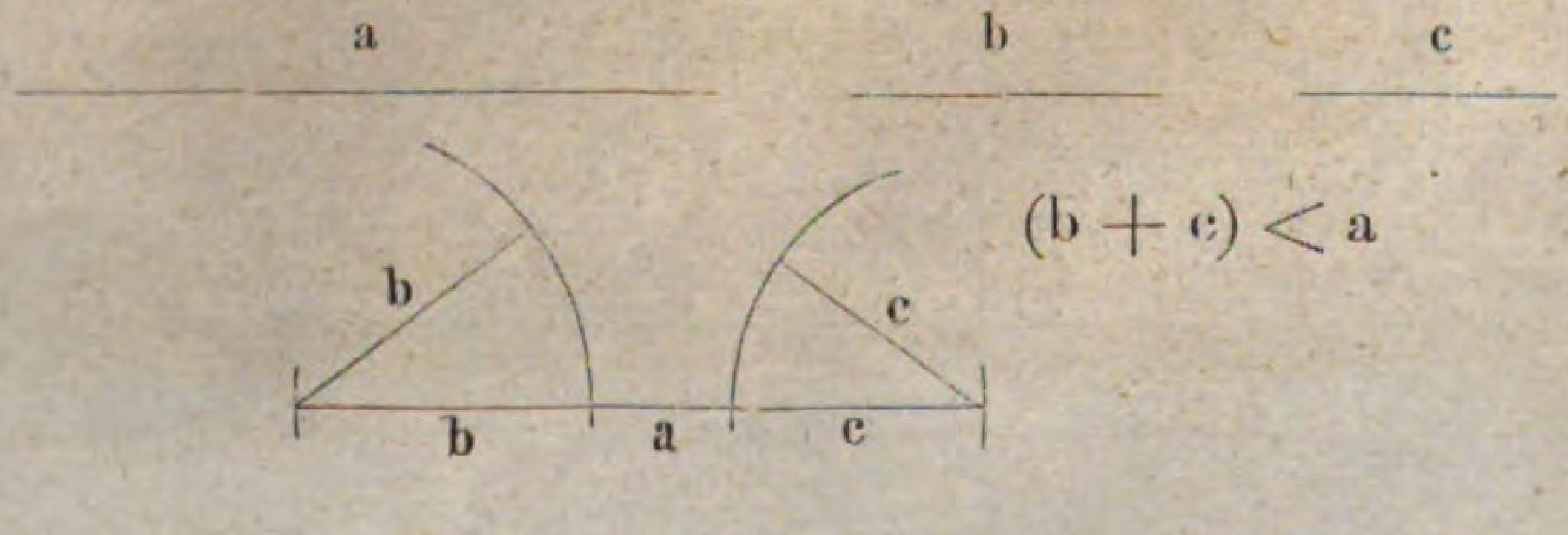
Entstehung, Arten und wesentliche Eigenschaften der Dreiecke.

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir von den Punkten, Linien und Winkeln gehandelt, d. h., wir haben uns mit den drei wesentlichen Bestandtheilen der Figuren bekannt gemacht und zugleich nachgewiesen, wie aus diesen drei Elementen jede geradlinige Figur zusammengesetzt werden könne. In diesem zweiten Abschnitt soll nunmehr die Frage beantwortet werden: durch wie viele und durch welche Stücke ist jede geradlinige Figur vollständig bestimmt? Diese Frage wird durch die Lehre von der Congruenz der geradlinigen Figuren beantwortet. Um die aufgestellte Frage zu beantworten, fangen wir nunmehr unsere Untersuchung mit der einfachsten geradlinigen Figur, das ist, mit dem Dreieck, an und beantworten zunächst in diesem Paragraphen die Fragen:

1) Wie entsteht ein Dreieck?
2) Welche Arten von Dreiecken gibt es?
3) Welche wesentlichen Eigenschaften haben sie?

Ein Dreieck entsteht, wenn man eine Fläche durch drei gerade Linien begrenzt, von denen aber immer zwei zusammengenommen länger sein müssen, als die dritte. Wird diese Bedingung erfüllt, so läßt sich jedesmal aus drei geraden Linien ein Dreieck construiren; wird diese Bedingung aber nicht erfüllt, so ist die Construction unmöglich, z. B.

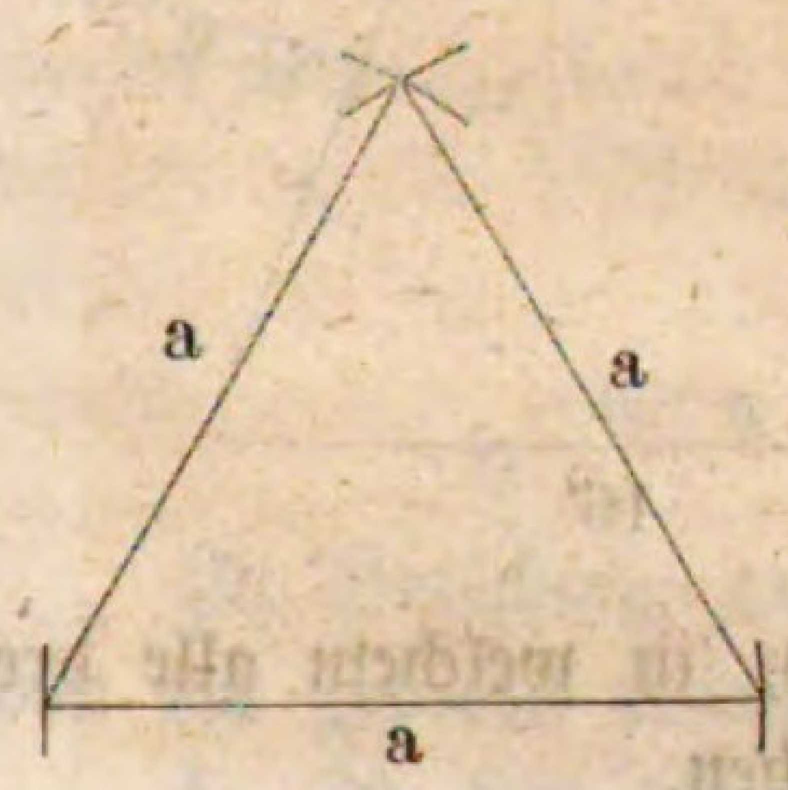




Wenn die geraden Linien zur Begränzung von Figuren gebraucht werden, so erhalten sie den Namen Seiten. Ein Dreieck ist also eine solche geradlinige Figur, welche aus drei Seiten und drei Winkeln gebildet ist. Sehen wir zunächst auf die Seiten der Dreiecke, so können sie demnach sein: gleichseitig, gleichschenkelig und ungleichseitig.

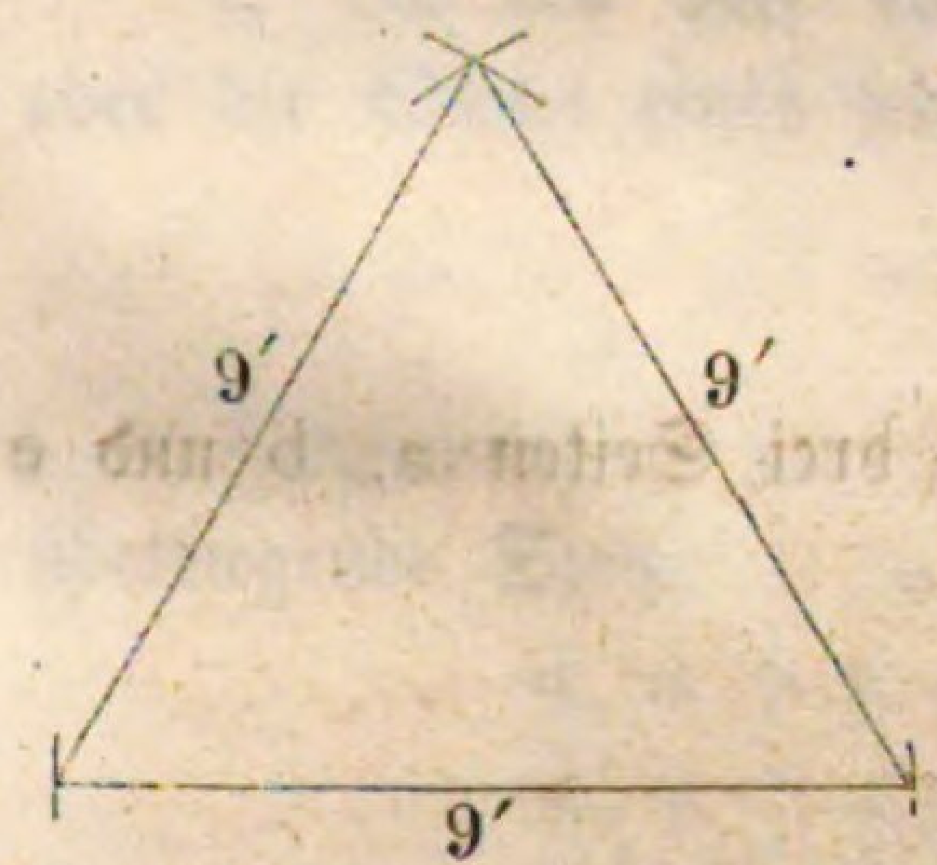
Ein gleichseitiges Dreieck ist ein solches, welches drei gleich lange Seiten und drei gleich große Winkel hat.

Aufgaben:

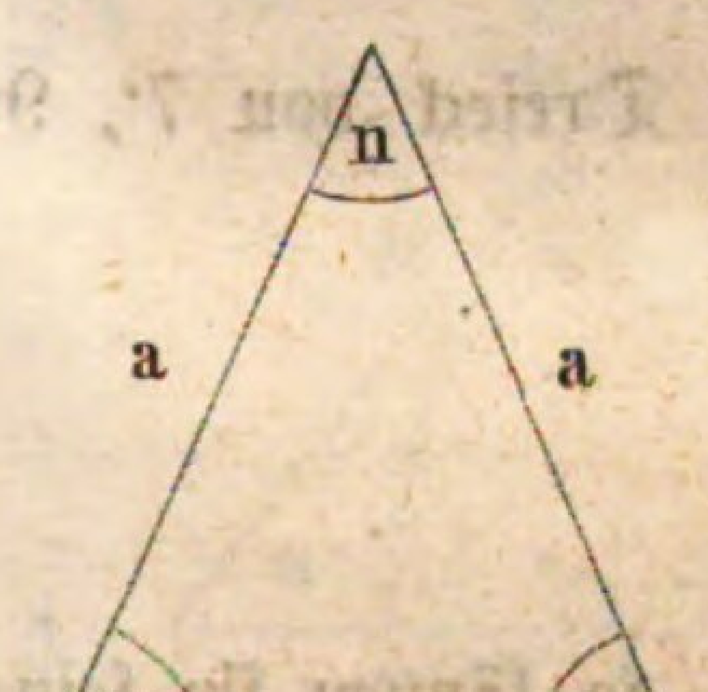


1) Construire aus der Linie a ein gleichseitiges Dreieck!

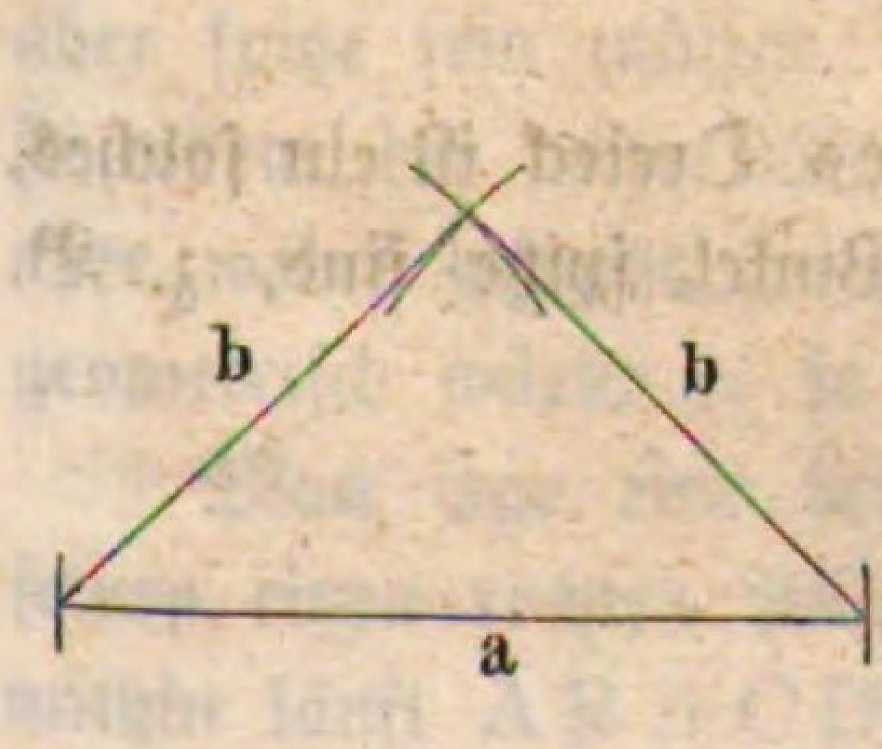


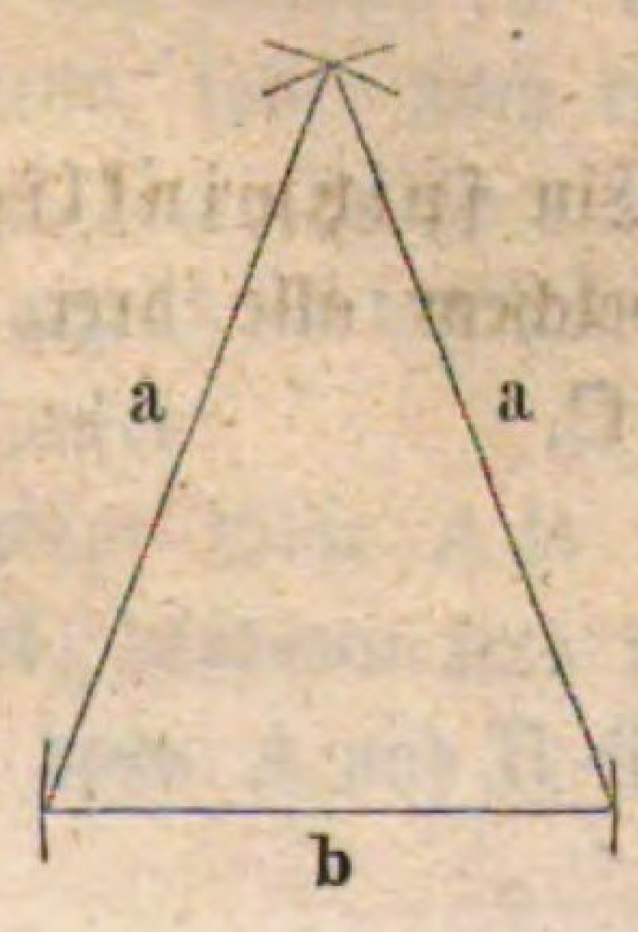


2) Construire ein gleichseitiges Dreieck von 9′ Seitenlänge!



Ein gleichschenkeliges Dreieck ist ein solches, in welchem zwei Seiten gleich lang, die dritte aber diesen ungleich ist; von den drei Winkeln sind die beiden an der ungleichen Grundlinie einander gleich, der dritte Winkel aber, welcher von den gleichen Seiten eingeschlossen ist, ist diesen beiden ungleich.



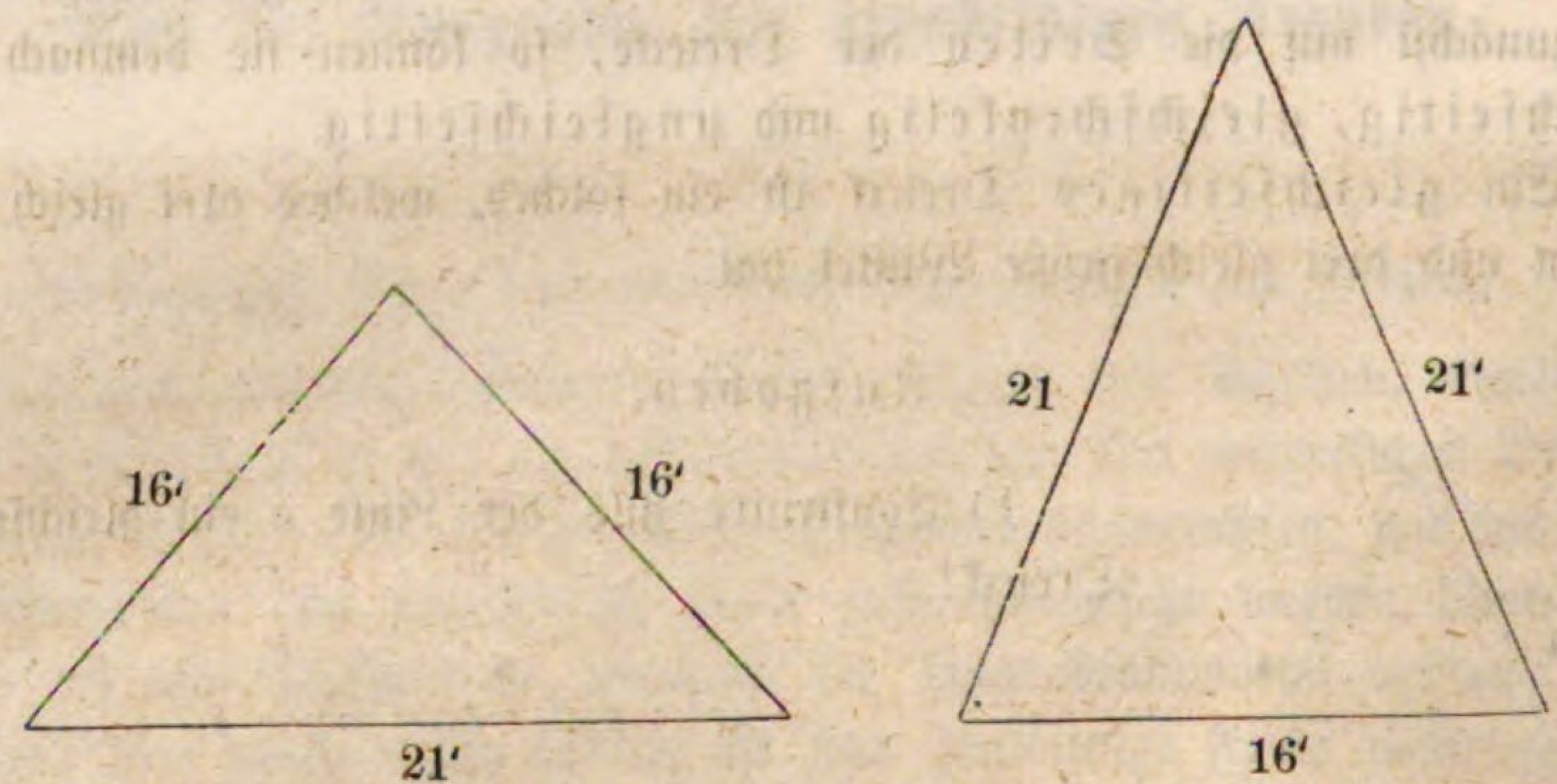


Aufgaben:

1) Construire aus den beiden Linien a und b ein gleichschenkeliges Dreieck!

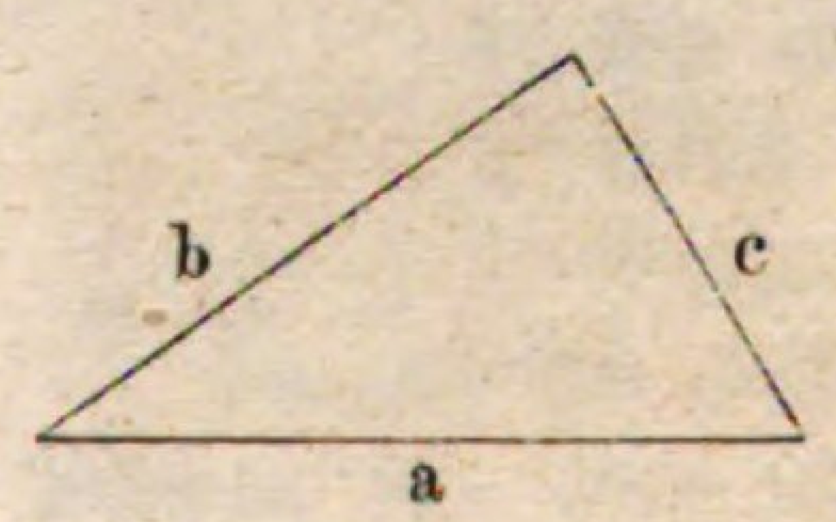


2) Construire aus zwei Linien von 16′ und 21′ zwei gleichschenkelige Dreiecke, in denen ein Mal 16′ und ein Mal 21′ als ungleiche Grundlinien genommen werden.

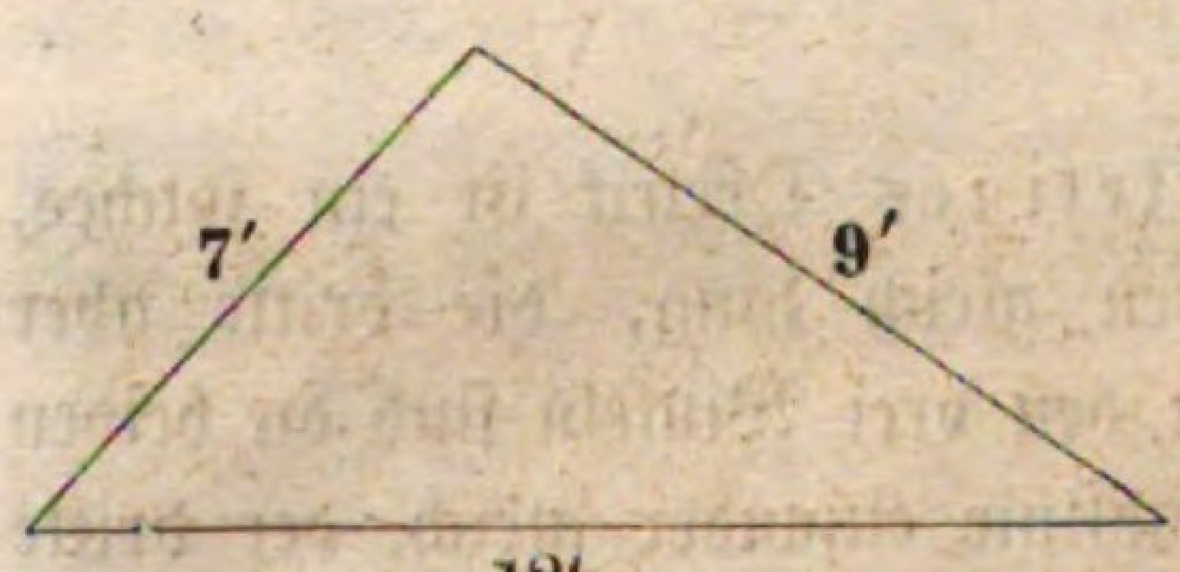


Ein ungleichseitiges Dreieck ist ein solches, in welchem alle drei Seiten und alle drei Winkel eine ungleiche Größe haben.

Aufgaben.

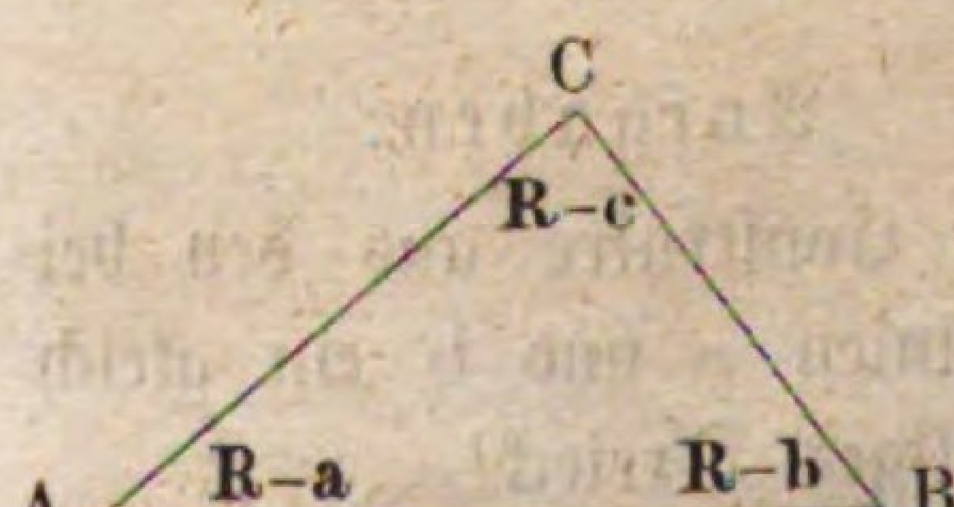


1) Construire aus den drei Seiten a, b und c ein ungleichseitiges Dreieck.

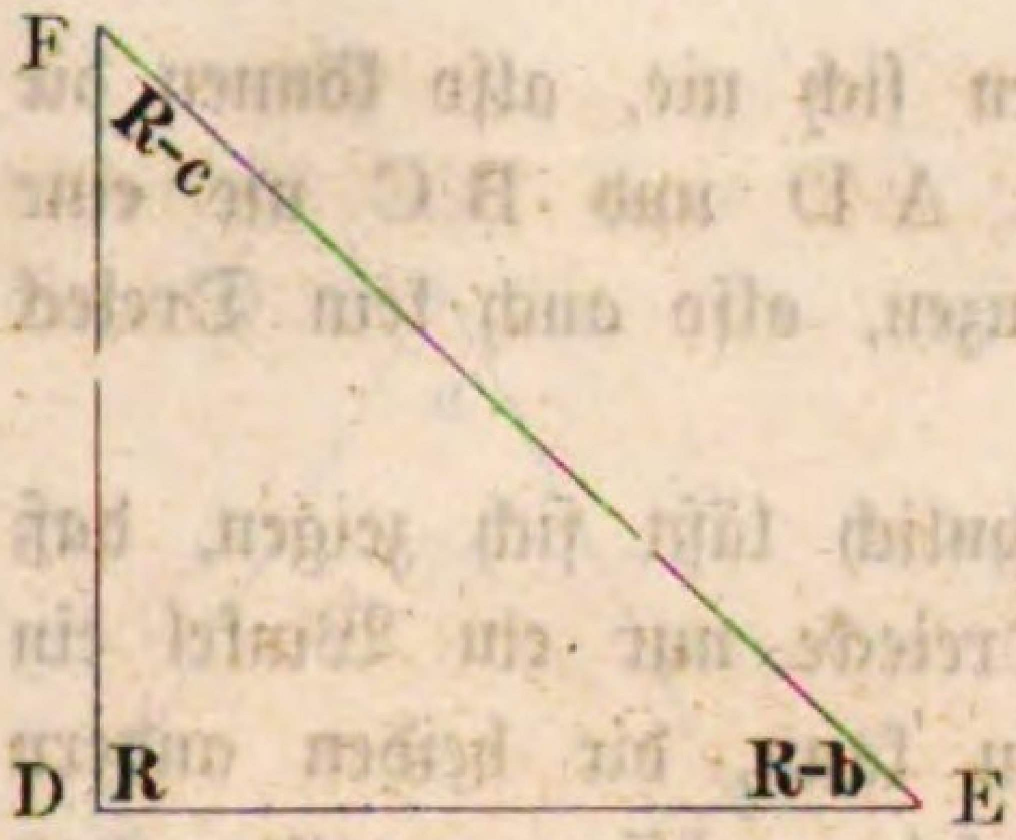


2) Construire ein Dreieck von 7′, 9′ und 12′ Seitenlänge.

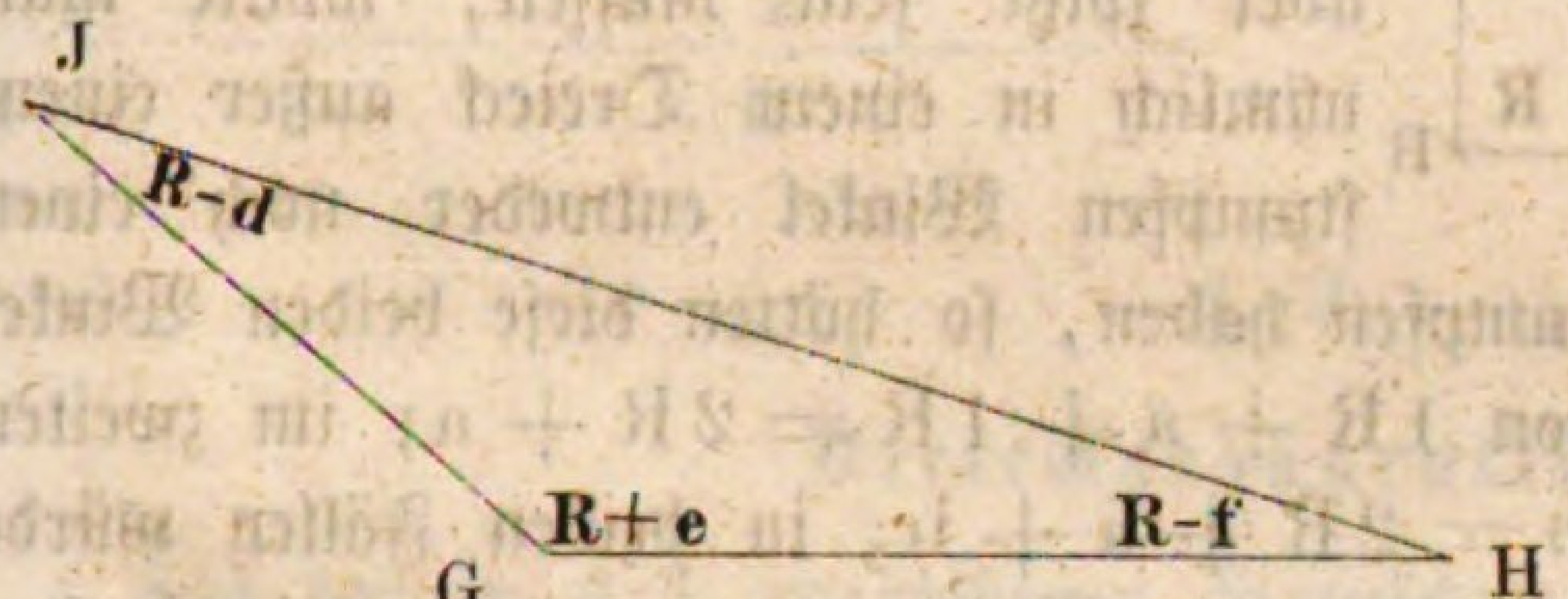
Sehen wir zweitens auf die Winkel der Dreiecke, so können sie sein: spitzwinklig, rechtwinklig und stumpfwinklig.



Ein spitzwinkliges Dreieck ist ein solches, in welchem alle drei Winkel spitze sind, z. B. A B C.



Ein rechtwinkliges Dreieck ist ein solches, in welchem ein Winkel ein rechter, die beiden andern aber spitze sind, z. B. DEF.



Ein stumpfwinkliges Dreieck ist ein solches, in welchem ein Winkel ein stumpfer, die beiden andern aber spitze sind, z. B. GHJ.

In Beziehung auf die Winkel der Dreiecke sind folgende zwei Lehrsätze von der größten Wichtigkeit:

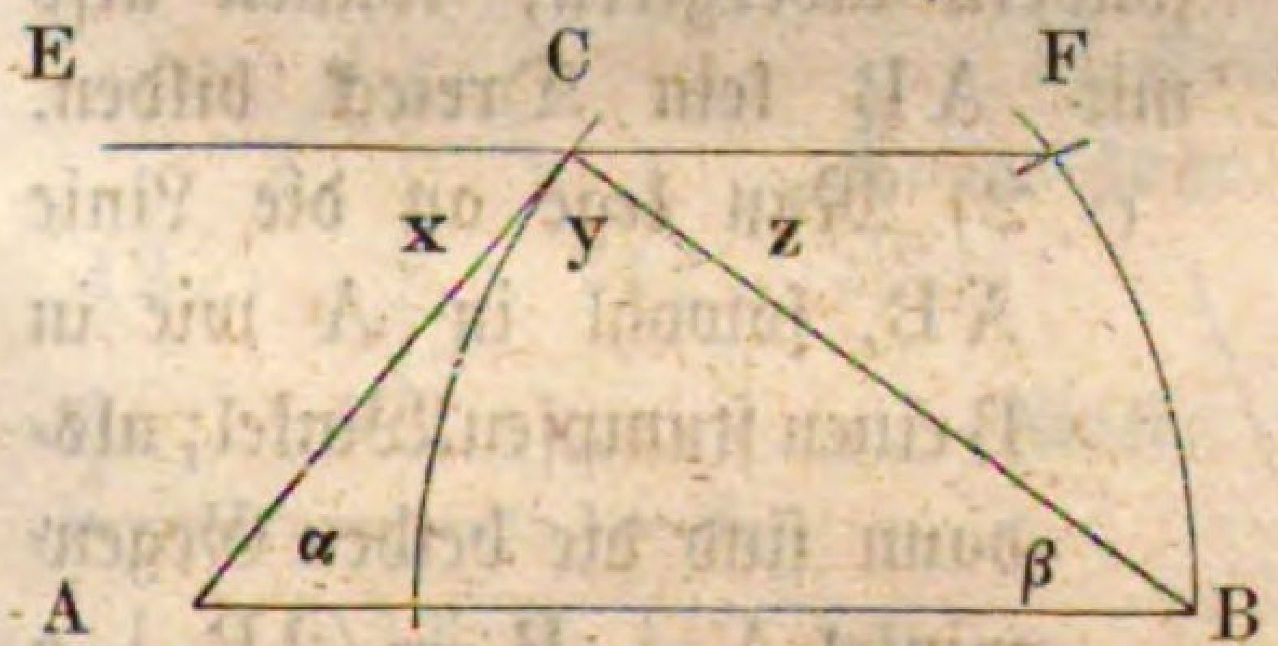
I. In den drei Winkeln eines Dreiecks liegen immer 180^0 vertheilt, oder die Winkel eines jeden Dreiecks sind $= 2R$ oder gleich einem Flachen.

Beweis:

Zieht man zu der Grundlinie AB des Dreiecks ABC durch die gegenüberliegende Spitze C eine Parallele EF, so sind

$\sphericalangle\, x + y + z = 2R$ als Nebenwinkel;

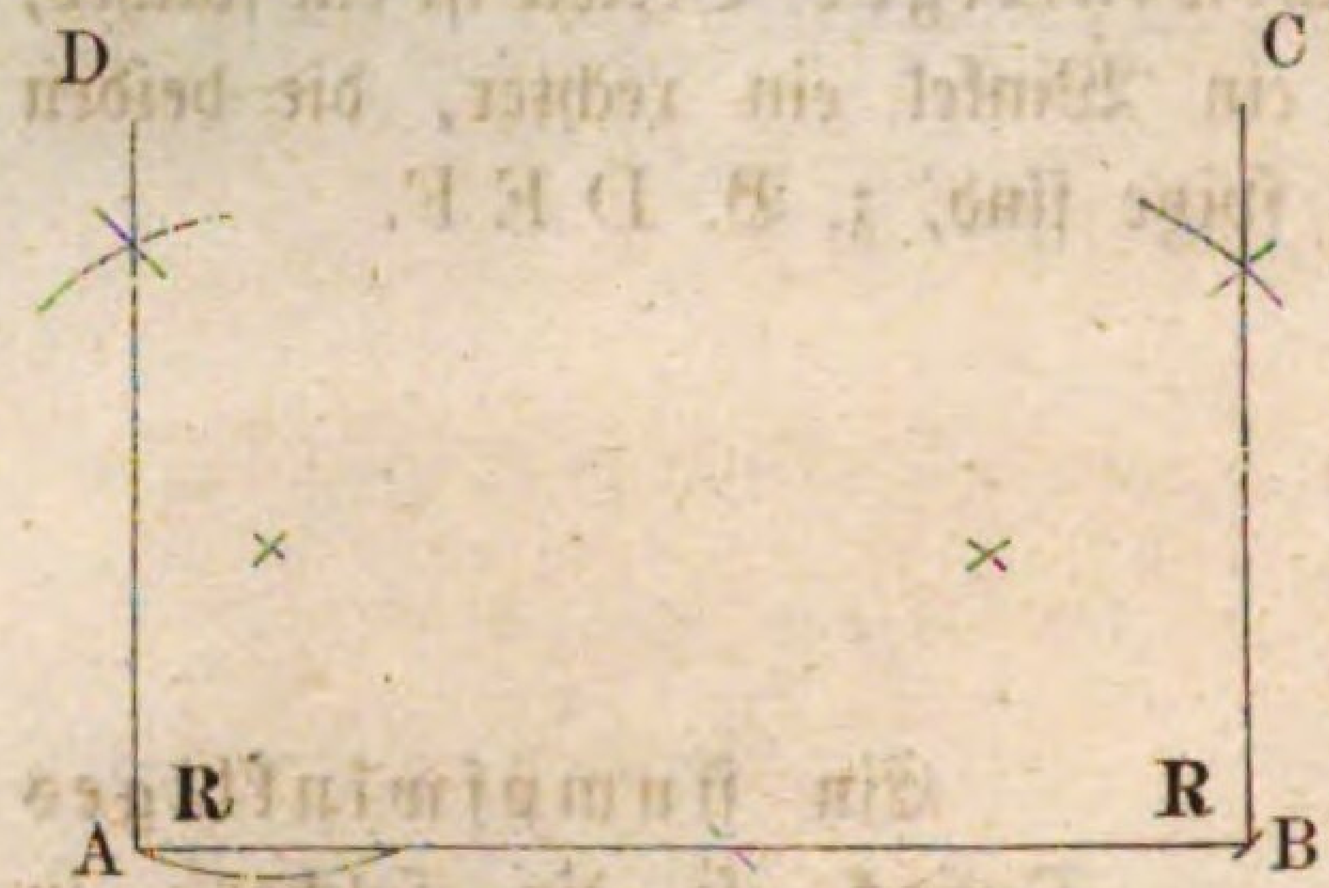
$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle\, x = \alpha \\ \sphericalangle\, z = \beta\end{array}\right\}$ als Wechselwinkel.



Setzen wir nun für $\sphericalangle\, x$ den $\sphericalangle\, \alpha$ und für $\sphericalangle\, z$ den $\sphericalangle\, \beta$, so erhalten wir: $\sphericalangle\, \alpha + \beta + y = 180^0$ oder $= 2R$.

Mit Hülfe dieses Satzes können wir zunächst beweisen, daß in einem rechtwinkligen Dreieck nur ein Winkel ein rechter sein kann, die beiden andern aber spitze sein müssen; denn, sollte noch ein zweiter Winkel ein rechter sein, so würde der dritte Winkel eine Größe $= 0$ haben; ein Winkel $= 0$ kann aber weder gedacht, noch gezeichnet werden. Dieser Beweis war arithmetisch; geometrisch würde er so lauten:

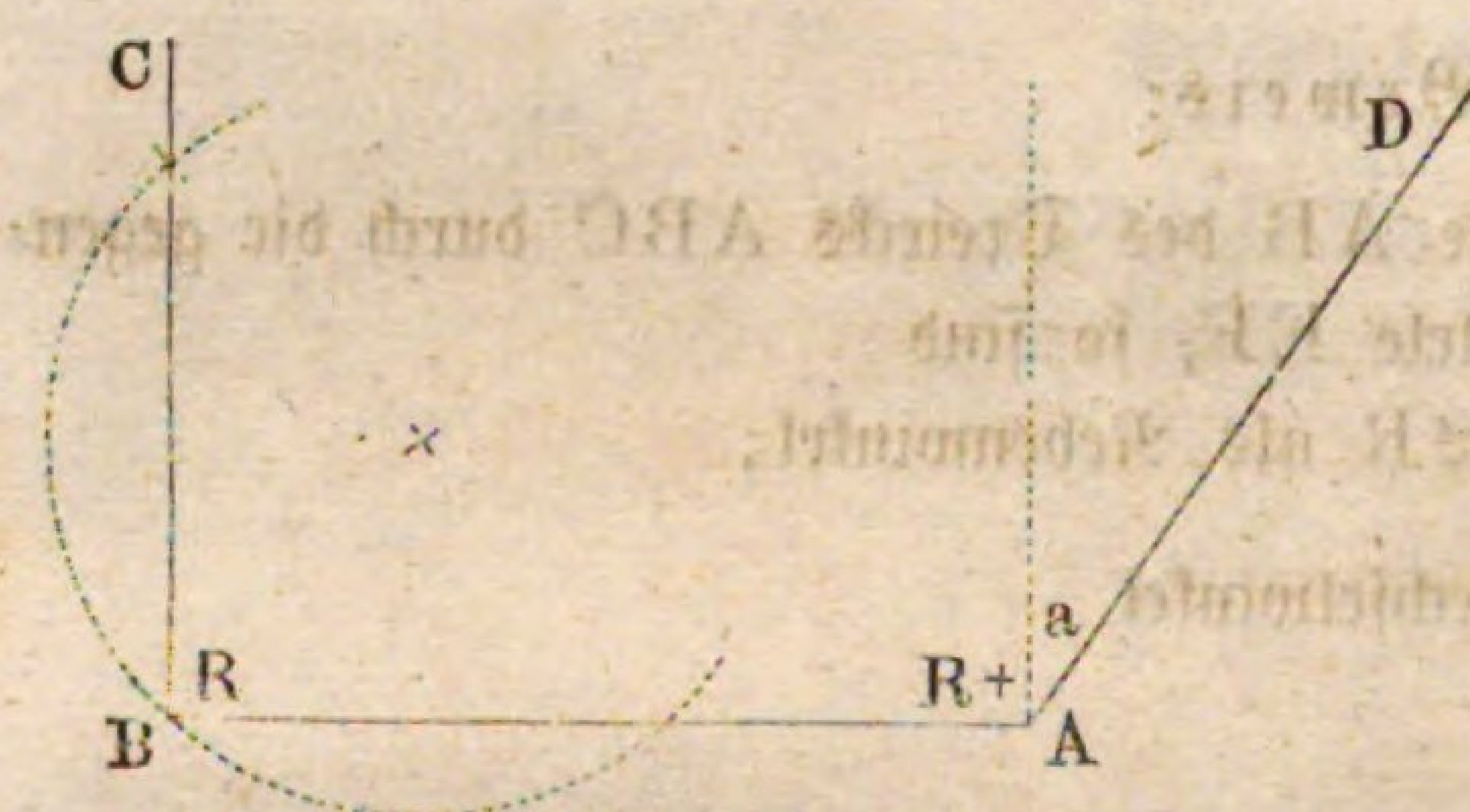
Man lege eine beliebige Linie AB hin und an beide Endpunkte derselben einen rechten Winkel; alsdann sind die beiden Winkel $A + B = 2R$; mithin läuft AB || CD, denn A und B sind Gegenwinkel; parallele Linien



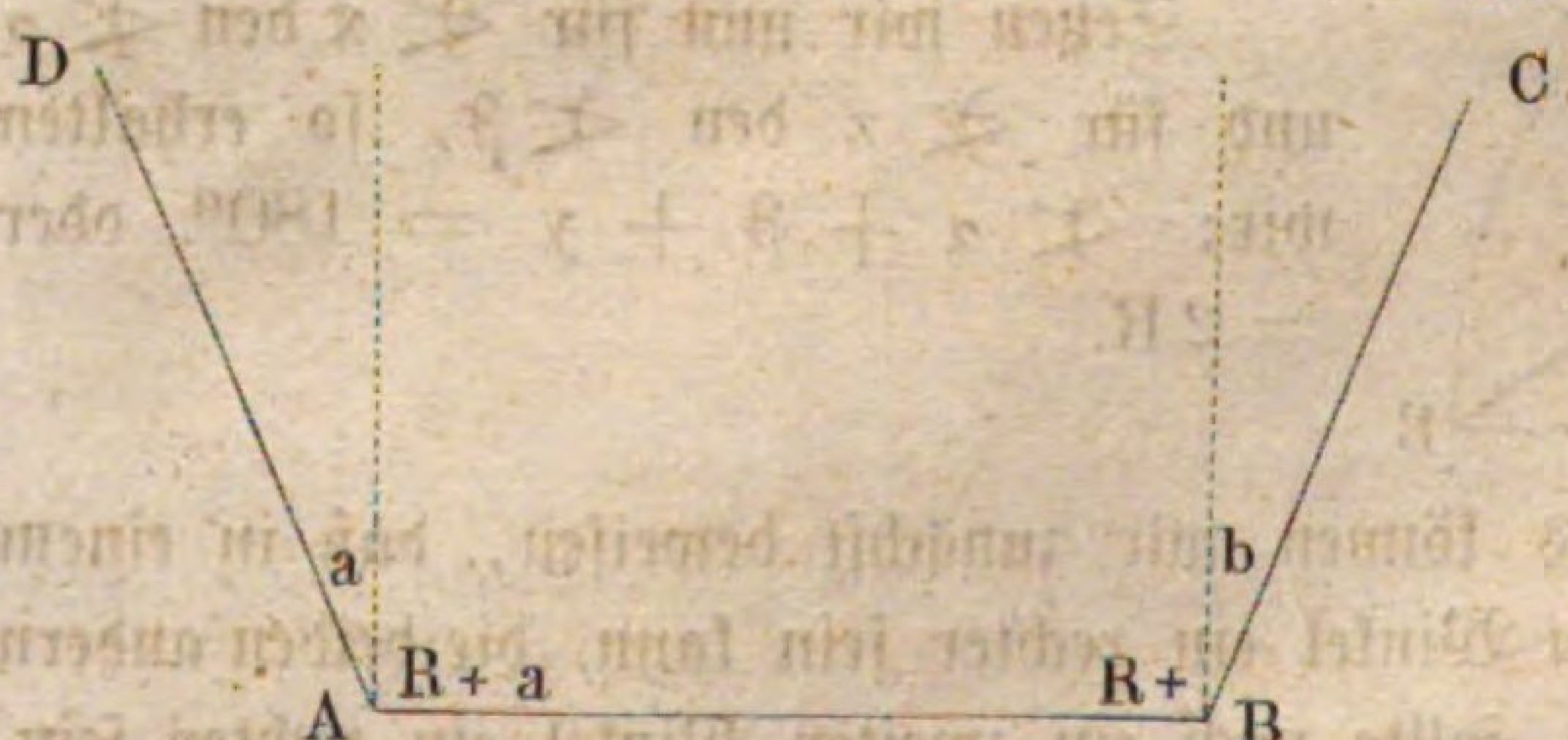
aber schneiden sich nie, also können die Linien A B, A D und B C nie eine Fläche begrenzen, also auch kein Dreieck bilden.

Ganz ähnlich läßt sich zeigen, daß in einem Dreiecke nur ein Winkel ein stumpfer sein kann, die beiden andern aber spitze sein müssen; wollte man nämlich in einem Dreieck außer einem stumpfen Winkel entweder noch einen rechten, oder gar noch einen stumpfen haben, so hätten diese beiden Winkel im ersten Falle eine Größe von $1R + a + 1R = 2R + a$; im zweiten Falle $= 1R + a + 1R + b = 2R + a + b$; in beiden Fällen würde der dritte Winkel eine negative Größe zum Maße haben, nämlich im ersten Falle $-a^0$, im zweiten Falle $-(a + b)^0$ groß sein, was widersinnig und daher unmöglich ist.

Der geometrische Beweis kann so geführt werden:



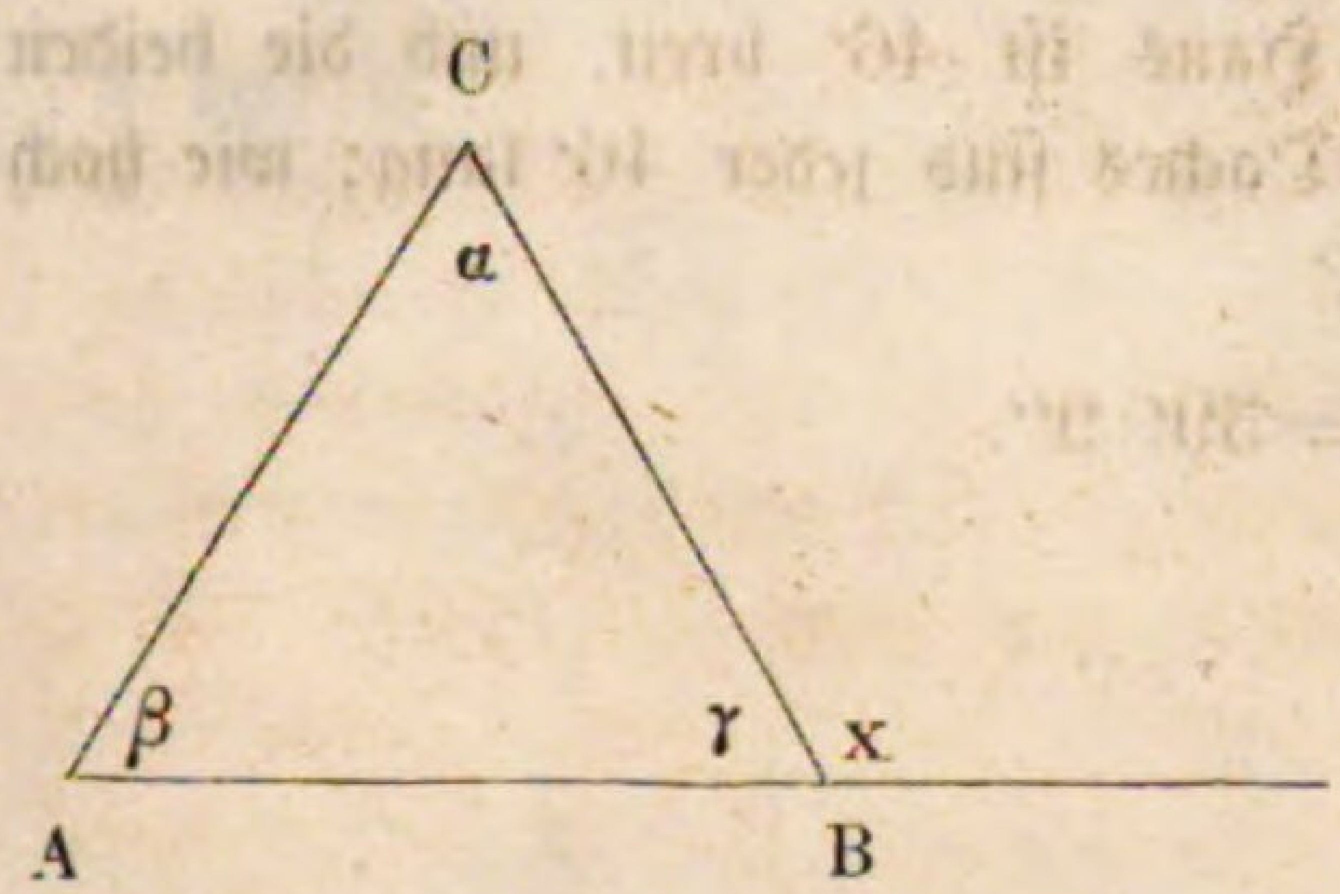
Man lege 1) an die Linie AB in A einen stumpfen Winkel, in B einen rechten; alsdann sind die beiden Gegenwinkel $A + B$ über 180^0 groß; mithin sind die Linien AD und BC nicht parallel, sondern divergiren, können also mit AB kein Dreieck bilden.



2) Man lege an die Linie AB, sowohl in A wie in B einen stumpfen Winkel; alsdann sind die beiden Gegenwinkel $A + B = (2R + a + b)^0$, d. h., über 180^0 groß, also kann AD nicht BC parallel sein, sondern die beiden Linien müssen divergiren, können also mit AB kein Dreieck bilden.

II. Verlängert man die Seite eines Dreiecks über einen Winkel hinaus, so entsteht ein äußerer Winkel, welcher immer den beiden innern gegenüberstehenden an Größe gleich ist.

Beweis:



$$\sphericalangle x + \gamma = 180^0 \text{ als Nebenwinkel}$$
$$\sphericalangle \alpha + \beta + \gamma = 180^0 \text{ als Winkel im } \triangle$$
$$\sphericalangle x + \gamma = \sphericalangle \alpha + \beta + \gamma$$
$$\sphericalangle x = \sphericalangle \alpha + \beta.$$

§. 2.

Dreiecksconstructionen.

Aus den in §. 1 angegebenen Eigenschaften der Dreiecke folgt:

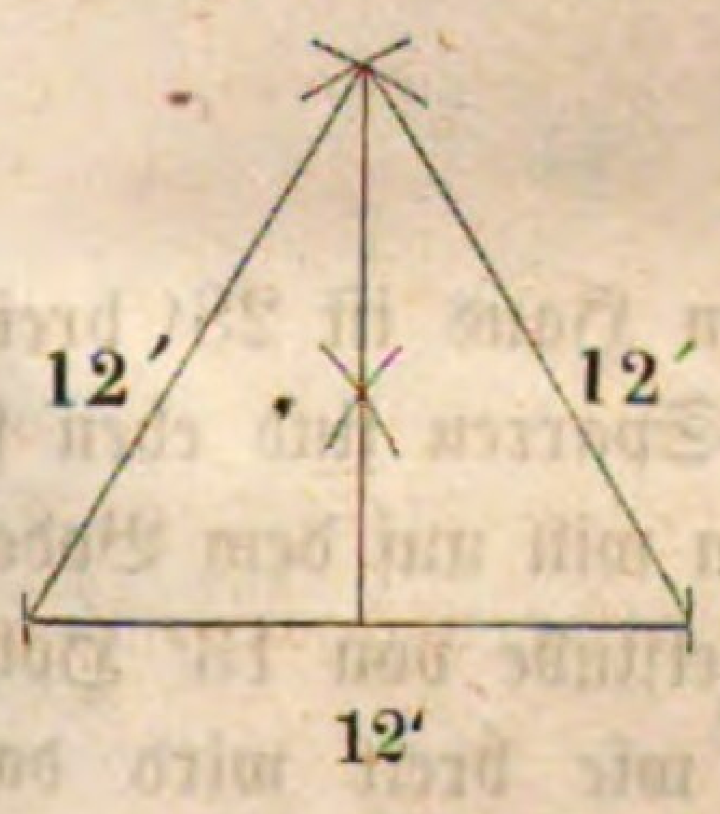
1) Daß ein gleichseitiges Dreieck durch eine einzige Seite vollständig bestimmt ist.

2) Daß ein gleichschenkliges Dreieck durch zwei seiner Stücke und zwar:

a) durch zwei Seiten,

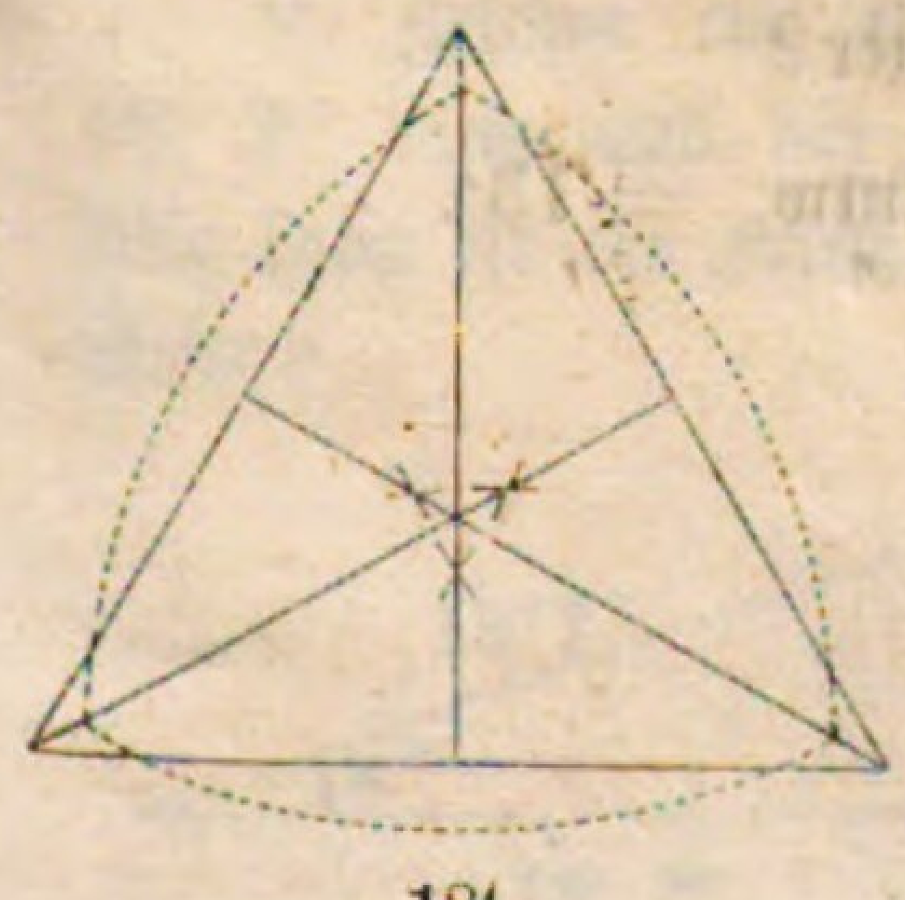
b) durch eine Seite und einen Winkel vollständig bestimmt ist.

3) Daß ein ungleichseitiges Dreieck zu seiner Bestimmung drei Stücke, worunter wenigstens eine Seite sein muß, nöthig hat, was im folgenden dritten Paragraphen nachgewiesen werden soll, während wir in diesem Paragraphen nur die Constructionsaufgaben für das gleichseitige und gleichschenklige Dreieck ausführen wollen.



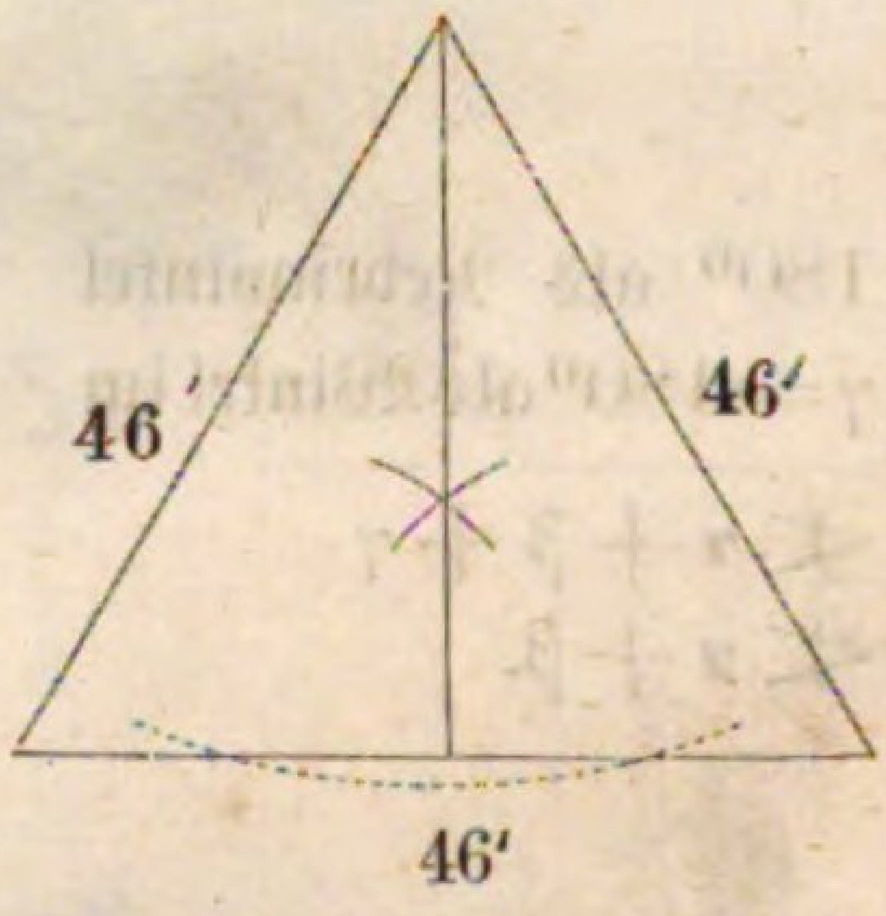
1) Construire ein gleichseitiges Dreieck von 12′ Seitenlänge und bestimme die Länge des Perpendikels!

Antw. Perpendikel = 10′ 4″.



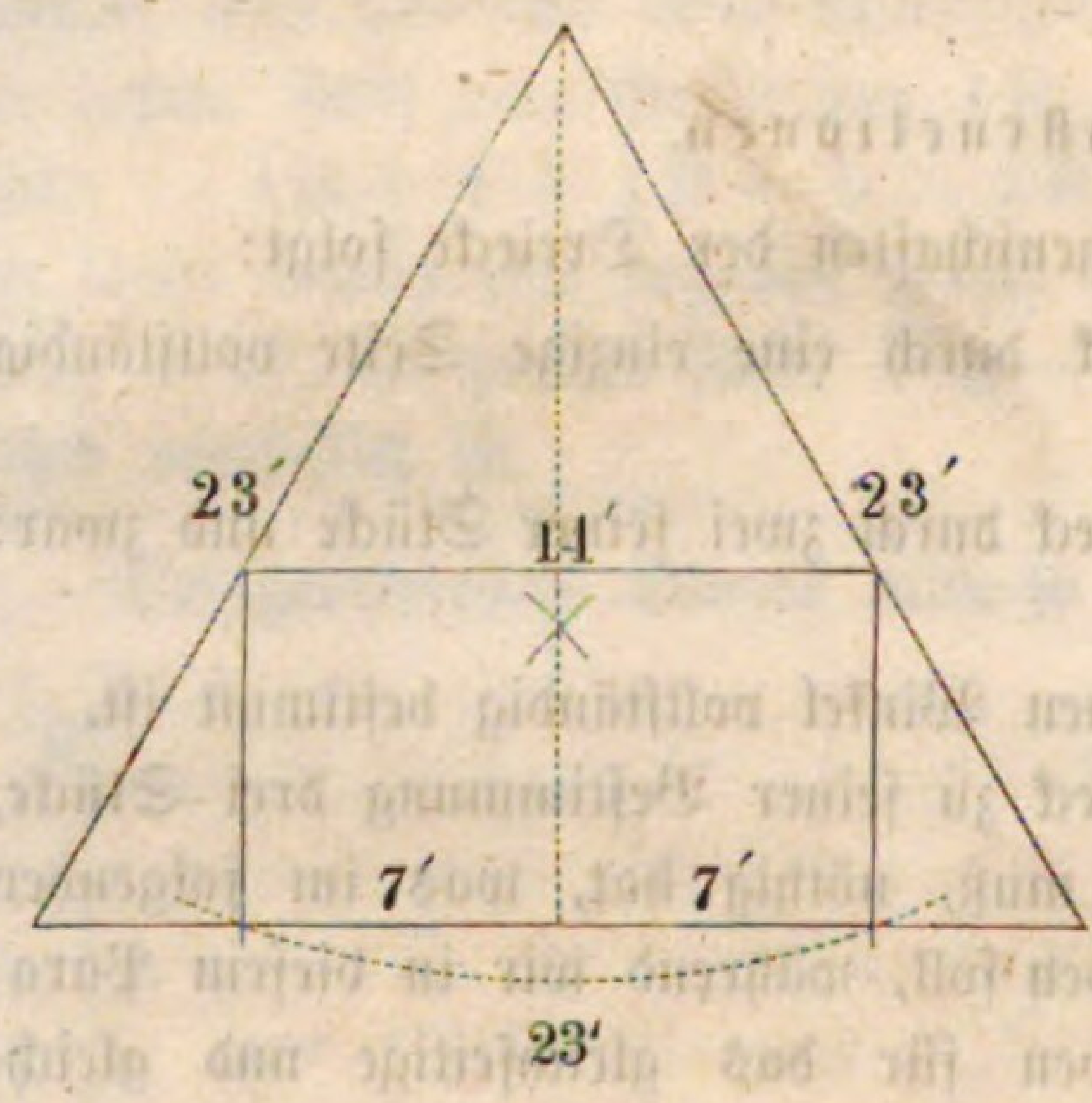
2) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck von 18′ Seitenlänge, ziehe in demselben alle drei Perpendikel und bestimme die Länge derselben!

Antw. Perpendikel = 15′ 6″.



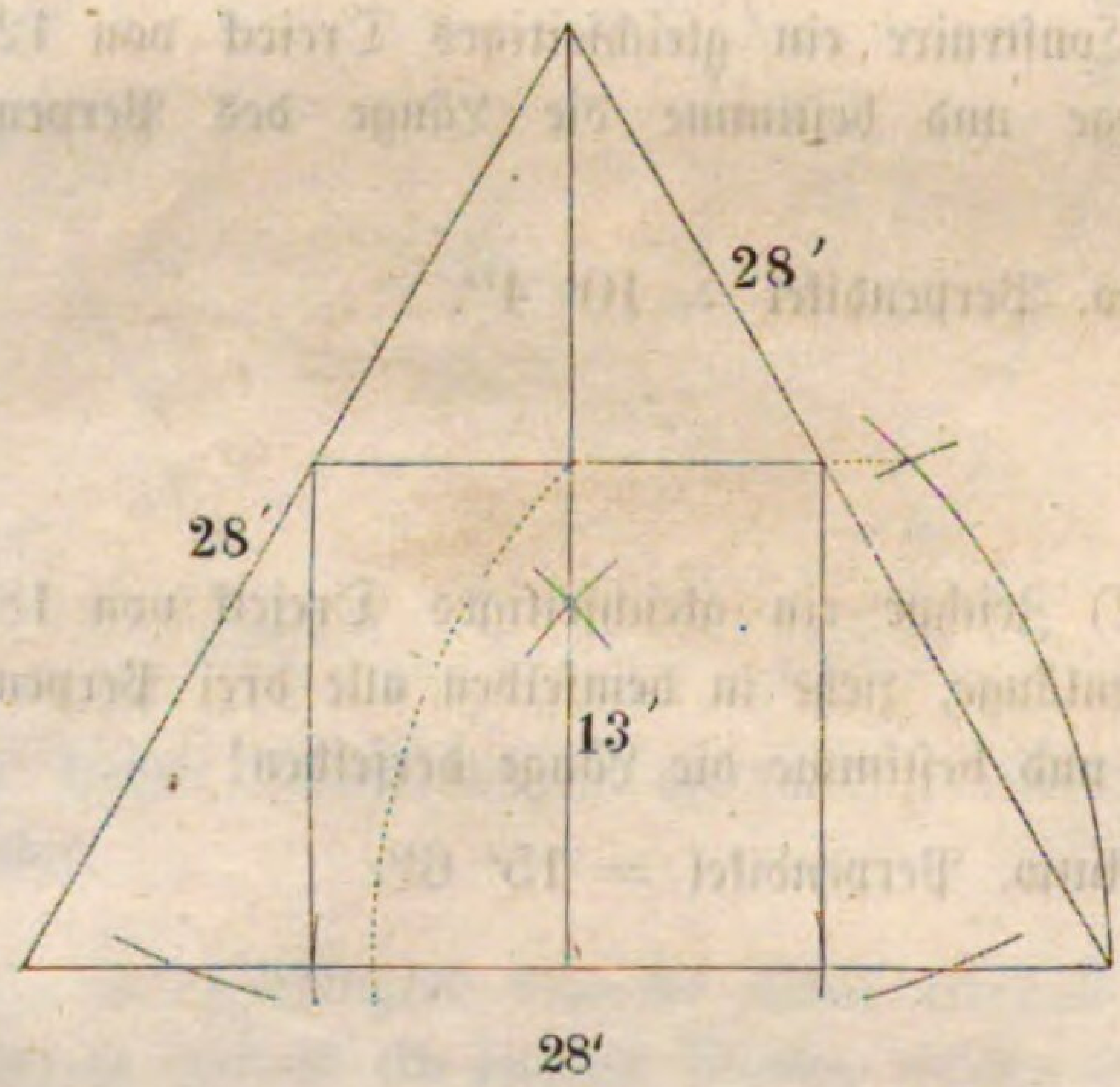
3) Ein Haus ist 46′ breit, und die beiden Sparren des Daches sind jeder 46′ lang; wie hoch ist das Dach?

Antw. = 39′ 9″.



4) Ein Haus ist 23′ breit, die Sparren sind auch 23′ lang; man will auf dem Boden eine Giebelstube von 14′ Breite anlegen; wie hoch wird das Zimmer?

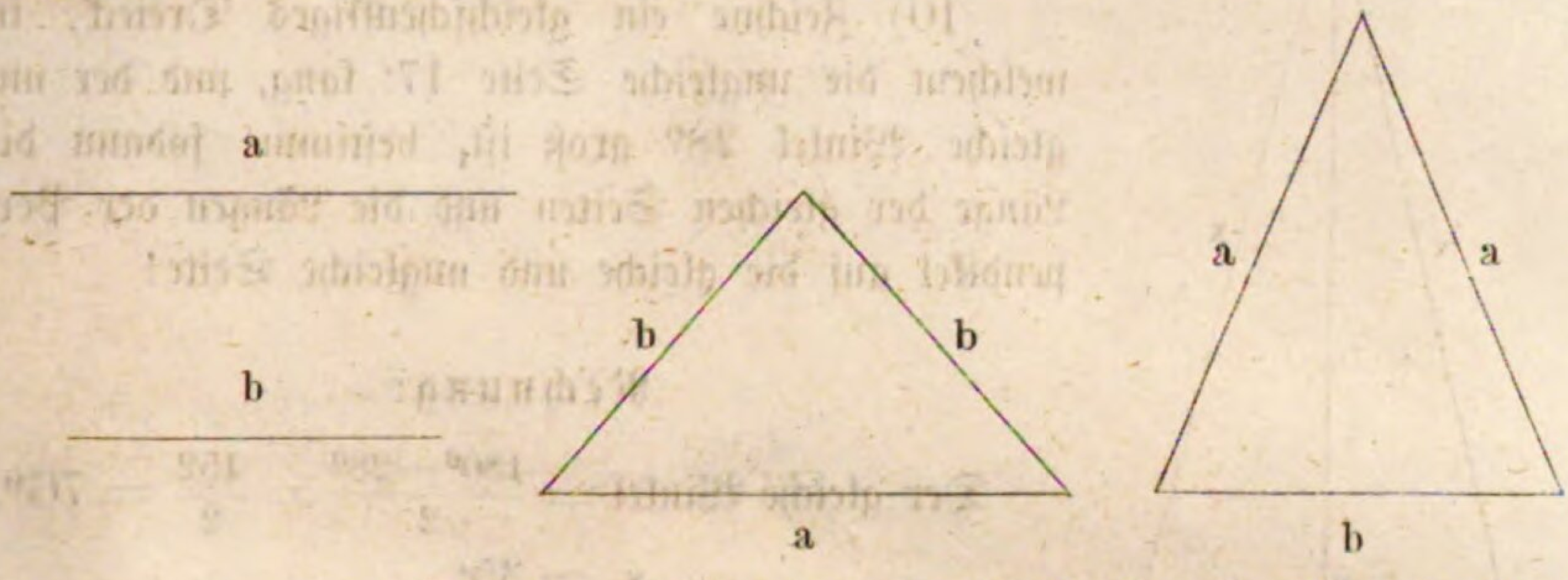
Antw. = 8′.

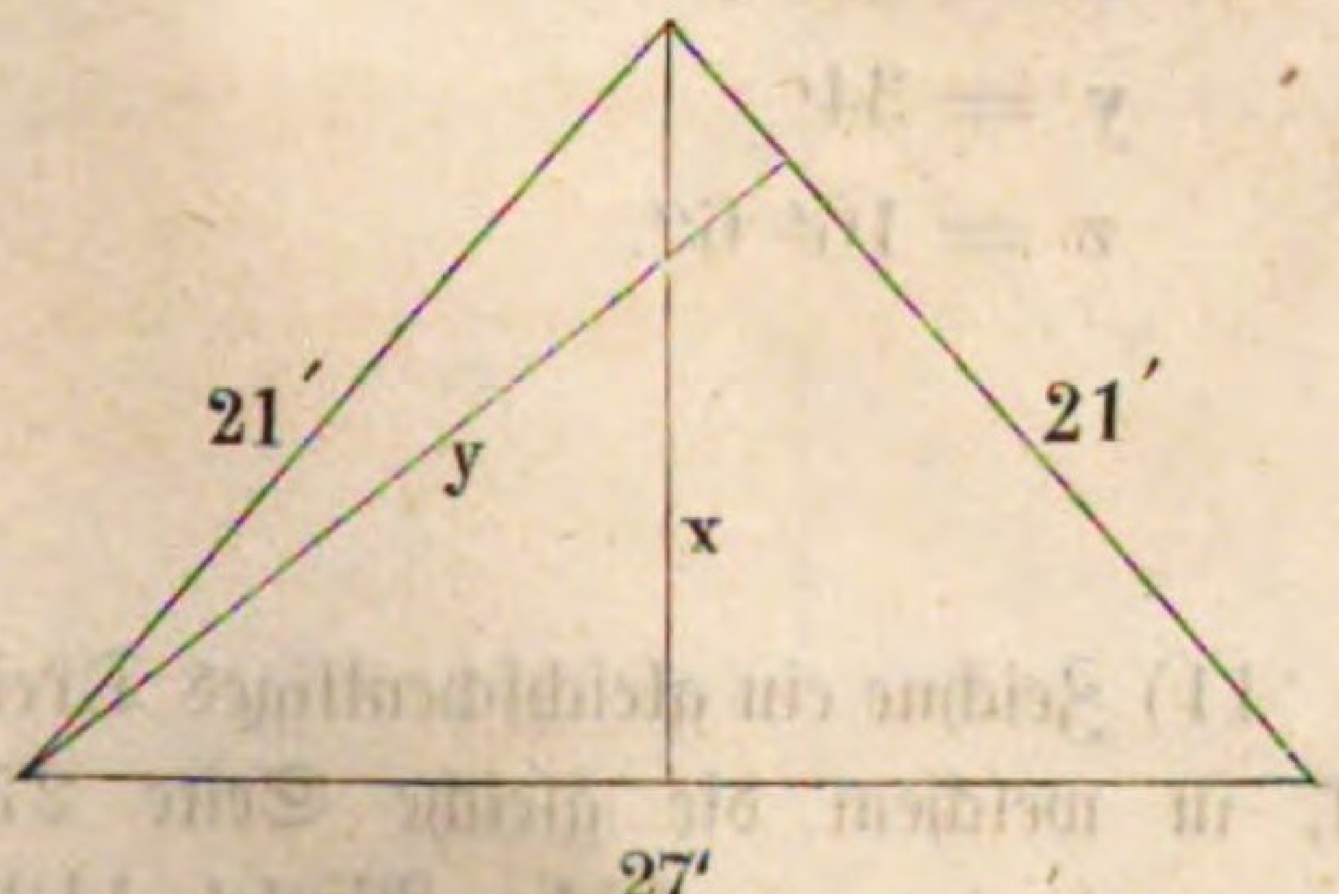


5) Ein Haus ist 28′ breit, und die Sparren sind eben so lang; man will auf dem Boden eine Giebelstube von 13′ Höhe anlegen; wie breit wird das Zimmer?

Antw. = 13′.

6) Construire ein gleichschenkliges Dreieck aus den beiden Linien a und b.

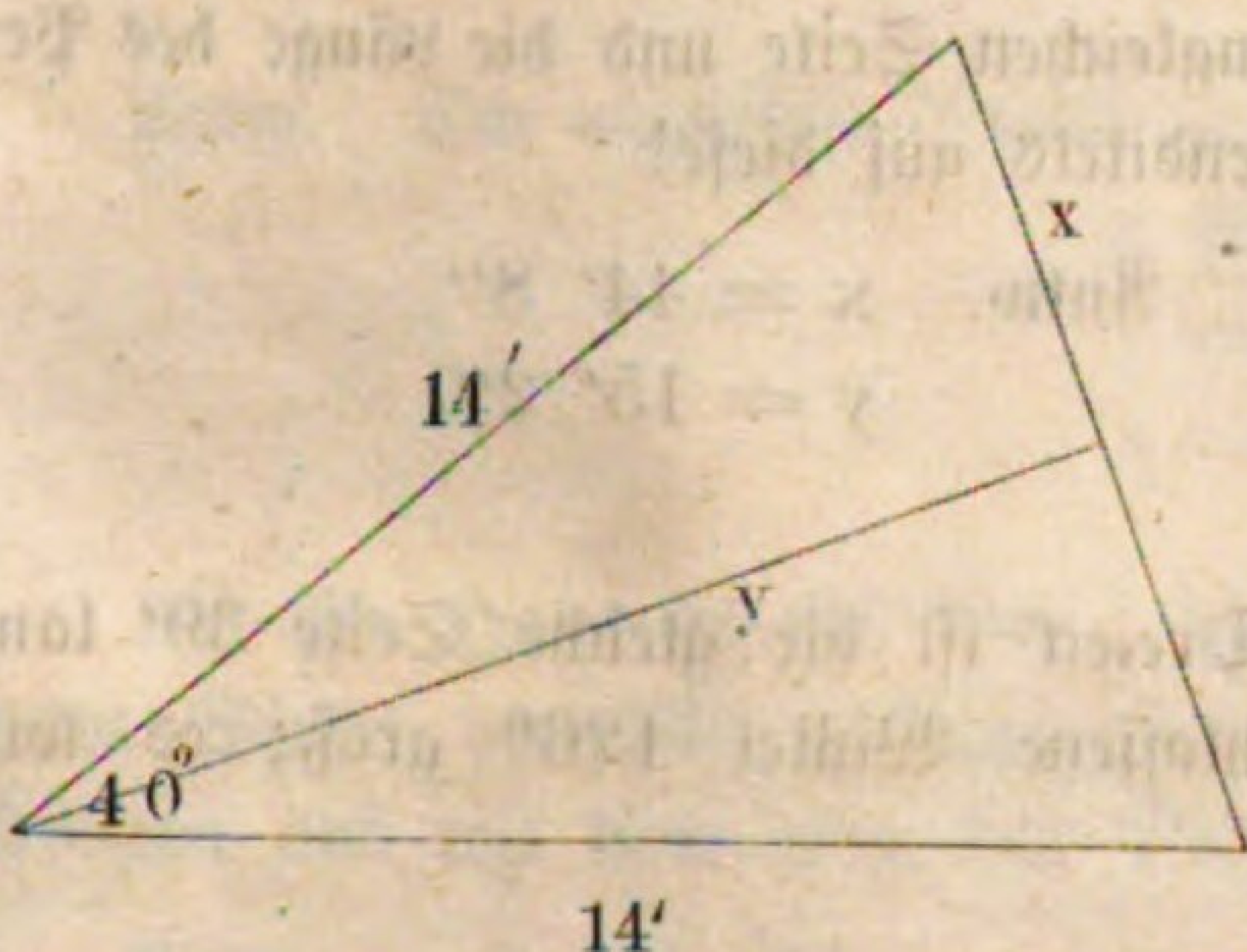




7) Construire ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem die gleiche Seite 21′ lang, die ungleiche Seite 27′ lang ist, und bestimme die Länge des Perpendikels auf die gleiche und ungleiche Seite!

Antw. $x = 16'$
$y = 20'\ 7''$.

8) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem die gleiche Seite 14′ lang, und der gleiche Winkel 70^0 groß ist, und bestimme die Länge des Perpendikels auf die ungleiche Seite!



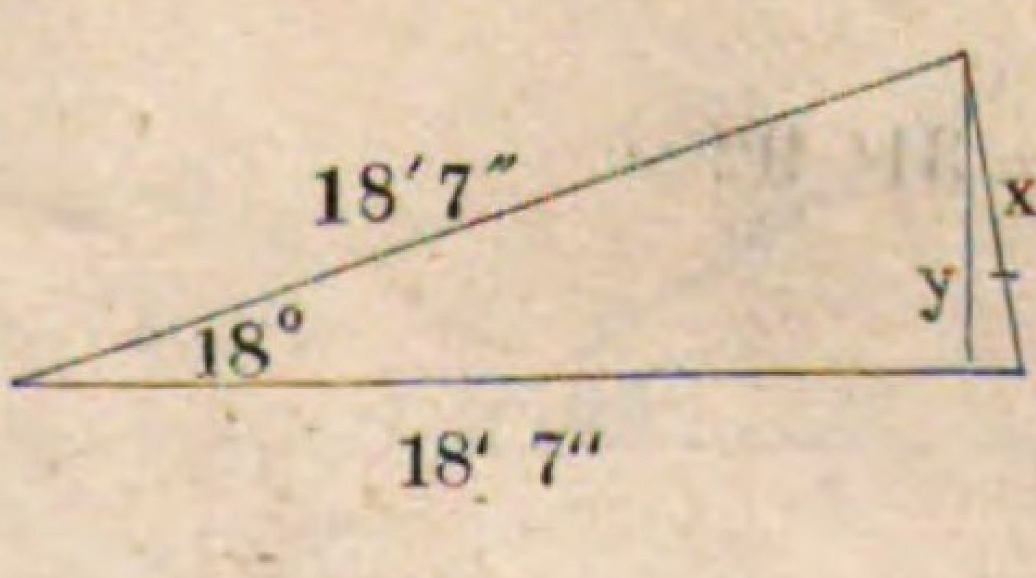
Rechnung:

Der ungleiche Winkel $= 180^0 - 2 \times 70^0 = 40^0$.

Antw. $x = 9'\ 6''$
$y = 13'\ 2''$.

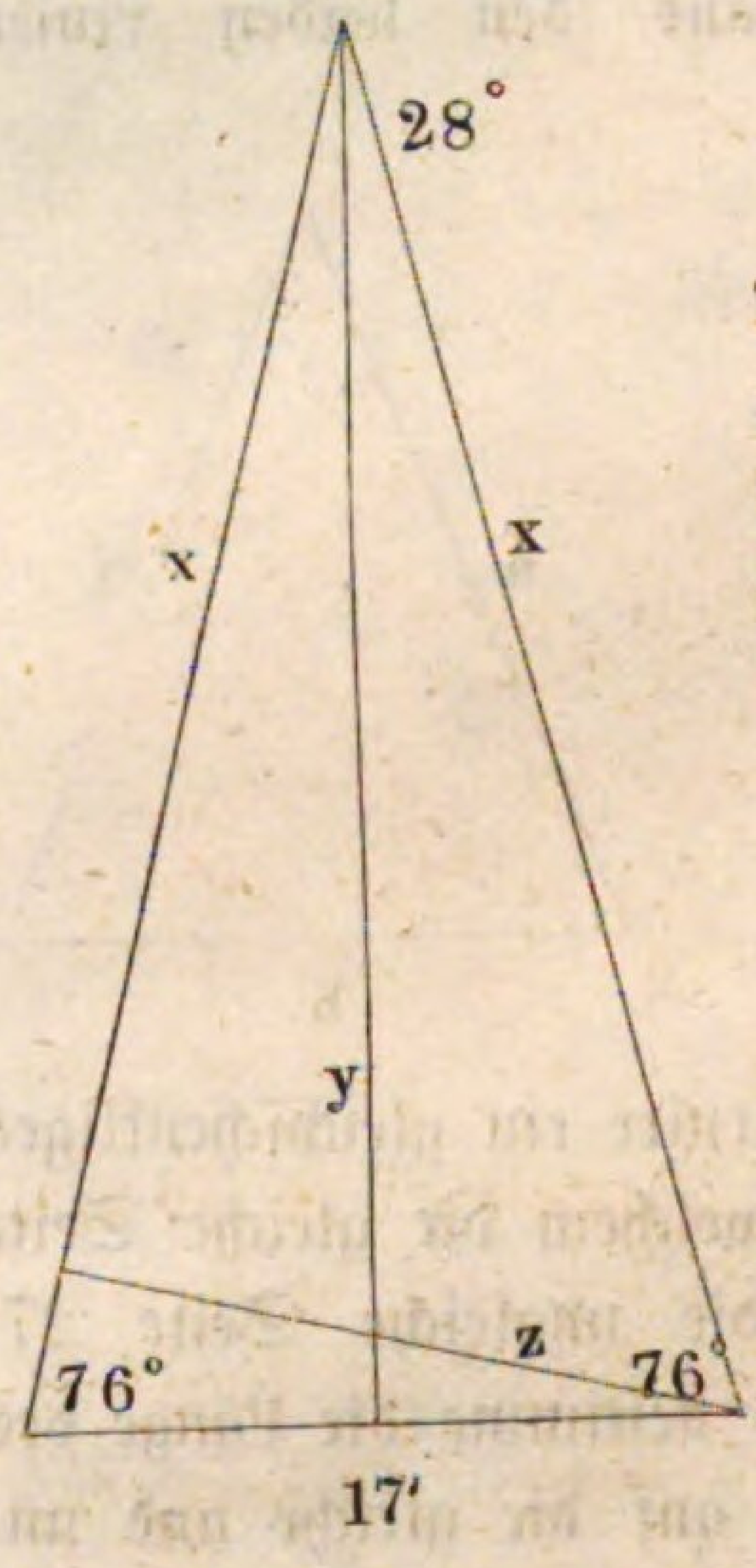
9) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem die gleiche Seite 18′ 7″ lang und der gleiche Winkel 81^0 groß ist; zugleich wird gefragt: Wie lang ist die dritte ungleiche Seite und das Perpendikel auf die gleiche Seite?

Rechnung:



Der ungleiche Winkel $= 180^0 - 2 \times 81^0 = 18^0$.

Antw. $x = 6'$
$y = 5'\ 10''$.



10) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem die ungleiche Seite 17′ lang, und der ungleiche Winkel 28⁰ groß ist, bestimme sodann die Länge der gleichen Seiten und die Längen der Perpendikel auf die gleiche und ungleiche Seite!

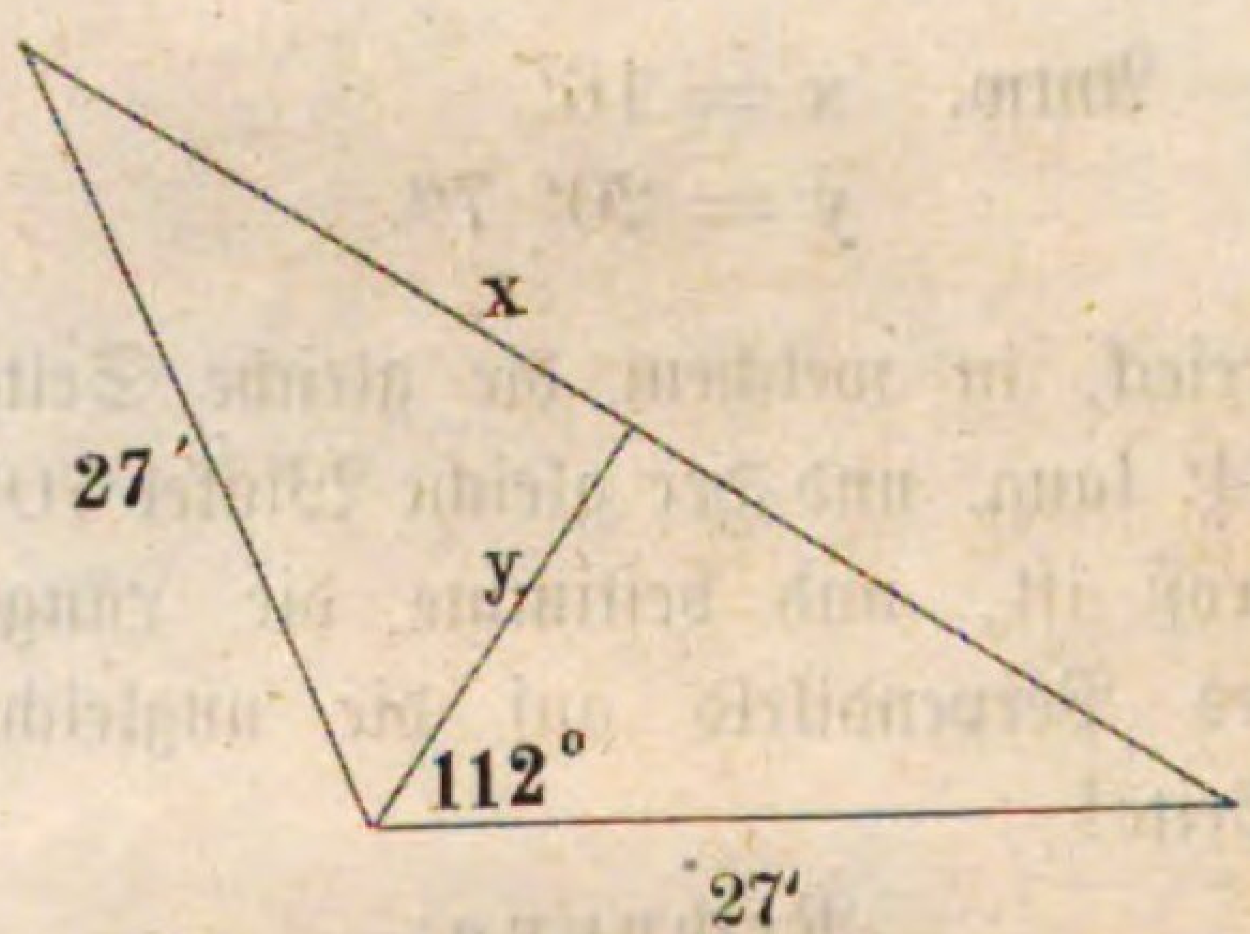
Rechnung:

Der gleiche Winkel $= \frac{180^0 - 28^0}{2} = \frac{152}{2} = 76^0$.

$x = 35'$

$y = 34'$

$z = 16'\ 6''$.



11) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem die gleiche Seite 27′ lang und der ungleiche Winkel 112⁰ groß ist, und bestimme die Länge der ungleichen Seite und die Länge des Perpendikels auf diese!

Antw. $x = 44'\ 8''$
$y = 15'\ 2''$.

12) In einem gleichschenkligen Dreieck ist die gleiche Seite 39′ lang, der von den gleichen Seiten eingeschlossene Winkel 126⁰ groß; es wird gefragt:

1) Wie lang ist die ungleiche Seite?

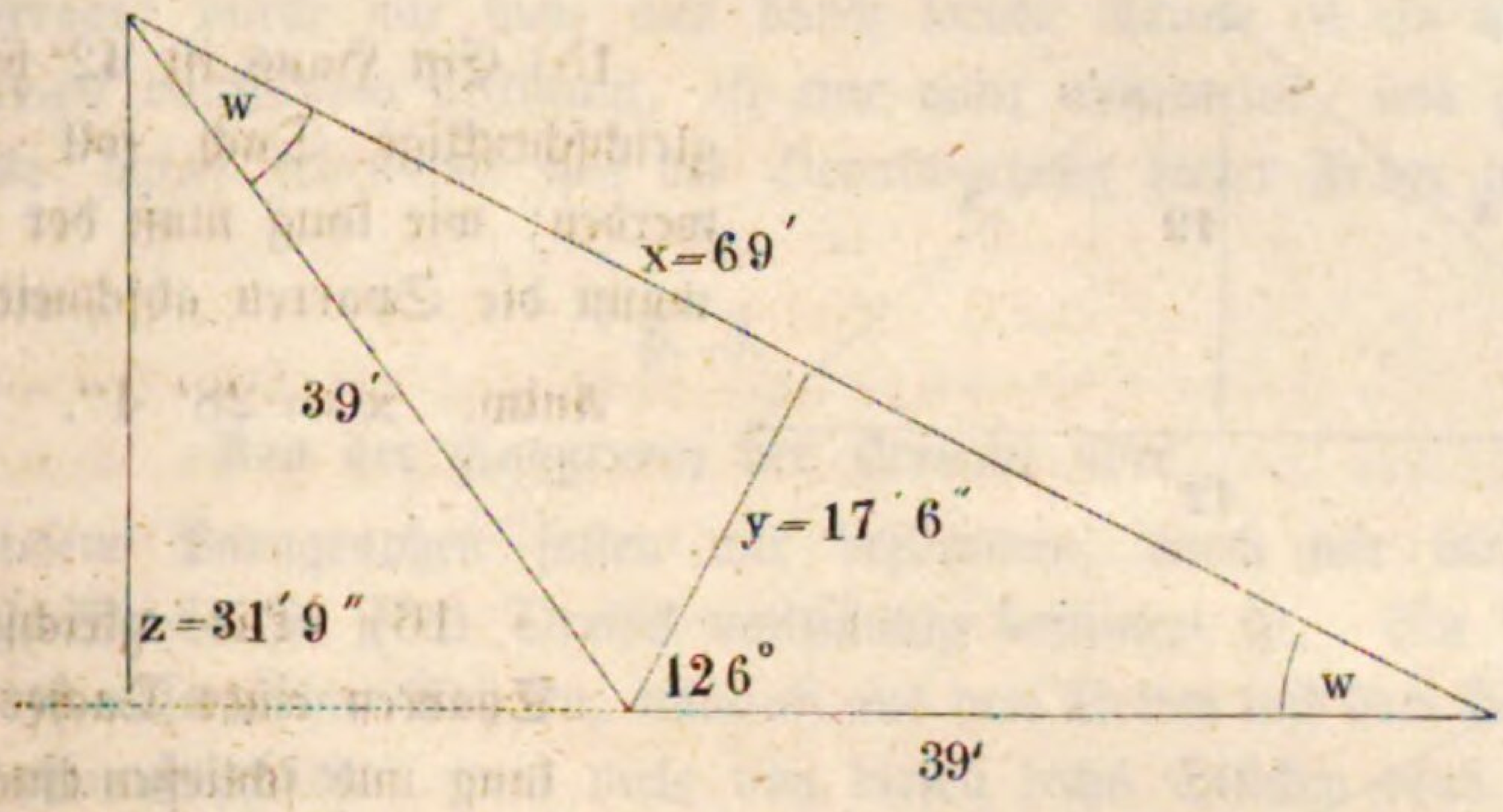
2) Wie lang ist das Perpendikel auf dieselbe?

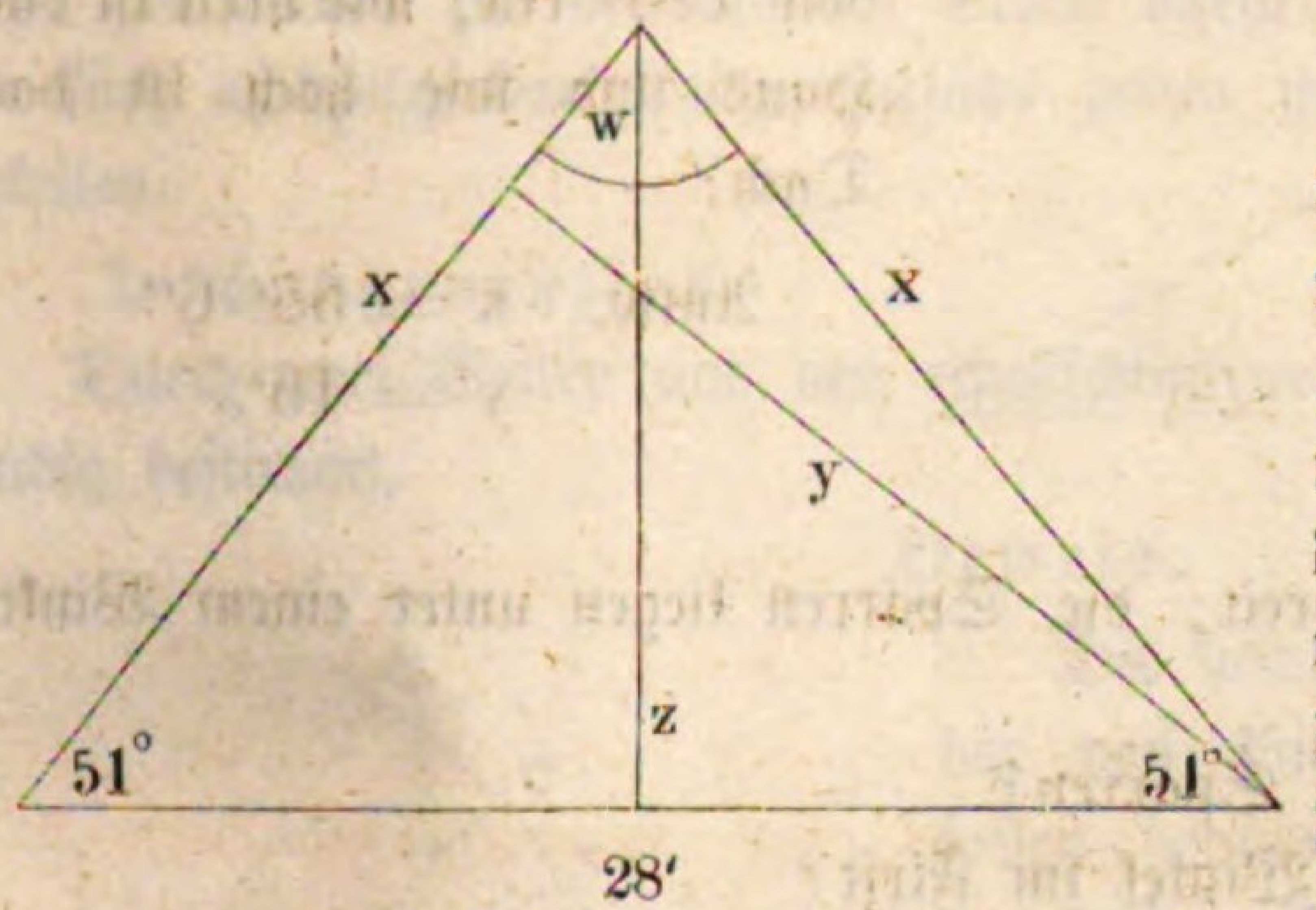
3) Wie lang ist das Perpendikel auf die verlängerte gleiche Seite?

4) Wie groß ist der gleiche Winkel?

Antw. $x = 69'$, $y = 17'\ 6''$, $z = 31'\ 9''$

$$w = \frac{180^0 - 126^0}{2} = 27^0.$$





13) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem die ungleiche Seite 28′ lang, der gleiche Winkel 51^0 groß ist, und bestimme durch Zeichnung die Längen der gleichen Seiten und der drei Perpendikel, und die Größe des ungleichen Winkels durch Rechnung!

Antw. Der ungleiche Winkel $= 180^0 - 2 \times 51^0 = 78^0$.

$x = 23' \; 9''$

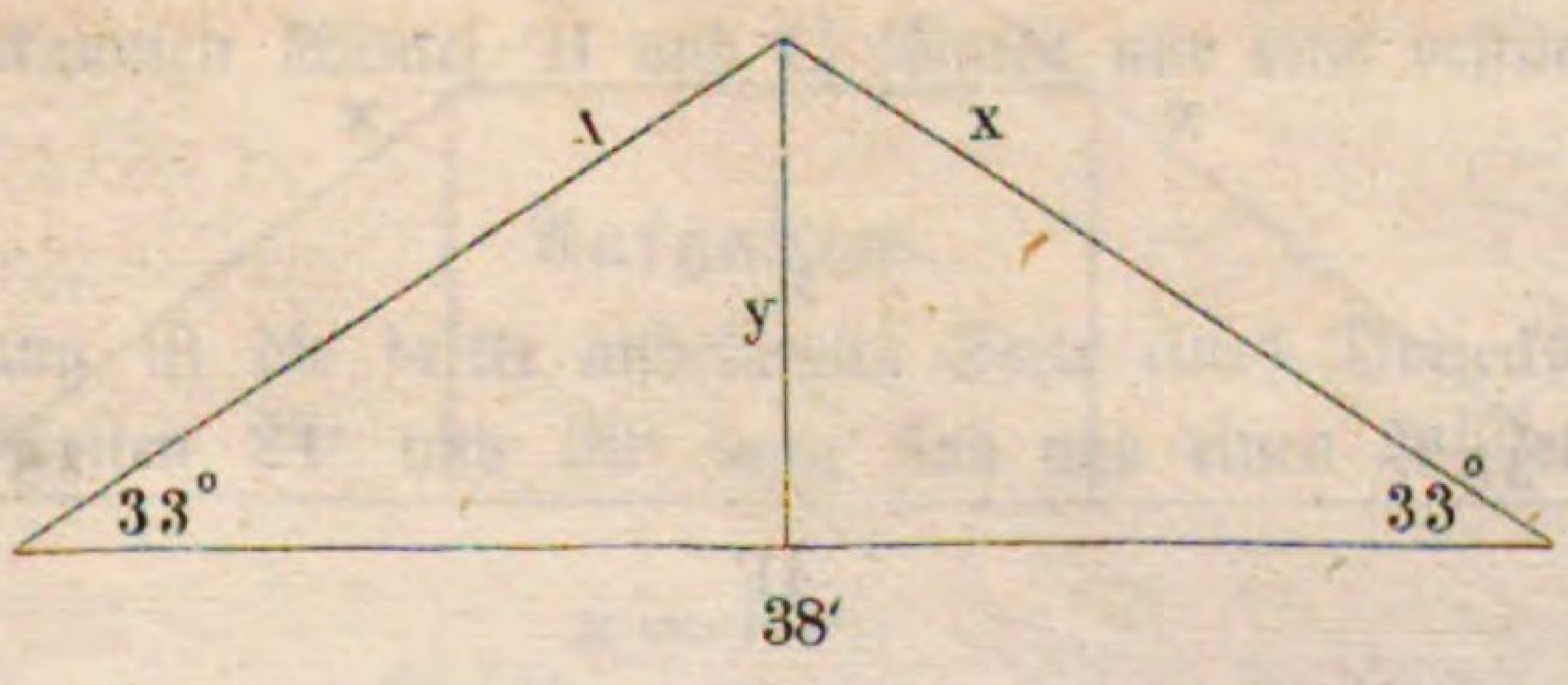
$y = 23'$

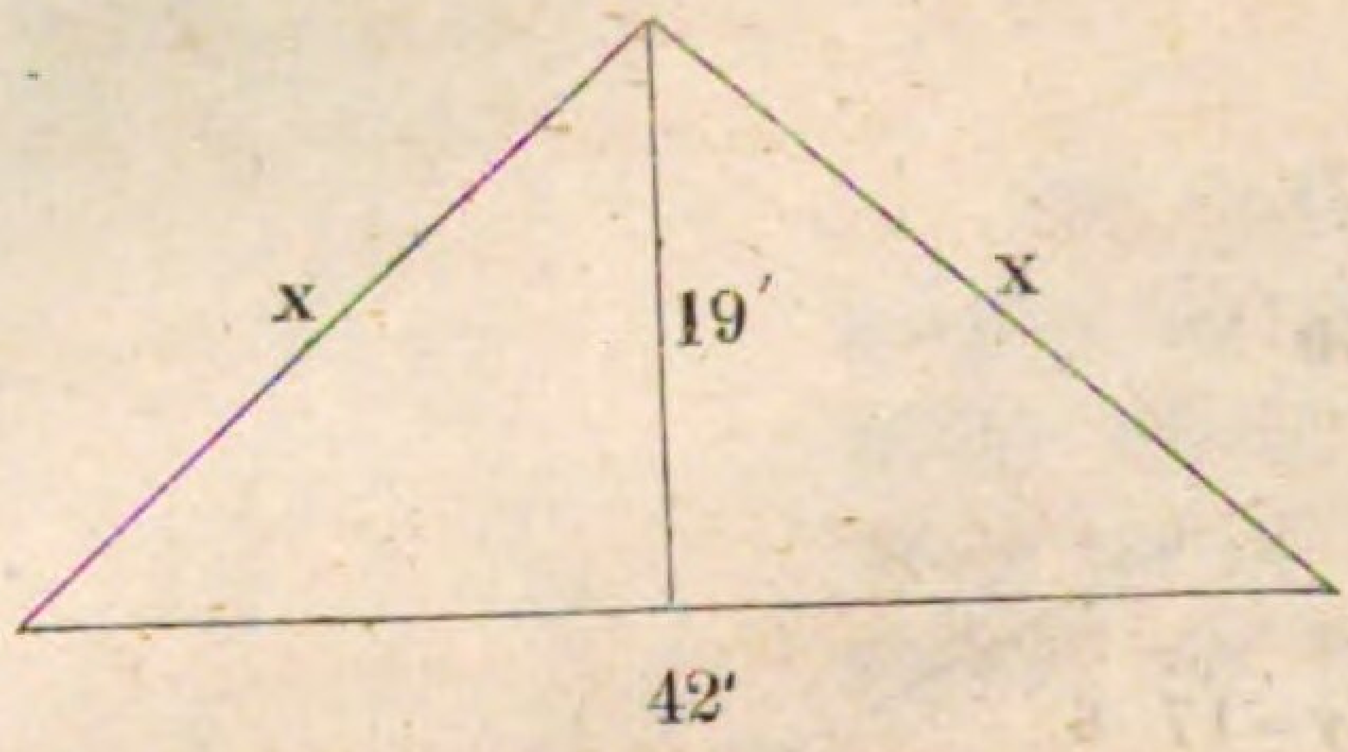
$z = 19' \; 6''$.

14) Ein Haus ist 38′ breit, die gleichschenkligen Sparren sollen unter einem Winkel von 33^0 anliegen; wie lang muß der Zimmermann sie abschneiden und wie hoch wird das Dach?

Antw. $x = 22' \; 6''$

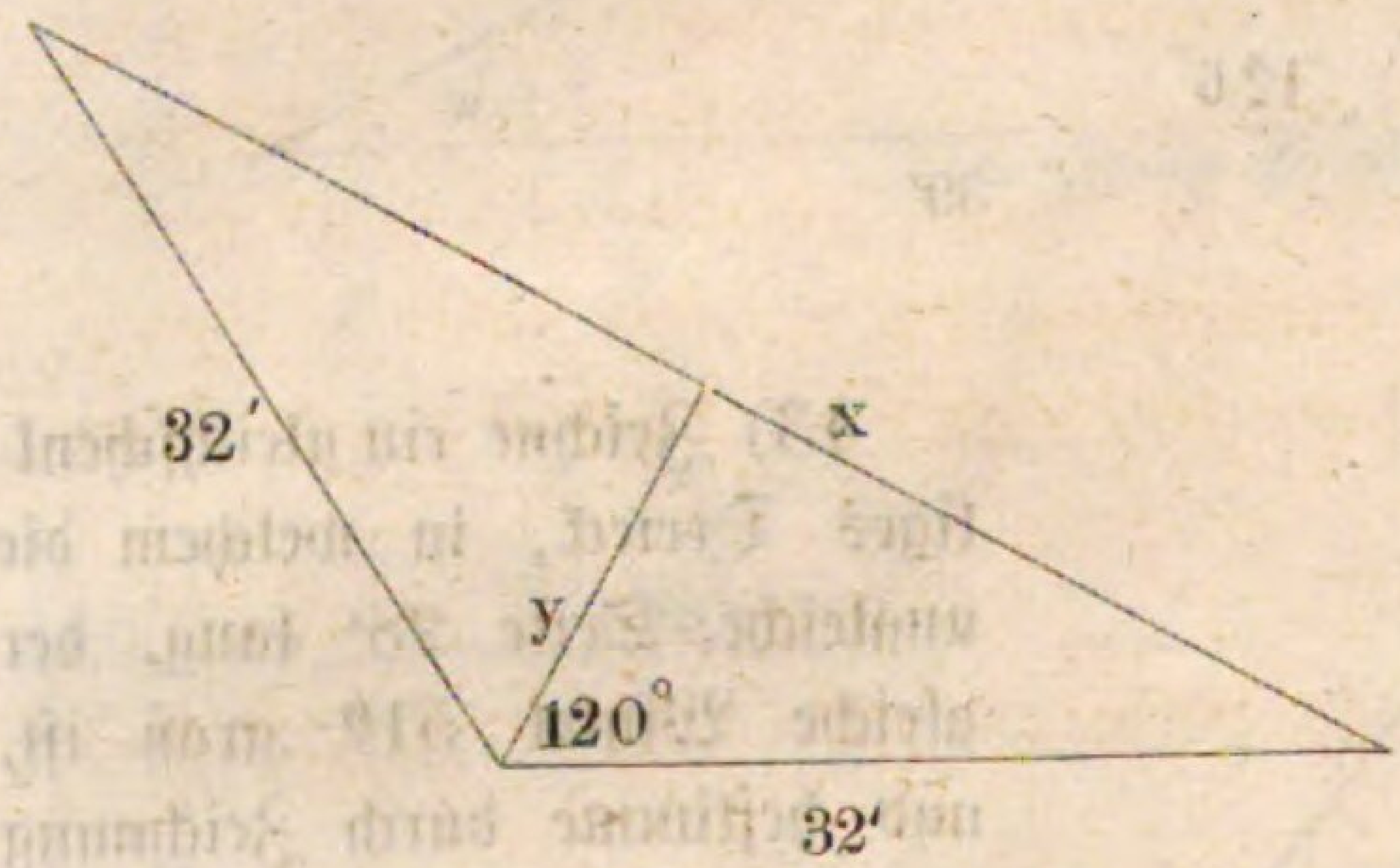
$y = 12' \; 4''$.





15) Ein Haus ist 42′ breit; das gleichschenklige Dach soll 19′ hoch werden; wie lang muß der Zimmermann die Sparren abschneiden?

Antw. x = 28′ 4″.



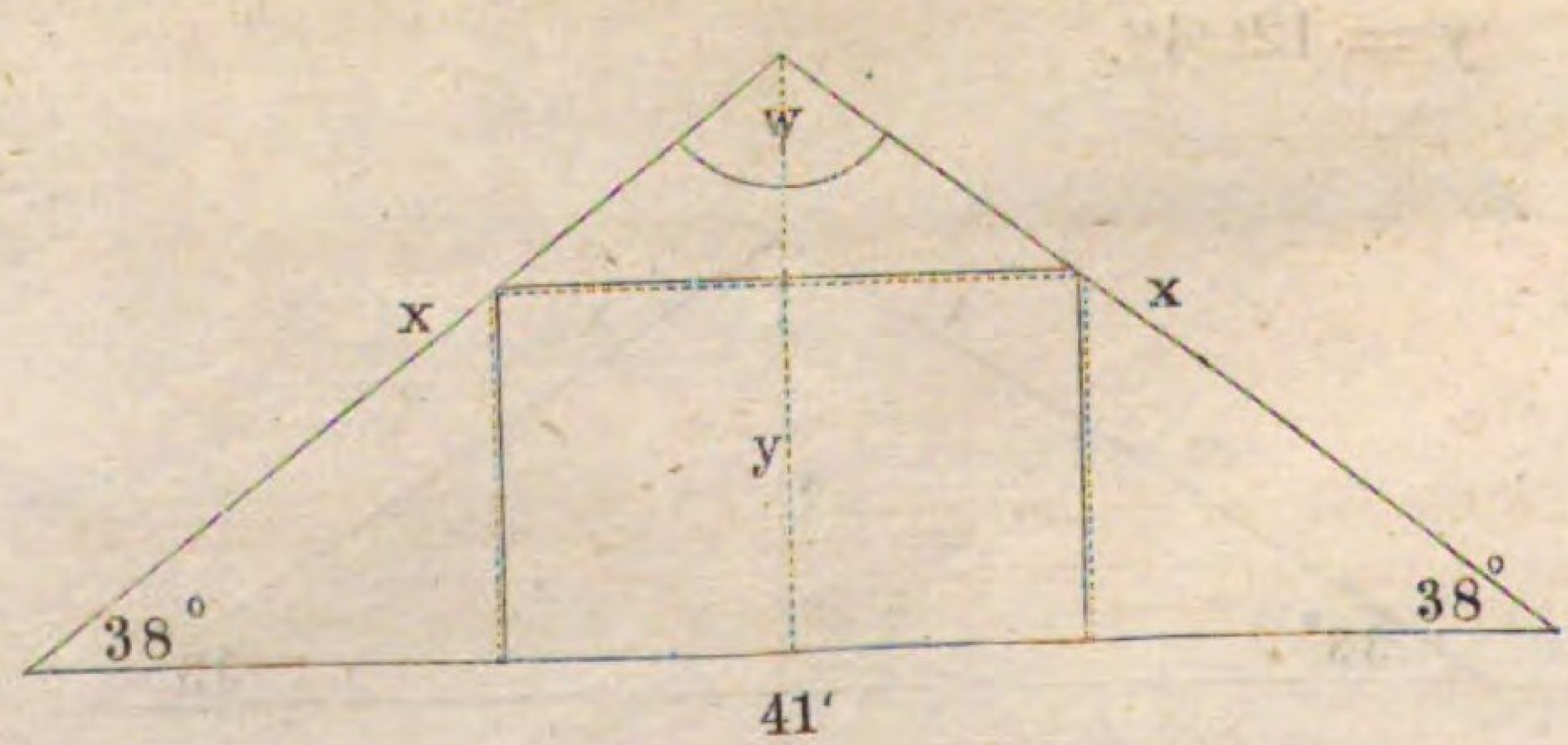
16) Die gleichschenkligen Sparren eines Daches sind 32′ lang und schließen einen Winkel von 120° ein; wie breit ist das Haus und wie hoch ist das Dach?

Antw. x = 55′ 6″
y = 16′.

17) Ein Haus ist 41′ breit; die Sparren liegen unter einem Winkel von 38° an; es wird gefragt:

1) Wie lang sind die Sparren?
2) Wie groß ist der Winkel im First?
3) Wie hoch ist das Dach?
4) Wie breit kann eine Giebelstube von 10′ Höhe werden?
5) Wie hoch wird eine Giebelstube, wenn diese 15′ breit sein soll?

Antw. 1) Die Sparren x sind 26′ lang.
2) $w = 180^0 - 2 \times 38^0 = 104^0$.
3) Das Dach y ist 16′ hoch.
4) Eine Giebelstube von 10′ Höhe kann 14′ 8″ breit werden.
5) Eine Giebelstube von 15′ Breite kann 9′ 10″ hoch werden.



Die Frage: durch wie viele und durch welche Stücke ist ein ungleichseitiges Dreieck vollständig bestimmt, ist eine ganz allgemeine, und gilt für alle Dreiecke; daher gehen wir mit der Beantwortung dieser Frage zu

§. 3.

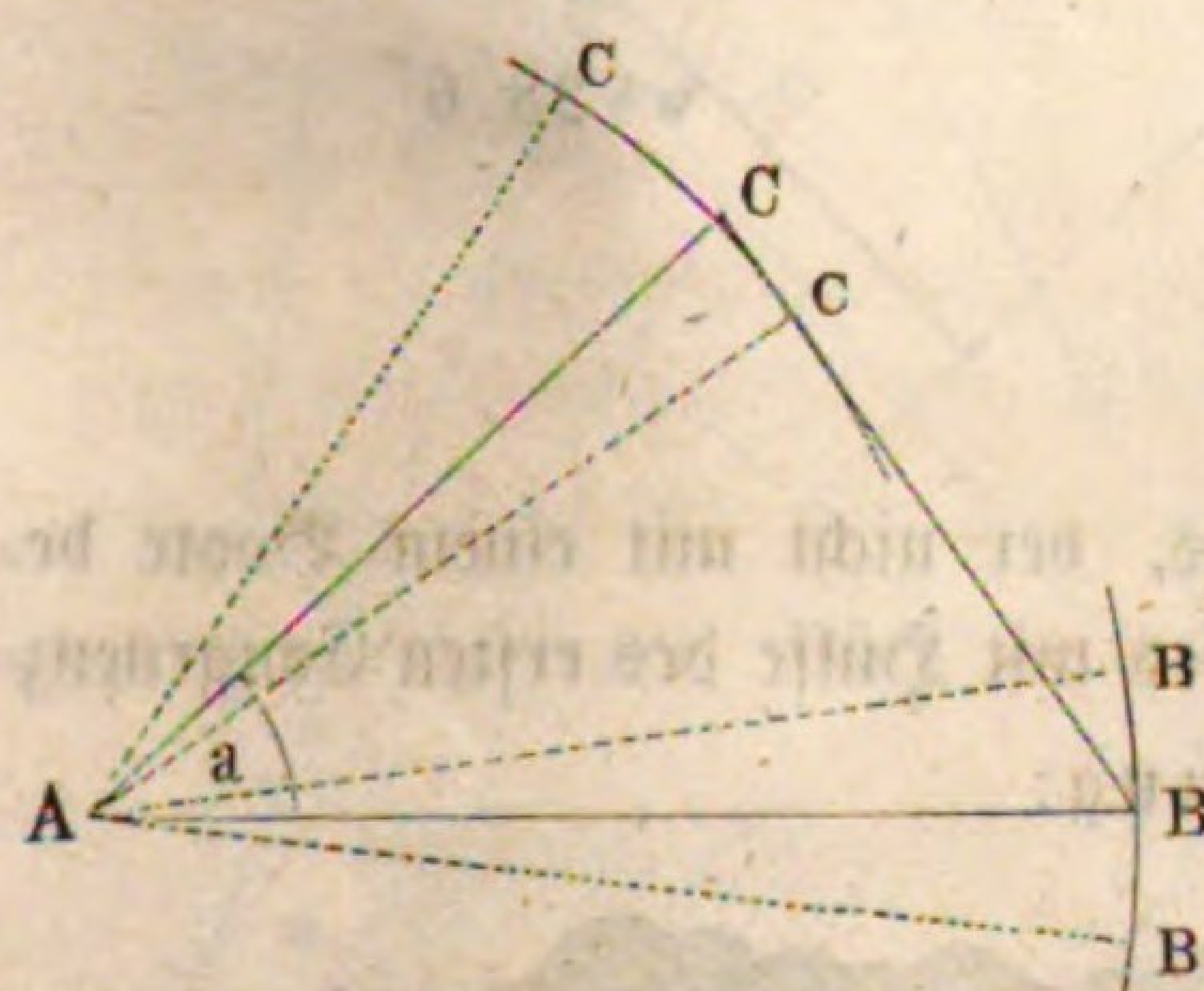
Von der Congruenz der Dreiecke über.

In diesem Paragraphen sollen wir bestimmen, durch wie viele und durch welche Stücke ein jedes Dreieck vollständig bestimmt ist. Ein Dreieck besteht aus 6 wesentlichen Stücken, nämlich aus drei Seiten und drei Winkeln; wir sollen also untersuchen, wie viele von diesen sechs Stücken man kennen muß, um daraus die unbekannten Stücke durch Construction finden zu können. Die fünf nachfolgenden Congruenzsätze geben uns Aufschluß über alle Möglichkeiten.

I. Congruenzsatz:

Durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ist ein Dreieck vollständig bestimmt.

Beweis:

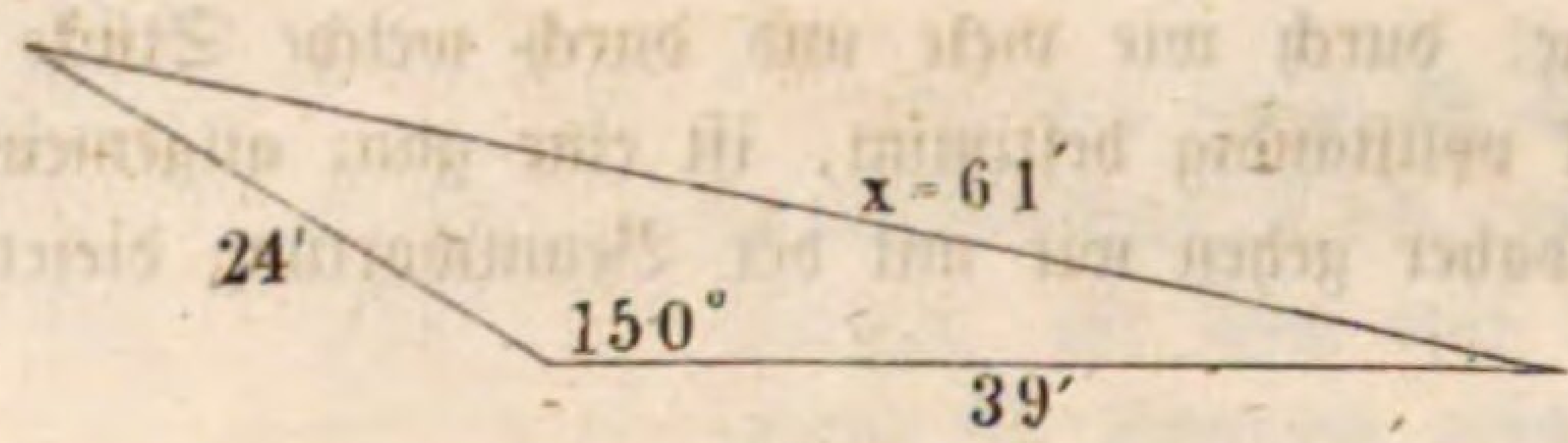


Die beiden Seiten AB und AC und der von ihnen eingeschlossene Winkel a sollen bekannt sein; alsdann kann man den beiden Seiten AC und AB allerdings eine andere Lage im Raume geben, ohne dadurch ihre Länge zu verändern; durch jede Veränderung ihrer Lage aber wird der eingeschlossene Winkel a verändert, d. h. entweder größer oder kleiner gemacht, was gegen die Bedingung und daher unerlaubt ist. Wenn aber die bekannten Seiten AC und AB keine andere Lage im Raume annehmen können, als die gegebene, so sind dadurch die beiden gegebenen Punkte B und C unverrückbar bestimmt; zwischen zwei Punkten aber ist nur eine gerade Linie möglich, und also ist die unbekannte Seite BC vollständig bestimmt und mit ihr das ganze Dreieck, d. h. auch die beiden unbekannten Winkel B und C können nur eine bestimmte Größe haben.

Aufgaben.

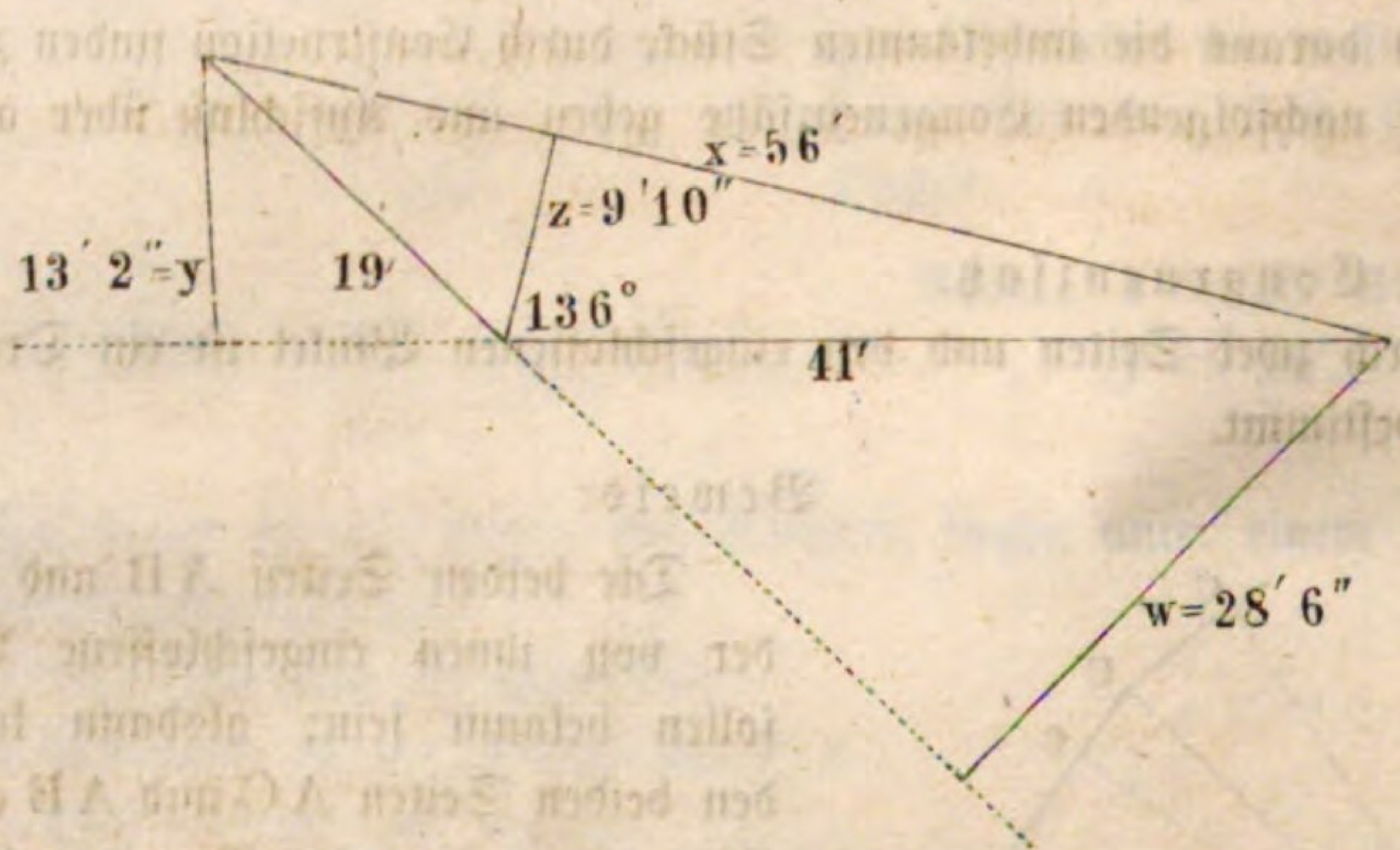
1) Wie lang ist die dritte unbekannte Seite eines Dreiecks, wenn die beiden andern Seiten 24′ und 39′ lang sind und einen Winkel von 150^0 einschließen?

$$x = 61'.$$



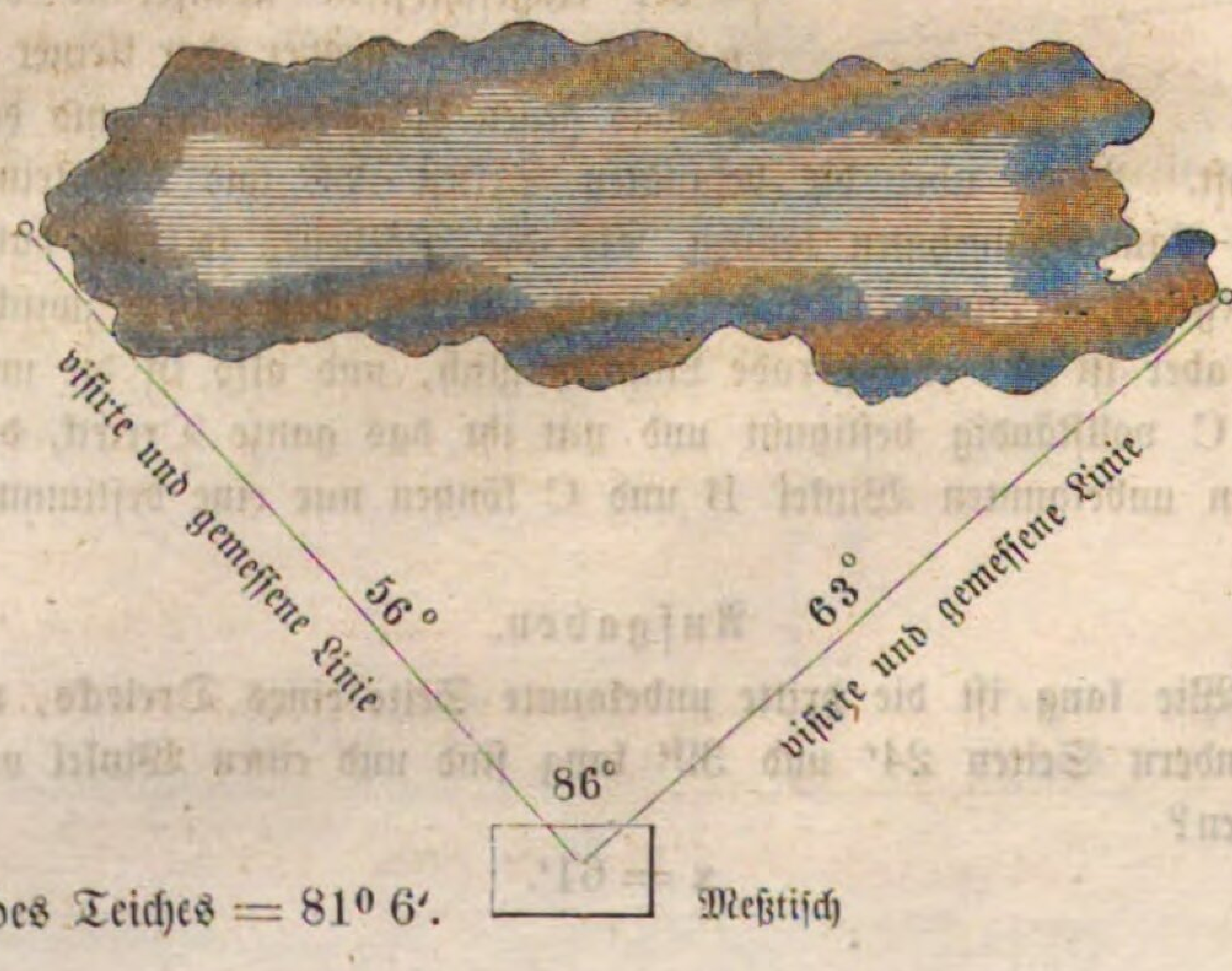
2) Die beiden bekannten Seiten eines Dreiecks sind 41′ und 19′ lang und schließen einen Winkel von 136⁰ ein; wie lang ist die dritte unbekannte Seite, und wie lang sind die drei Perpendikel?

x = 56′, Perpendikel z = 9′ 10″
 " y = 13′ 2″
 " w = 28′ 6″.



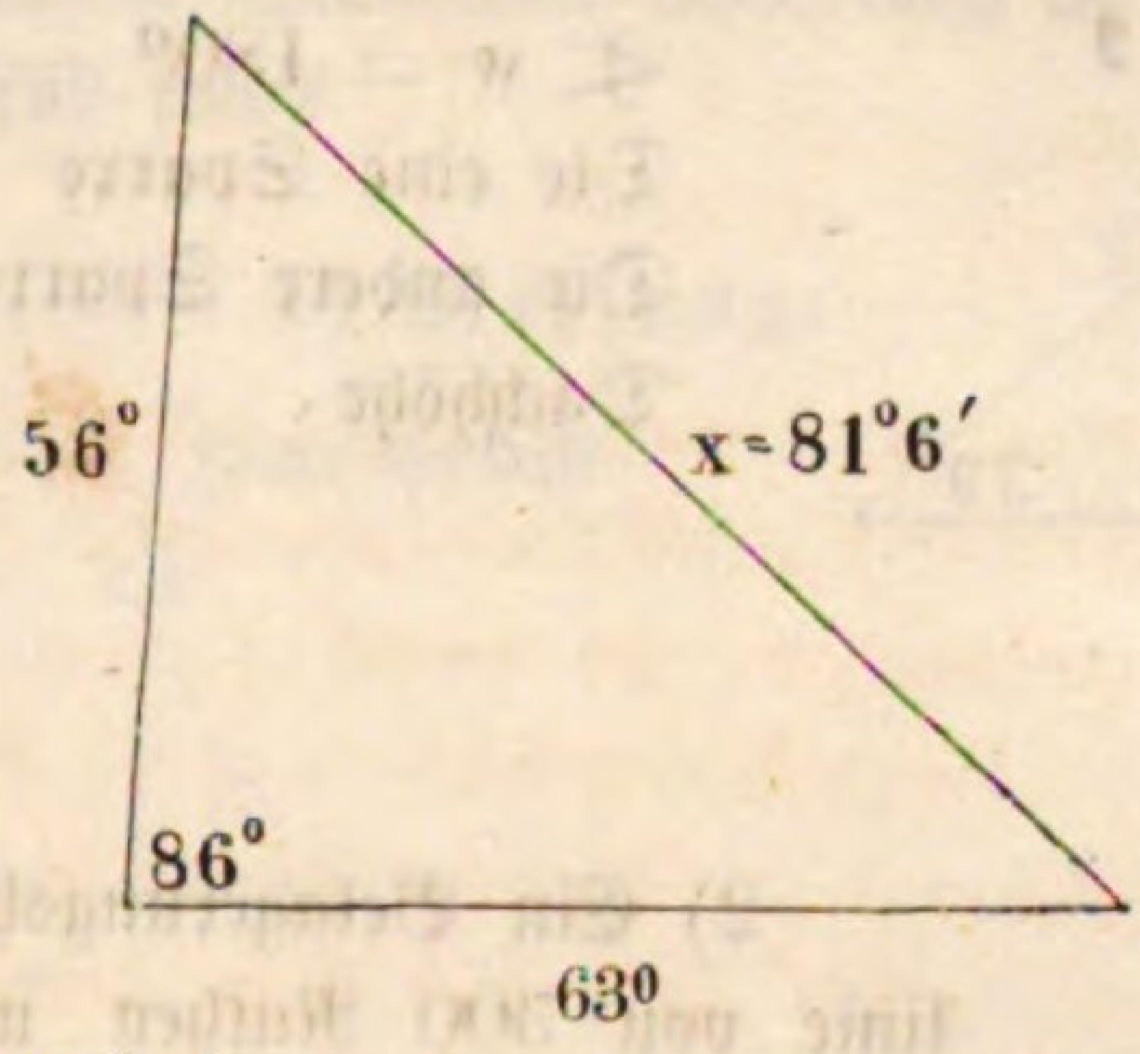
3) Man will die Breite eines Teiches, der nicht mit einem Boote befahren werden kann, ermitteln; wie ist dieses mit Hülfe des ersten Congruenzsatzes möglich?

1) Messung:



Breite des Teiches = 81⁰ 6′.

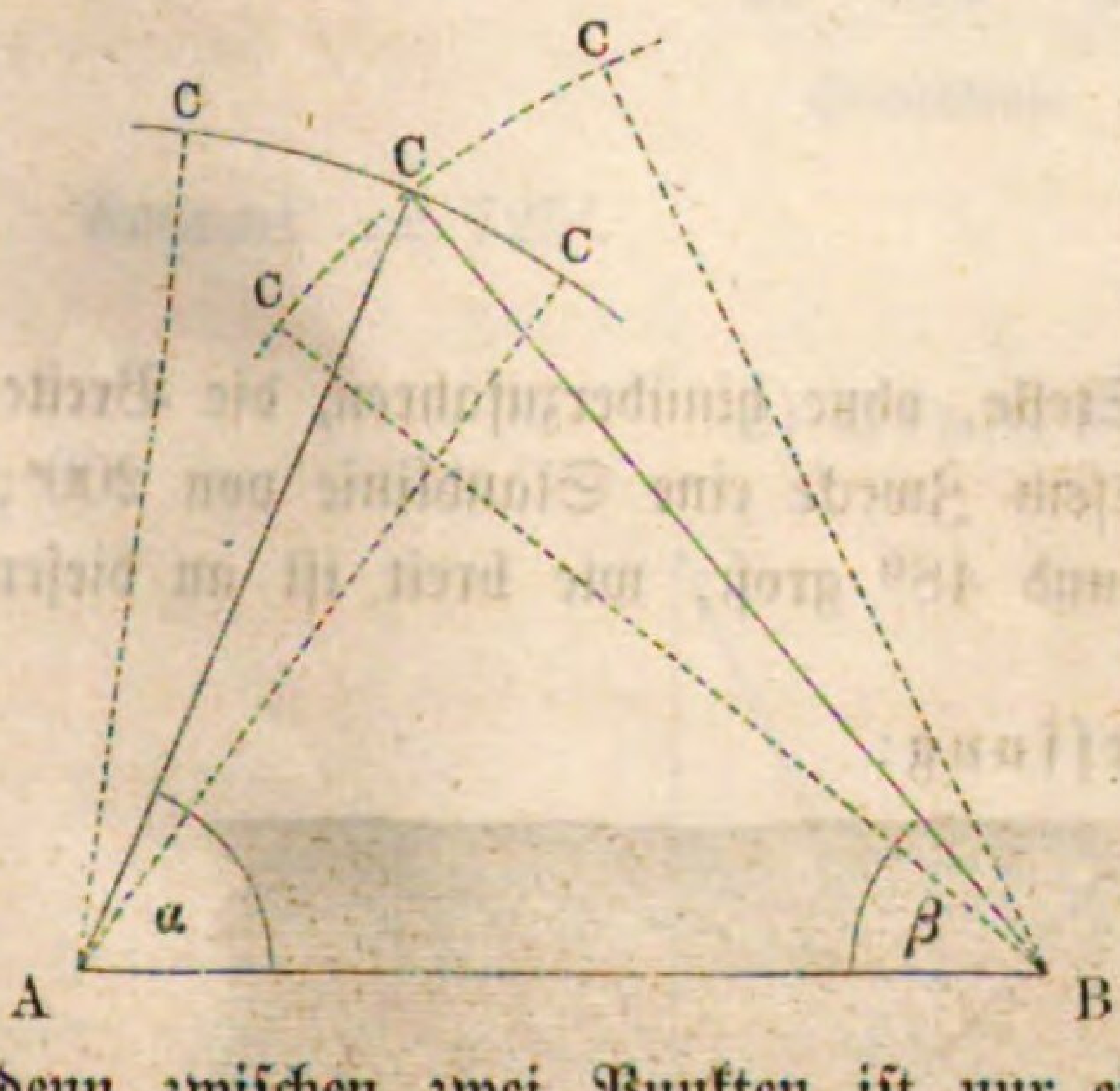
2) Construction:



II. Congruenzsatz:

Durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel ist ein Dreieck vollständig bestimmt.

Beweis:



Es seien in dem Dreieck ABC die Seite AB und die beiden anliegenden Winkel α und β der Größe nach bekannt; alsdann kann der Punkt C seinen Ort im Raume nicht verändern, ohne daß dadurch der eine oder beide gegebene Winkel verändert werden, was gegen die Bedingung ist. Da nun für den Punkt C nur ein Ort im Raume möglich ist, so können von A nach C und von B nach C nur zwei gerade Linien gezogen werden, denn zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich; mithin sind die beiden unbekannten Seiten AC und BC durch die gegebenen drei Stücke genau bestimmt. Der unbekannte Winkel x endlich ist gleich $180^0 - (\alpha + \beta)$; kann also jedesmal durch Rechnung gefunden werden.

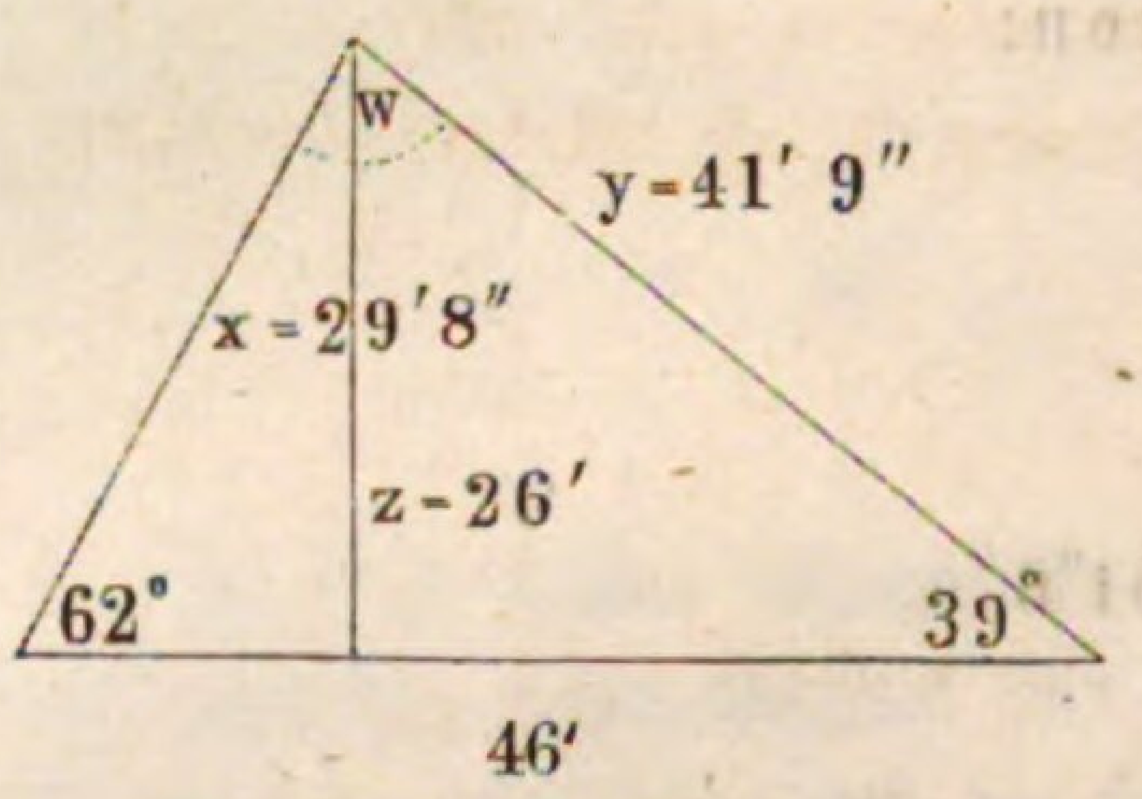
Aufgaben:

1) Ein Haus ist 46′ breit, eine Sparre soll unter einem Winkel von 62^0, die andere unter einem ∢ von 39^0 anliegen; es wird gefragt:

1) Wie lang muß der Zimmermann die Sparren abschneiden?

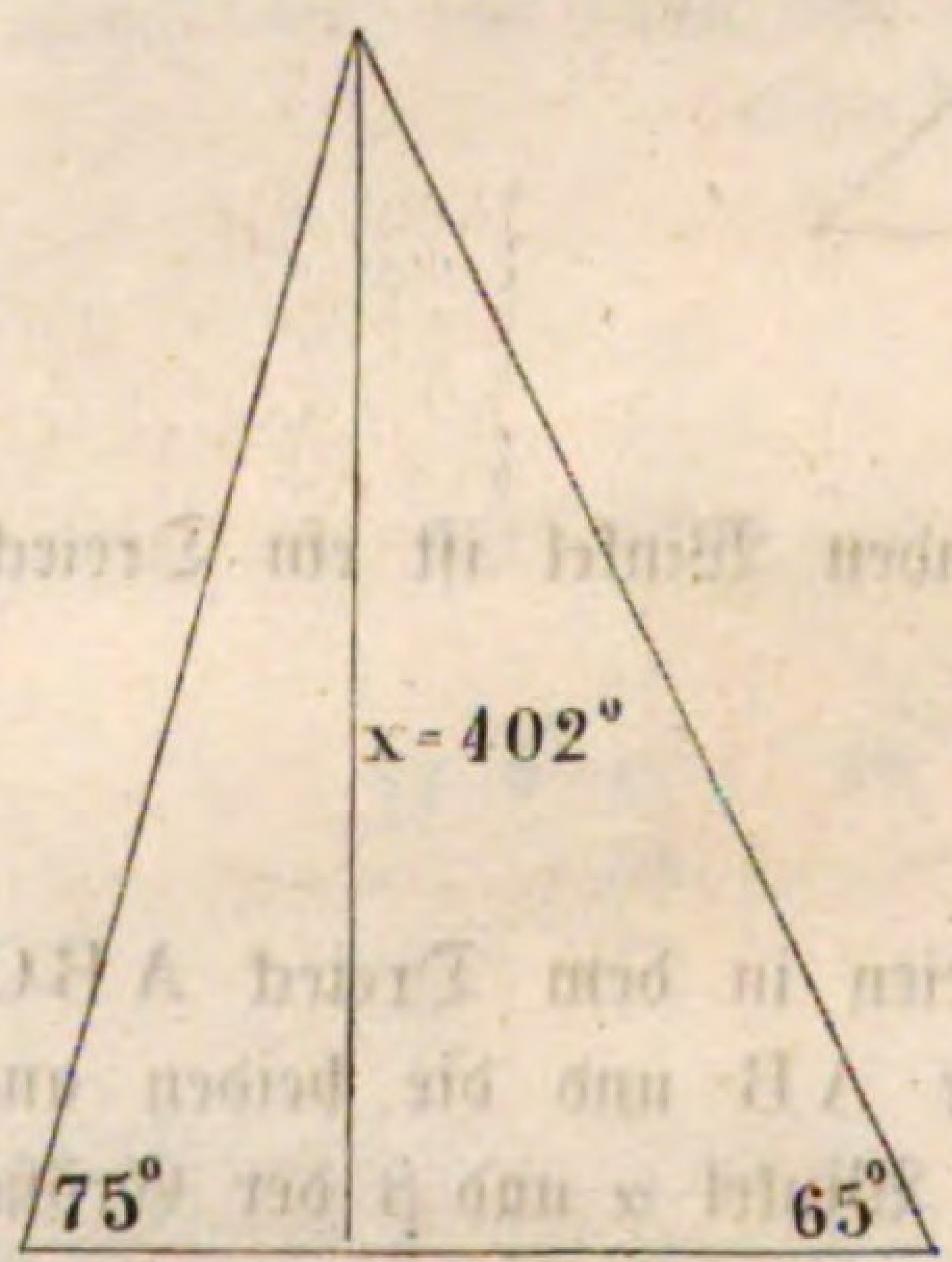
2) Wie hoch wird das Dach?

3) Wie groß ist der Winkel im First?



Antwort:

$\sphericalangle$ w $= 180^0 - (62^0 + 39^0) = 79^0$.
Die eine Sparre $= 29'\ 8''$
Die andere Sparre $= 41'\ 9''$
Dachhöhe $= 26'$.



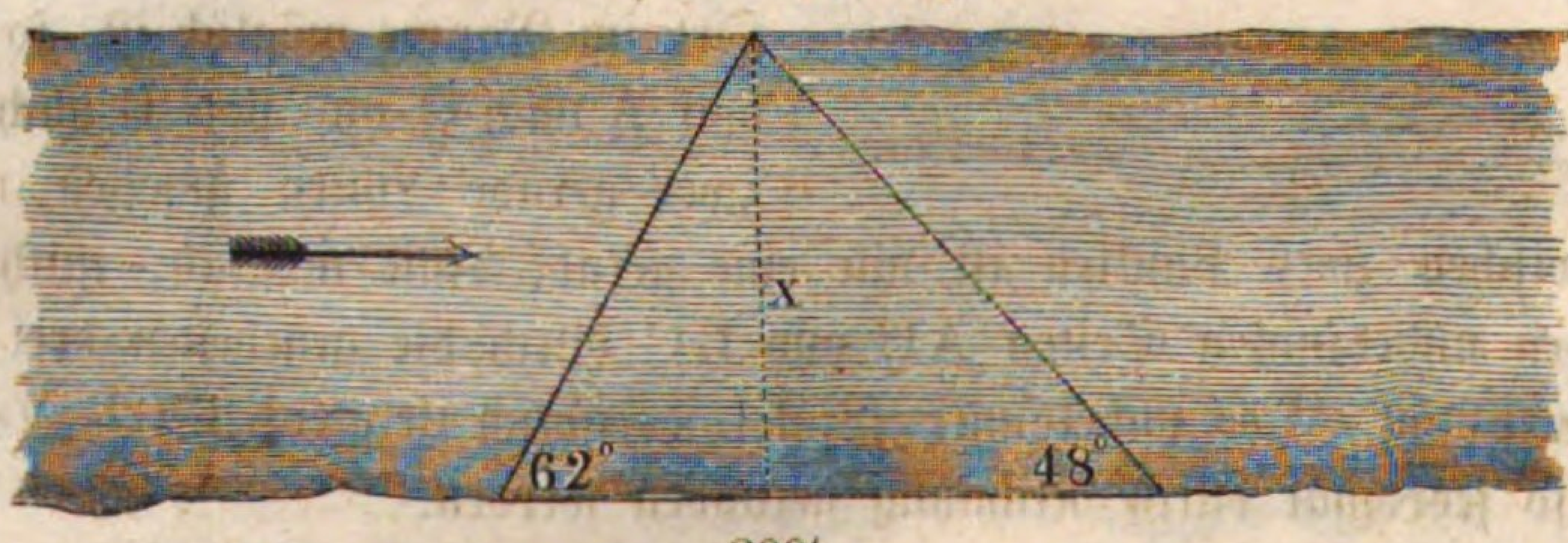
300 Ruthen.

2) Ein Belagerungsheer mißt eine Standlinie von 300 Ruthen und visirt von beiden Endpunkten bis Mitte der belagerten Festung einen Winkel von 75^0 und 65^0; wie weit ist der Mittelpunkt der Festung von den Belagerern entfernt?

Antwort: 402^0.

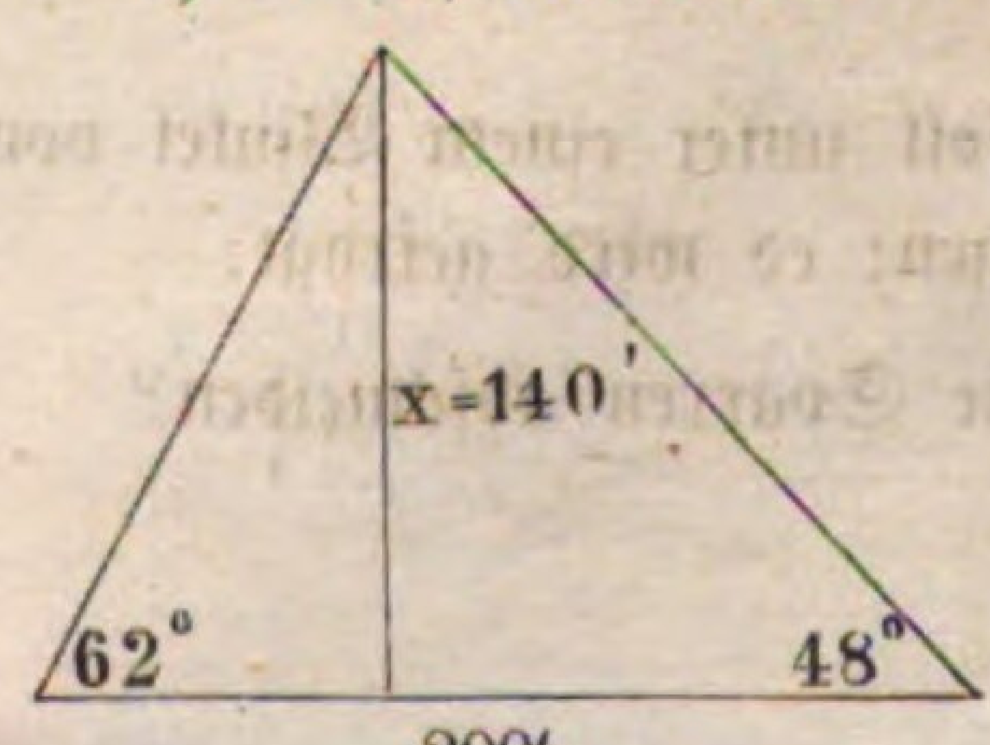
3) Man will an irgend einer Stelle, ohne hinüberzufahren, die Breite der Ruhr messen und nimmt zu diesem Zwecke eine Standlinie von $200'$; die beiden visirten Winkel sind 62^0 und 48^0 groß; wie breit ist an dieser Stelle die Ruhr?

1) Messung:



200′
Standlinie.

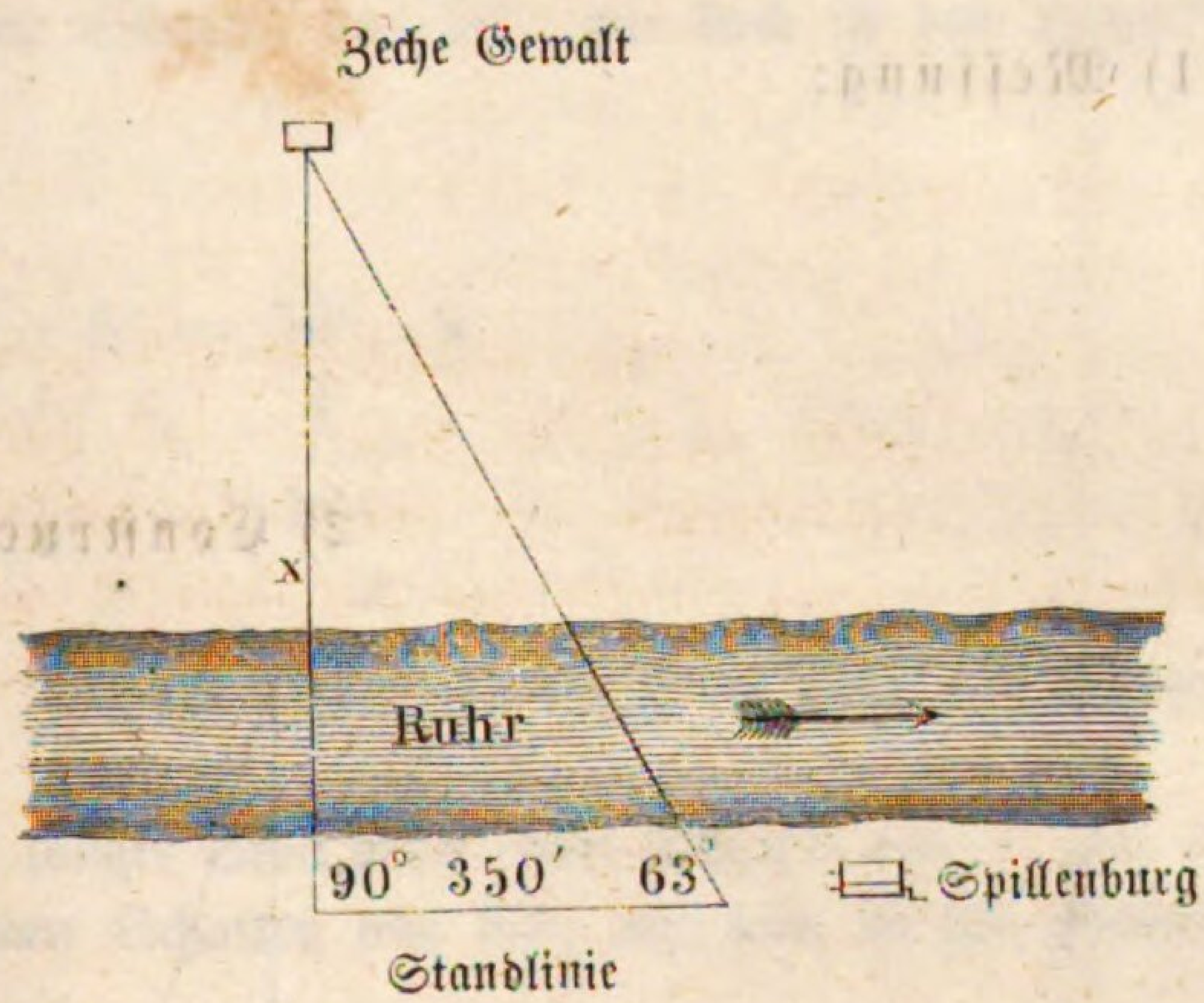
2) Construction:



Antwort: $= 140'$.

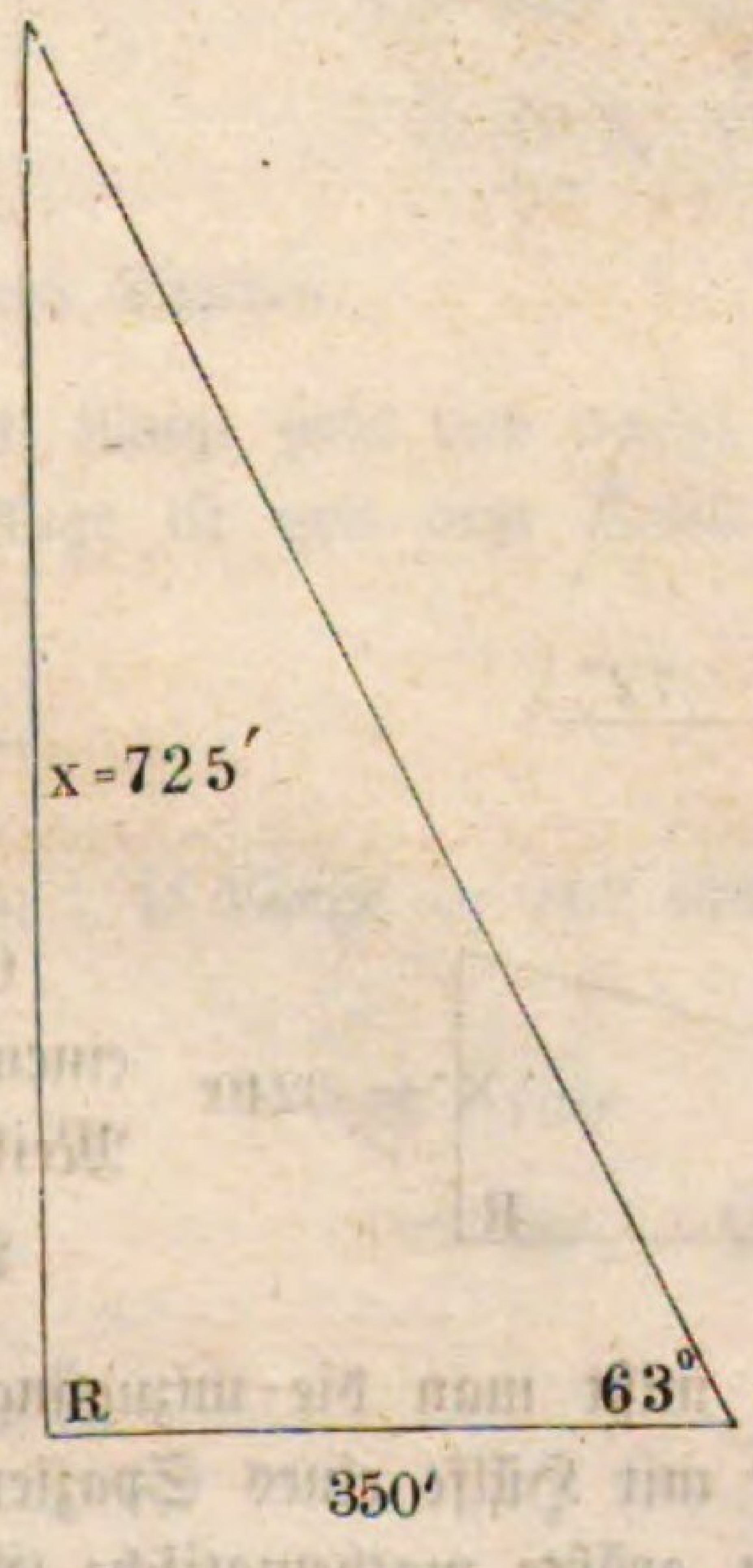
4) Wie weit liegt die Zeche Gewalt von Spillenburg entfernt, wenn die zu Spillenburg gemessene Standlinie 350′ lang ist und die beiden visirten Winkel 90⁰ und 63⁰ groß sind?

1) Messung:



Antwort = 725′.

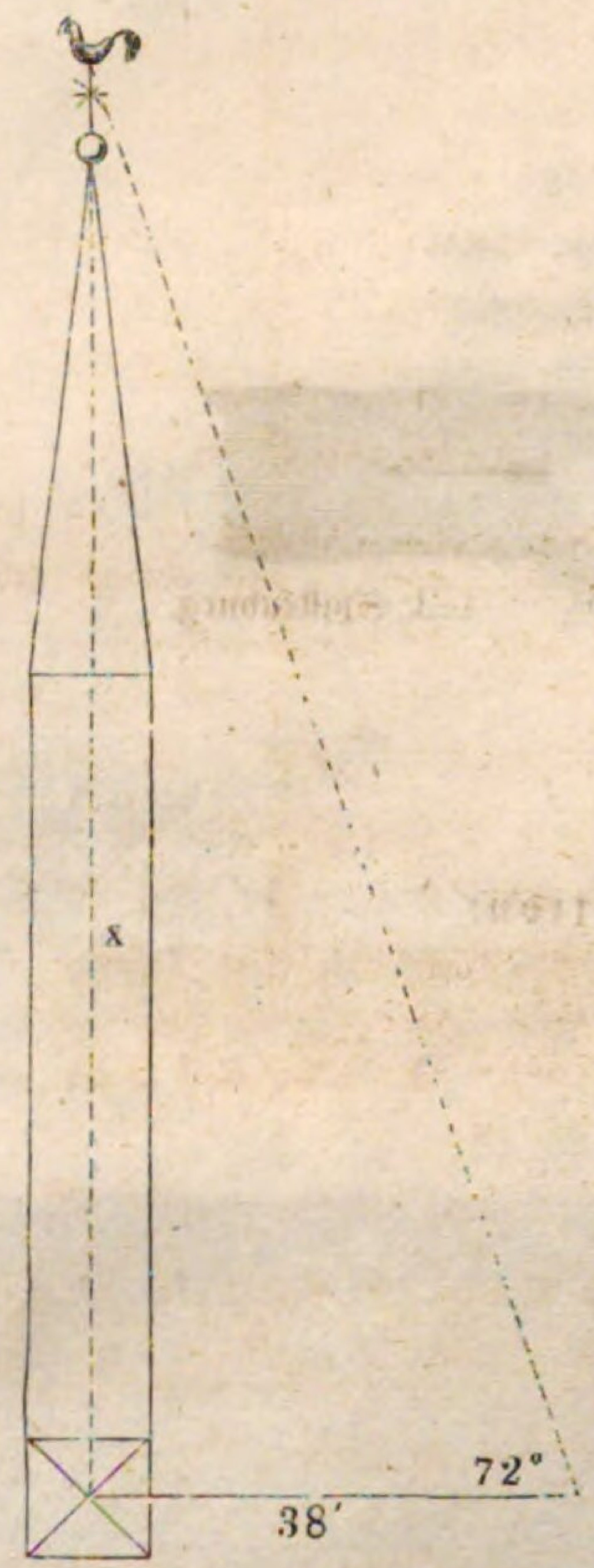
2) Construction:



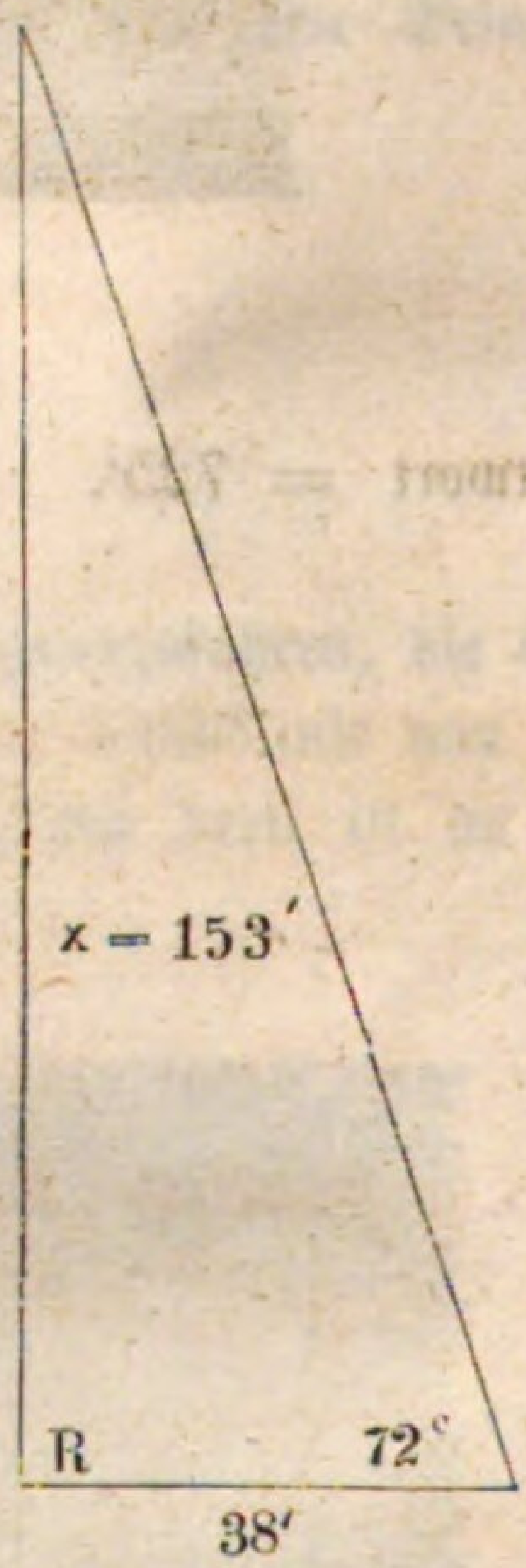
5) Wie hoch ist ein Kirchthurm, wenn man 38′ vom Mittelpunkte desselben entfernt stehend einen Winkel von 72⁰ nach der Spitze desselben visiren muß?

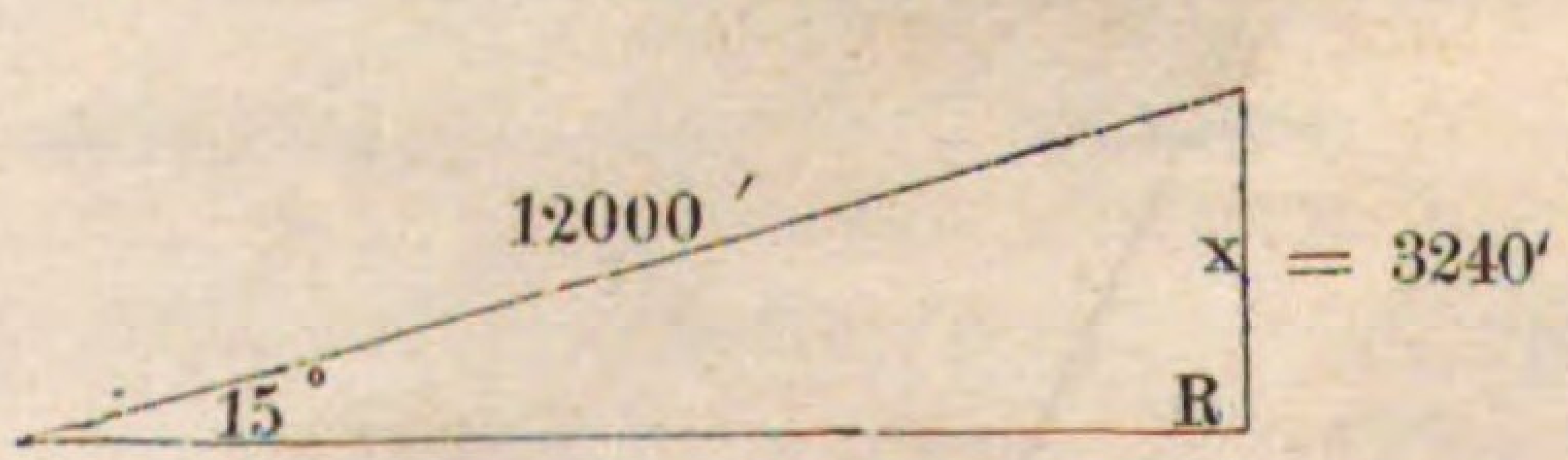
Antwort = 153′.

1) Messung:



2) Construction:





6) Ein Berg steigt unter einem Winkel von 15⁰ eine halbe Meile; wie hoch ist der Berg?

Antwort = 3240′.

Im praktischen Leben mißt man die unzugänglichen Höhen häufig mit Hülfe des Schattens, oder mit Hülfe eines Spazierstocks; beide Mittel sind brauchbar, wenn nicht die größte mathematische Genauigkeit verlangt wird.

Aufgaben:

1) Mit Hülfe des Schattens.

7) Ein 5′ langer Stock wirft einen Schatten von 3′ 9″, ein zu messendes Haus wirft einen Schatten von 56′; wie hoch ist das Haus?

Antwort:

$\frac{3^3/_4}{15} : 5' = 56' : x$

4

224

5

$15 \;) \; 1120 = 74^2/_5{}' =$ Höhe des Hauses.

8) Ein 3′ langer Stock wirft einen Schatten von 5′, und ein zu messender Baum wirft einen Schatten von 83′; wie hoch ist der Baum?

Antwort:

5′ Schatten : 3′ Höhe = 83′ Schatten : x

3

$5 \;) \; 249$

$= 49^4/_5{}' =$ Höhe des Baumes.

2) Mit Hülfe eines Stockes.

9) Ein Stock von 4′ Länge steht von einem zu messenden Baume 28′ entfernt, das visirende Auge ist von dem Stocke 2′ entfernt; wie hoch ist der Baum?

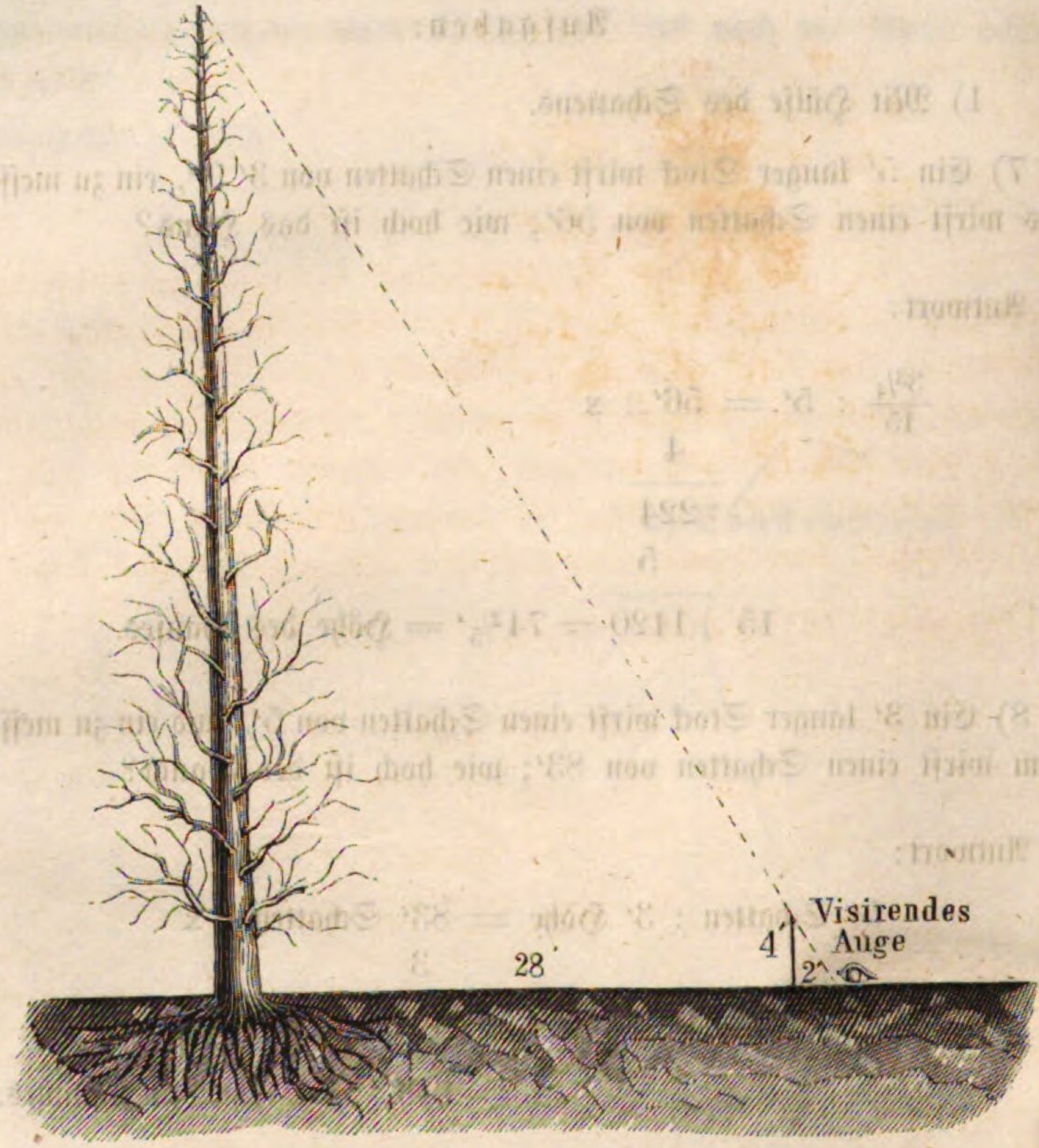
Antwort:

2′ Entfernung : 4′ Länge = 30′ Entfernung : x

4

$2 \;) \; 120$

$= 60' =$ Höhe des Baumes.



10) Ein senkrecht stehender Stock ist 12′ lang; das visirende Auge ist von demselben 5′ entfernt; der Stock steht von dem zu messenden Gegenstand 42′ ab; wie hoch ist das Object?

Antwort:

$$5' : 12' = 47' : x$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 94 \\ 47 \\ \hline 5 \;)\; 564 \;(\; 112^4/_5{}' = \text{Höhe des Gegenstandes.} \\ 560 \\ \hline 4 \end{array}$$

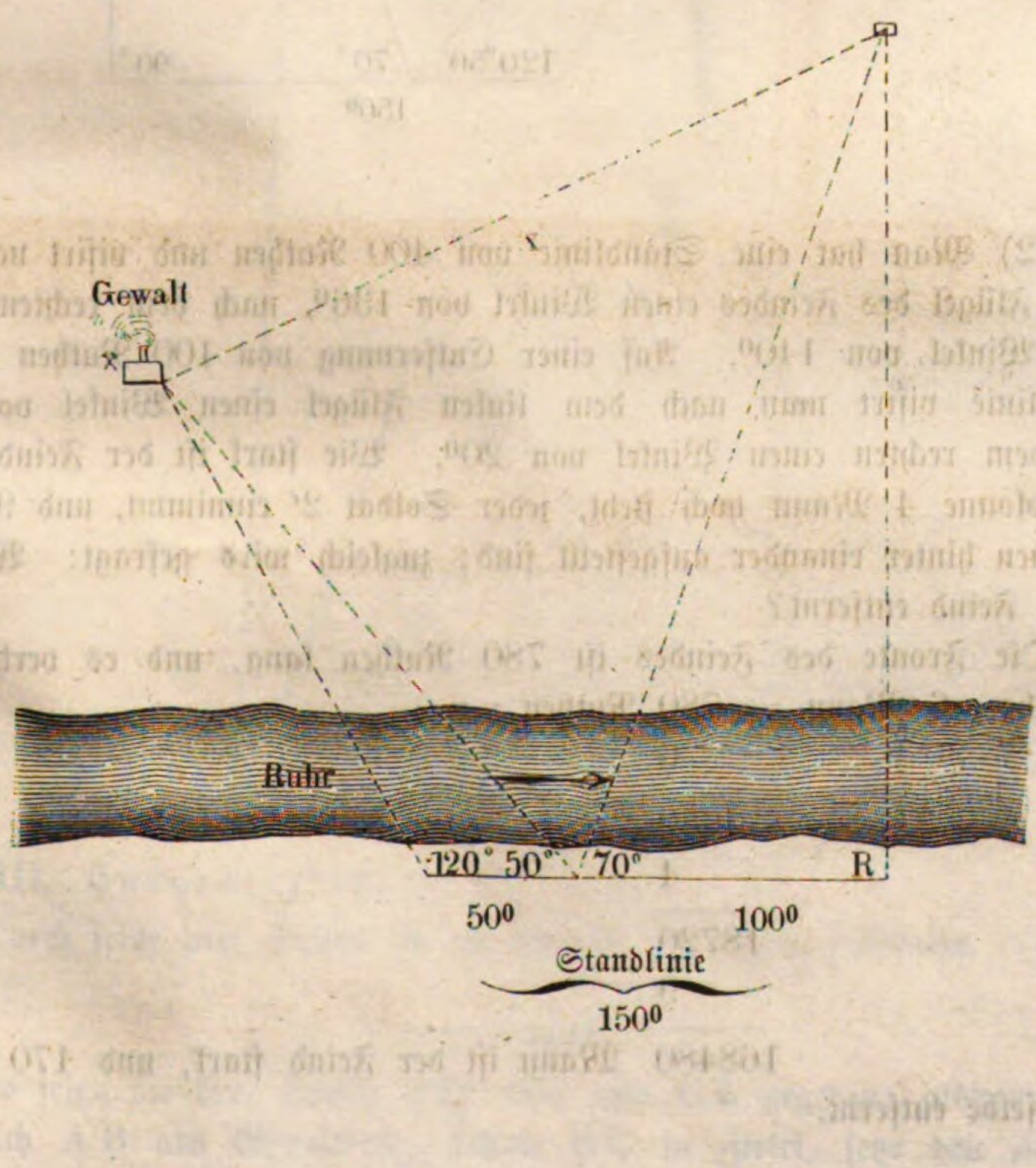
11) Man ist gezwungen, diesseits der Ruhr zu bleiben, und soll dennoch ermitteln, wie weit die Zeche Gewalt von einem bestimmten Punkte jenseits der Ruhr entfernt liegt; wie läßt sich diese Aufgabe mit Hülfe der beiden ersten Congruenzsätze lösen?

Antwort:

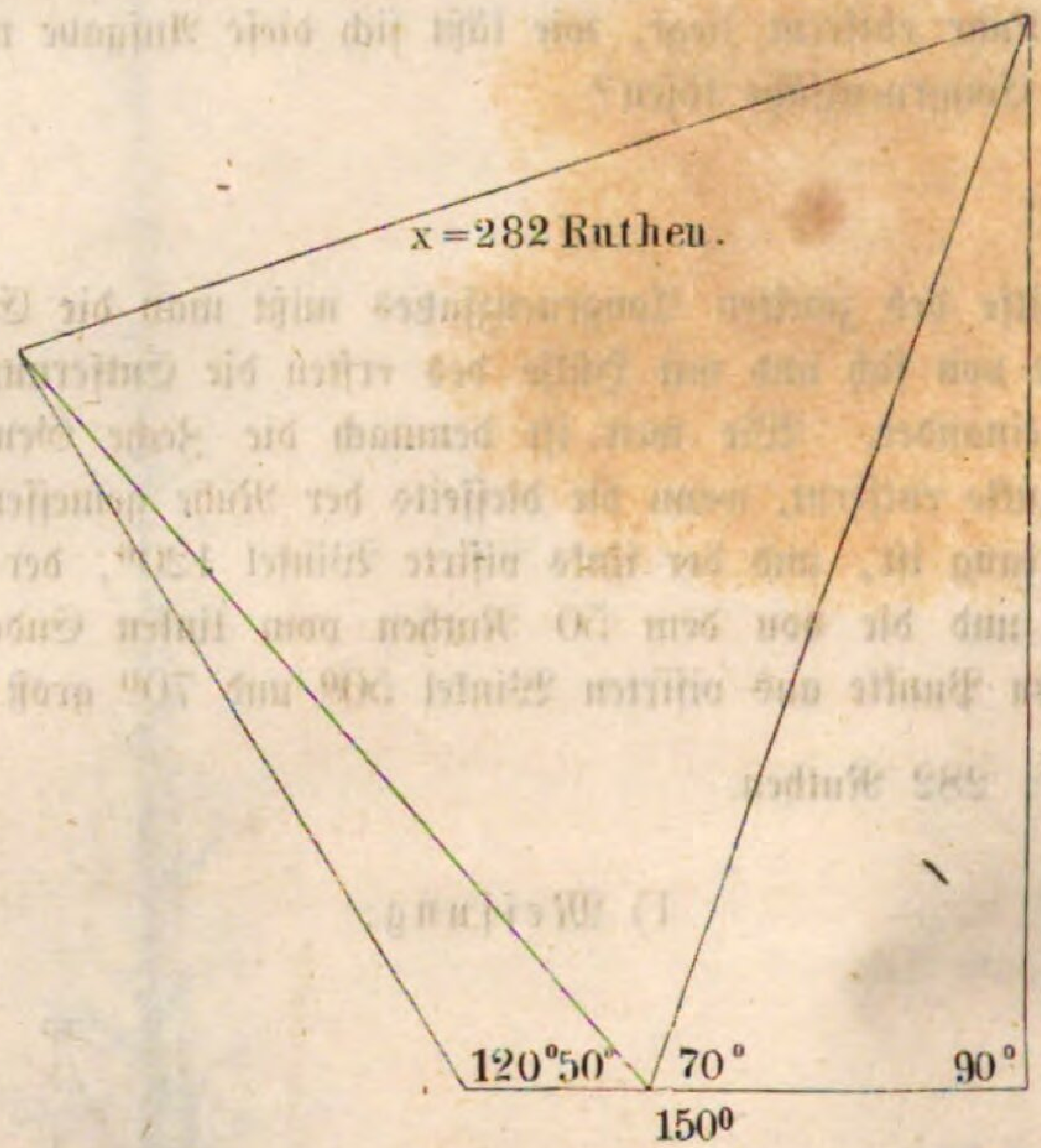
Mit Hülfe des zweiten Congruenzsatzes mißt man die Entfernung der beiden Punkte von sich und mit Hülfe des ersten die Entfernung der beiden Punkte von einander. Wie weit ist demnach die Zeche Gewalt von dem fraglichen Punkte entfernt, wenn die diesseits der Ruhe gemessene Standlinie 150 Ruthen lang ist, und der links visirte Winkel 120⁰, der rechts visirte Winkel 90⁰, und die von dem 50 Ruthen vom linken Ende der Standlinie entfernten Punkte aus visirten Winkel 50⁰ und 70⁰ groß sind?

Antwort: 282 Ruthen.

1) Messung:



2) Construction:

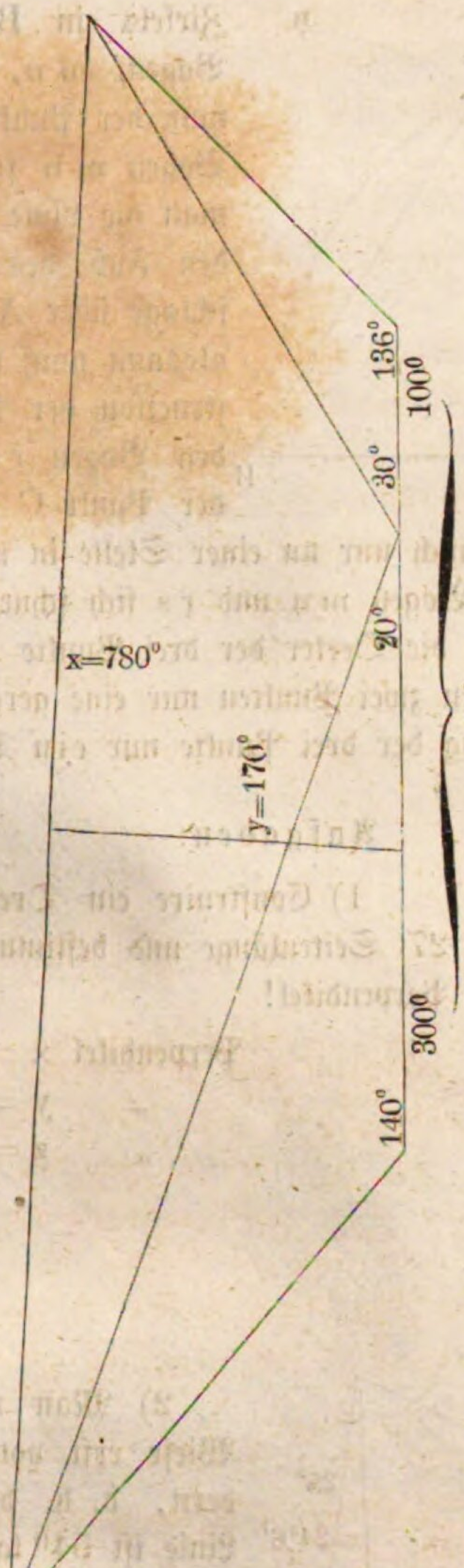


12) Man hat eine Standlinie von 400 Ruthen und visirt nach dem linken Flügel des Feindes einen Winkel von 136⁰, nach dem rechten Flügel einen Winkel von 140⁰. Auf einer Entfernung von 100 Ruthen auf der Standlinie visirt man nach dem linken Flügel einen Winkel von 30⁰, nach dem rechten einen Winkel von 20⁰. Wie stark ist der Feind, wenn die Colonne 4 Mann hoch steht, jeder Soldat 2′ einnimmt, und 9 gleiche Colonnen hinter einander aufgestellt sind; zugleich wird gefragt: Wie weit ist der Feind entfernt?

Die Fronte des Feindes ist 780 Ruthen lang, und es verhält sich
1 Ruthe : 6 Mann = 780 Ruthen : x

$$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 4680 \\ 4 \\ \hline 18720 \\ 9 \\ \hline 168480 \end{array}$$

168480 Mann ist der Feind stark, und 170 Ruthen ist derselbe entfernt.

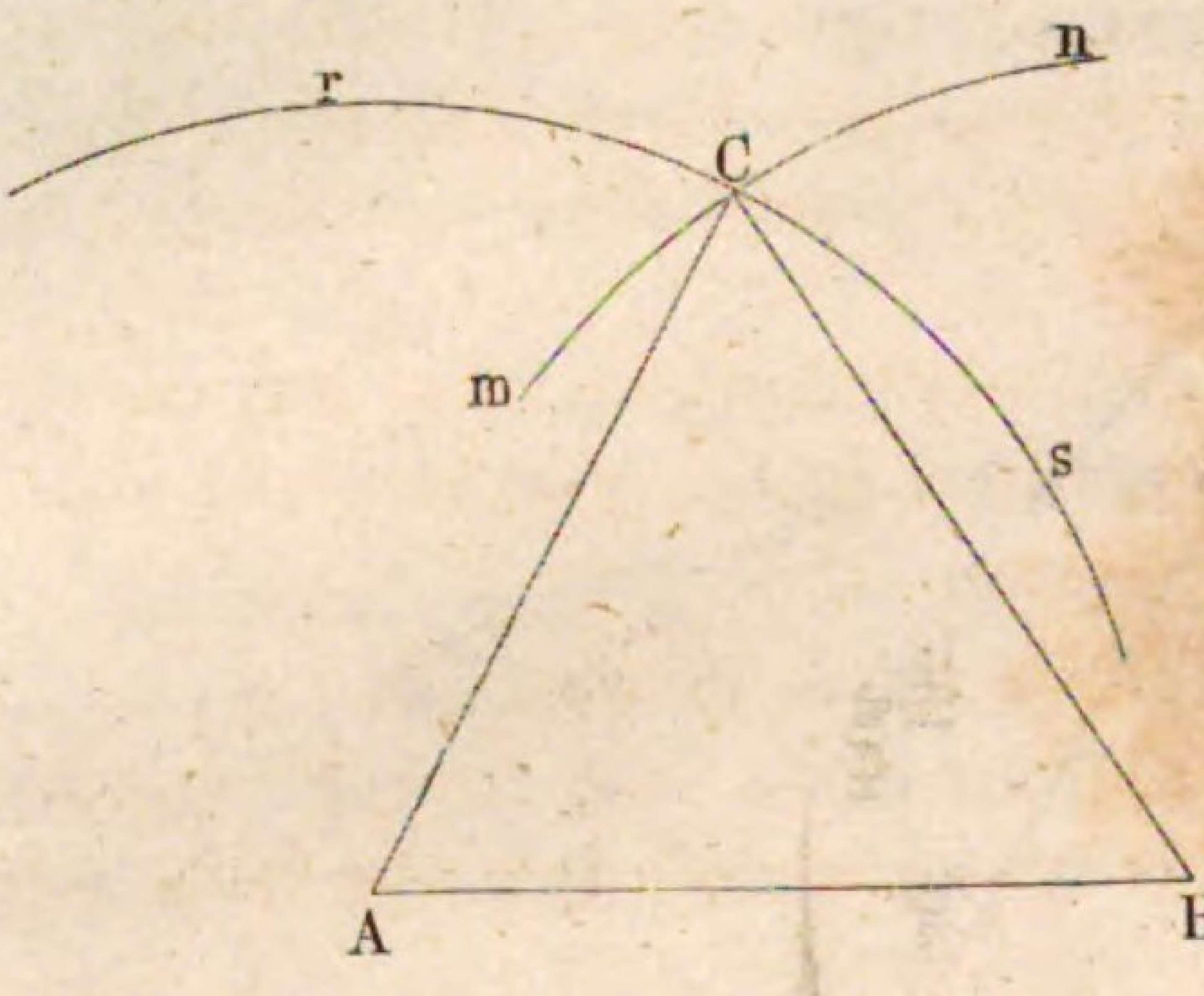


III. Congruenzsatz:

Durch seine drei Seiten ist ein Dreieck vollständig bestimmt.

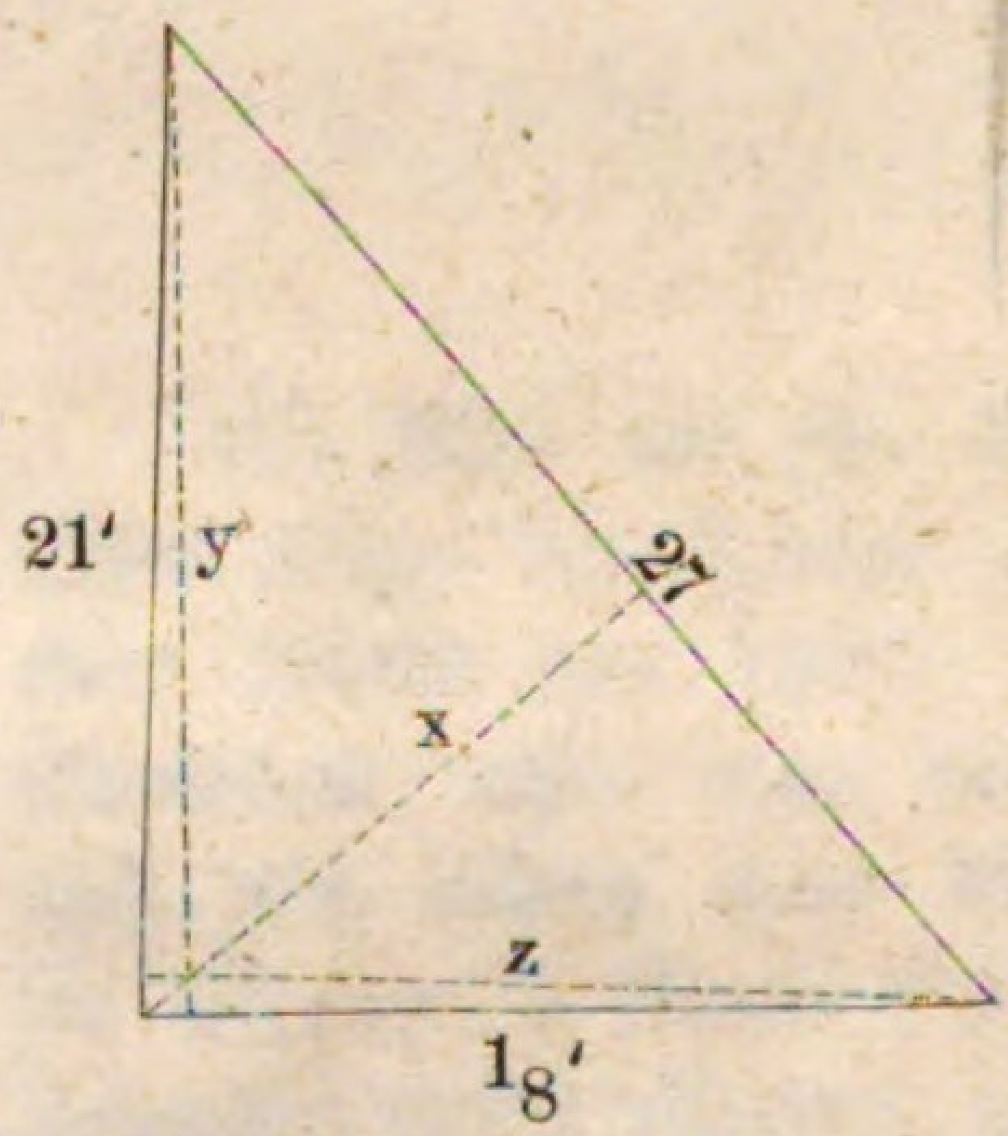
Beweis:

Es seien die drei Seiten AB, BC und CA gegeben; alsdann denke man sich AB als Grundlinie, nehme BC in Zirkel, setze den Fuß des



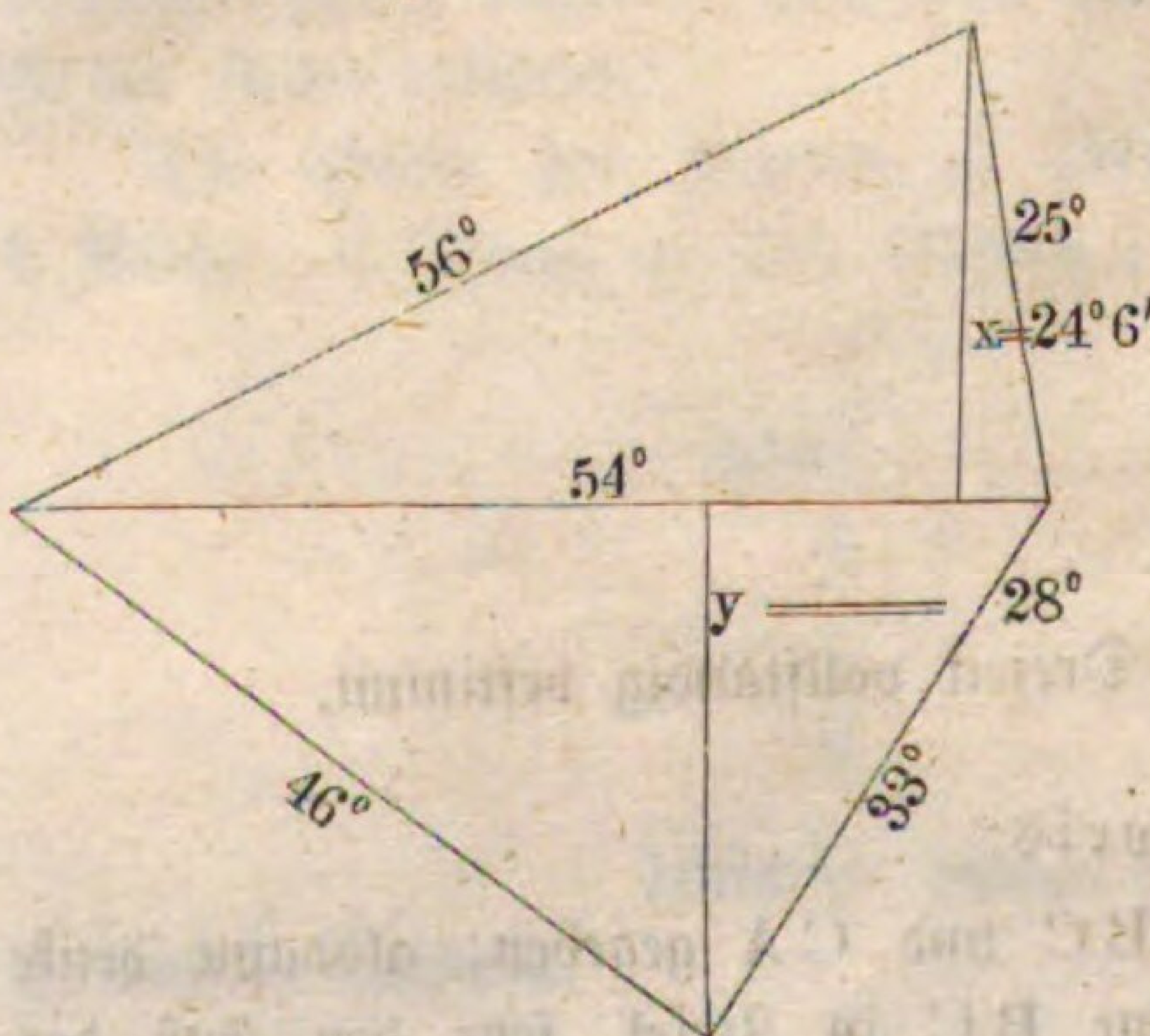
Zirkels in B und schlage einen Bogen, m n, über A B; alsdann muß der Punkt C irgendwo in den Bogen m n fallen. Ebenso nehme man die Linie C A in Zirkel, setze den Fuß des Zirkels in A und schlage über A B einen Bogen r s; alsdann muß wieder nach der Construction der Punkt C irgendwo in den Bogen r s fallen. Da aber der Punkt C nur an einer Stelle in m n liegt und ebenso auch nur an einer Stelle in r s, so muß er gerade da liegen, wo die beiden Bogen m n und r s sich schneiden. Durch die drei gegebenen Linien sind also die Oerter der drei Punkte A, B, C im Raume bestimmt, und weil zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie möglich ist, so ist durch die Verbindung der drei Punkte nur e i n Dreieck möglich.

A u f g a b e n:



1) Construire ein Dreieck von 18,21 und 27' Seitenlänge und bestimme die Länge der drei Perpendikel!

Perpendikel x = 20' 9''
" y = 17' 10''
" z = 14'.

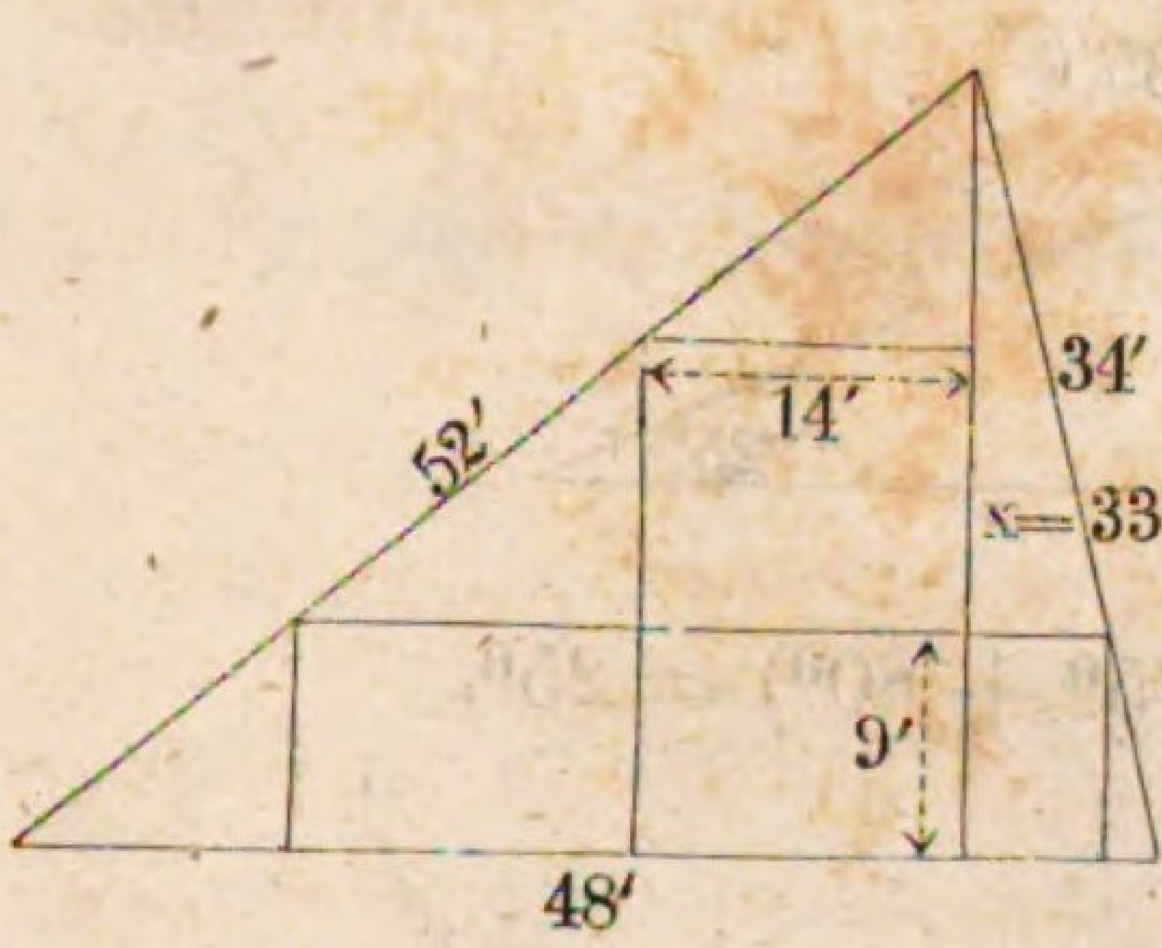


2) Man mißt eine vierseitige Wiese erst von einer Ecke zur andern, d. h. die Diagonale; diese Linie ist 54^{0} lang; die beiden Wälle über dieser Diagonale sind 56 und 25^{0} lang; die beiden Wälle unter derselben hingegen sind 46 und 33^{0} lang; wie sieht diese Figur in der Zeichnung aus, und wie lang sind die beiden Perpendikel auf die Diagonale?

Antwort:

Perpendikel $x = 24^0\ 6'$

" $y = 28^0$.



3) Ein Haus ist 48′ breit; eine Sparre auf demselben ist 52′, eine andere 34′ lang. Es wird gefragt:

1) Wie hoch ist das Dach?

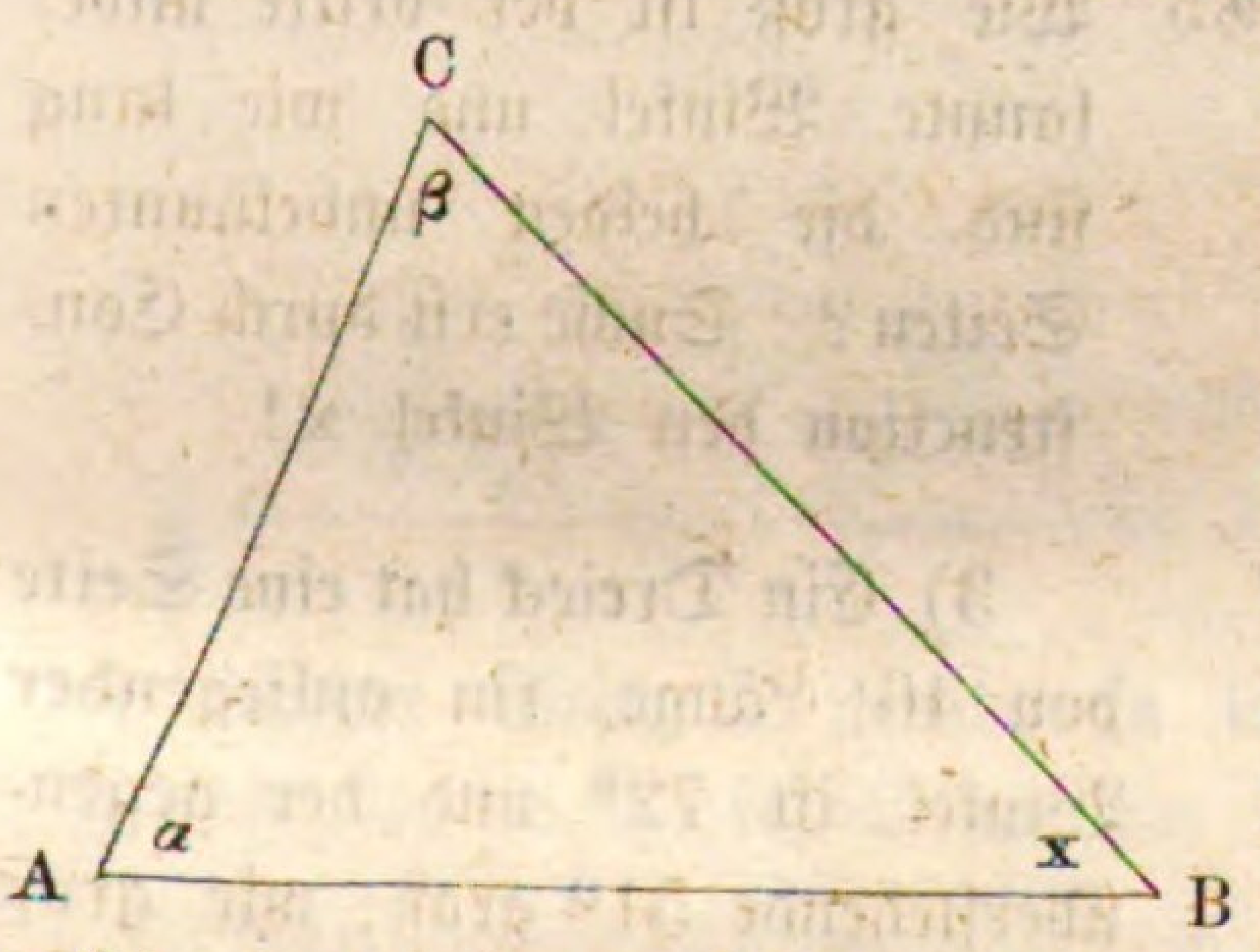
2) Wie breit kann eine Giebelstube von 9′ Höhe und wie hoch eine solche von 14′ Breite werden?

Dachhöhe = 33′.

Eine Giebelstube von 9′ Höhe kann 34′ breit und eine solche von 14′ Breite 21′ hoch werden.

IV. Congruenzsatz:

Durch eine Seite, einen anliegenden und einen gegenüberstehenden Winkel ist ein Dreieck vollständig bestimmt.



Beweis:

Es seien die Seite AB und die beiden Winkel α und β der Größe nach bekannt, alsdann ist der dritte unbekannte Winkel $x = 180^0 - (\alpha + \beta)$; es ist also jedesmal möglich, den dritten unbekannten Winkel eines Dreiecks durch Rechnung zu finden. Sind aber alle drei Winkel eines Dreiecks bekannt, so sind auch die beiden Winkel bekannt, welche der bekannten Seite anliegen; mithin läßt sich der vierte Congruenzsatz durch Berechnung des einen anliegenden, unbekannten Winkels jedesmal auf den zweiten Congruenzsatz zurückführen.

Aufgaben:

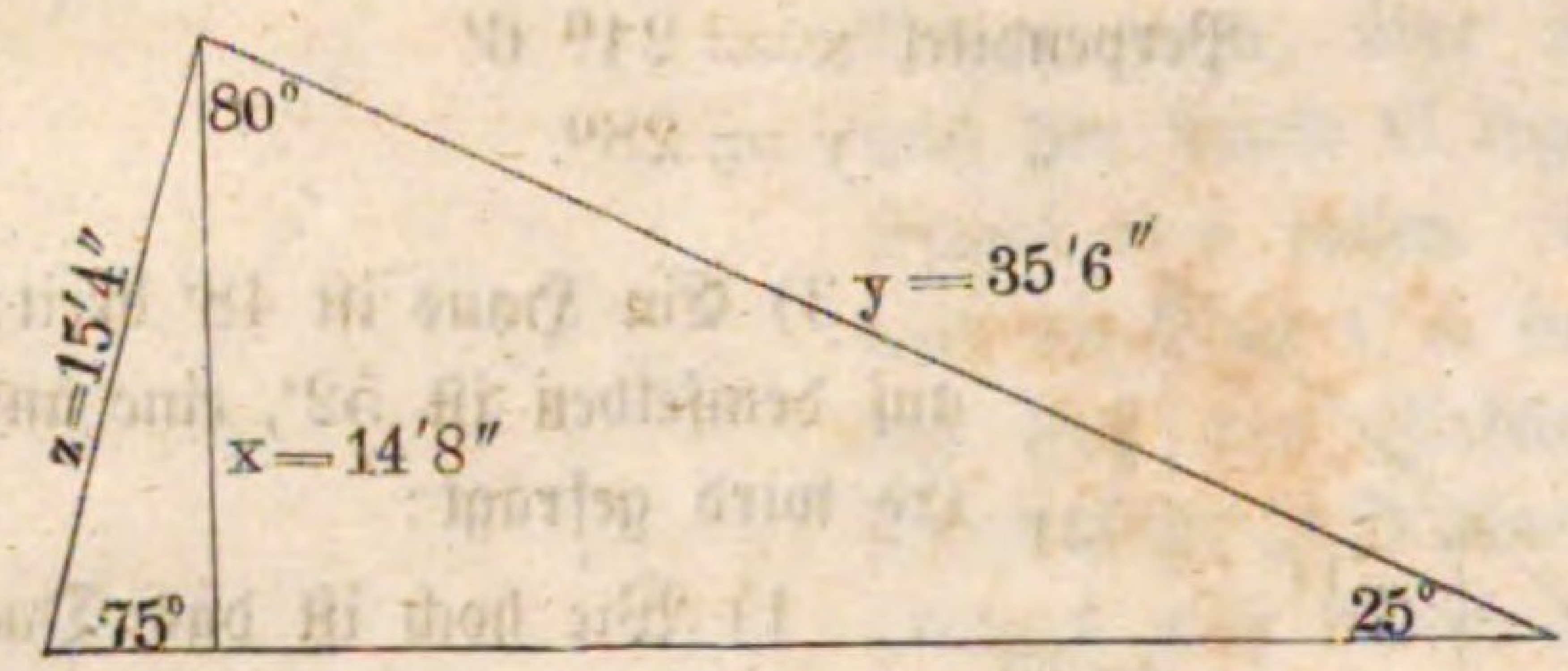
1) Ein Haus ist 36′ breit, eine Sparre liegt unter einem Winkel von 75^0 an und bildet mit der andern Sparre im First einen Winkel von 80^0; wie lang sind die beiden Sparren und wie hoch ist das Dach?

Antwort: $x = 14'\ 8''$

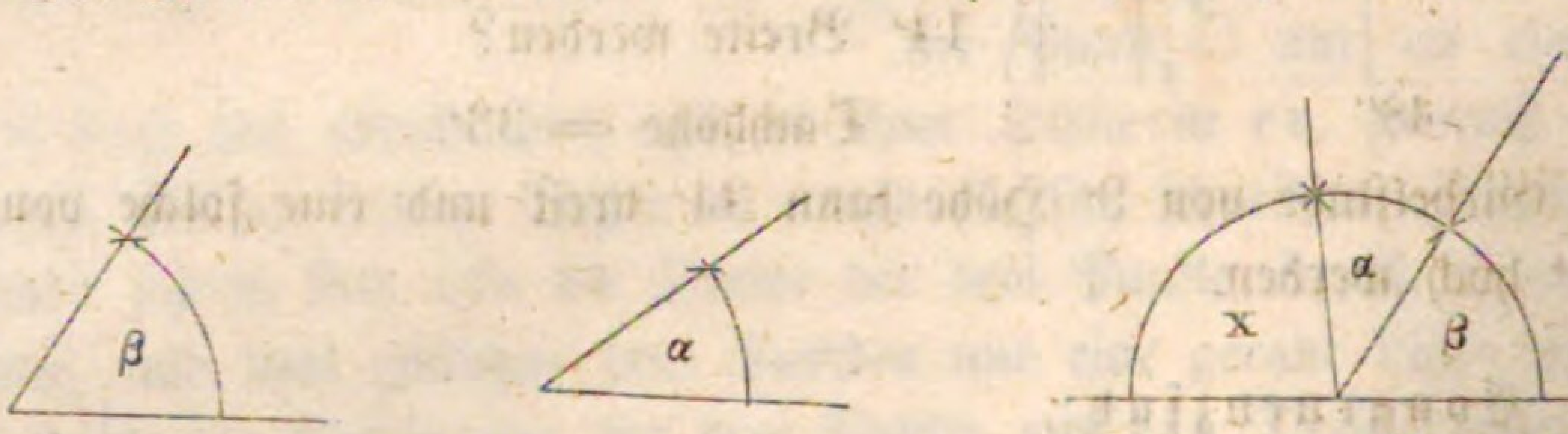
$y = 35'\ 6''$

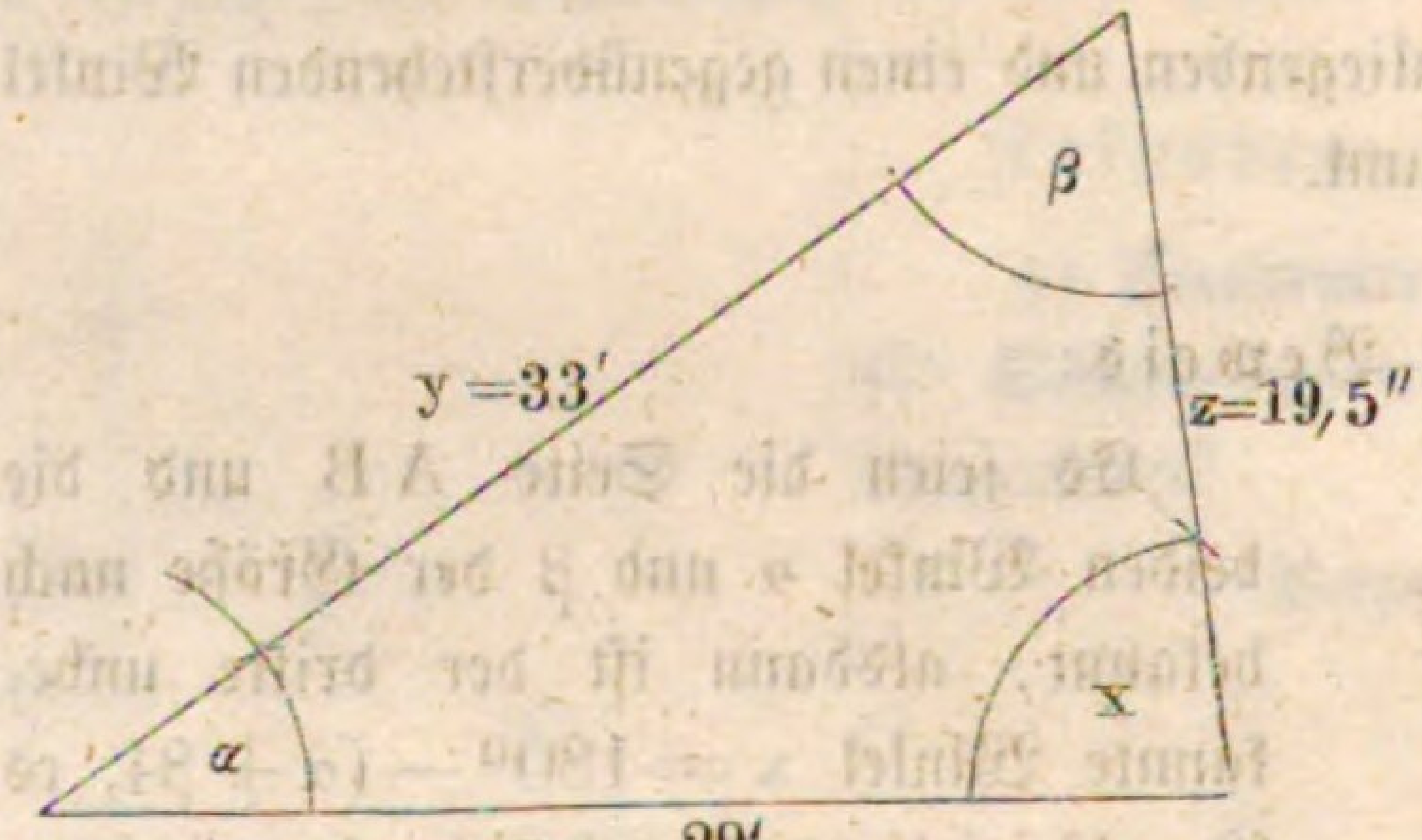
$z = 15'\ 4''$.

Staatl. Bibliothek Passau

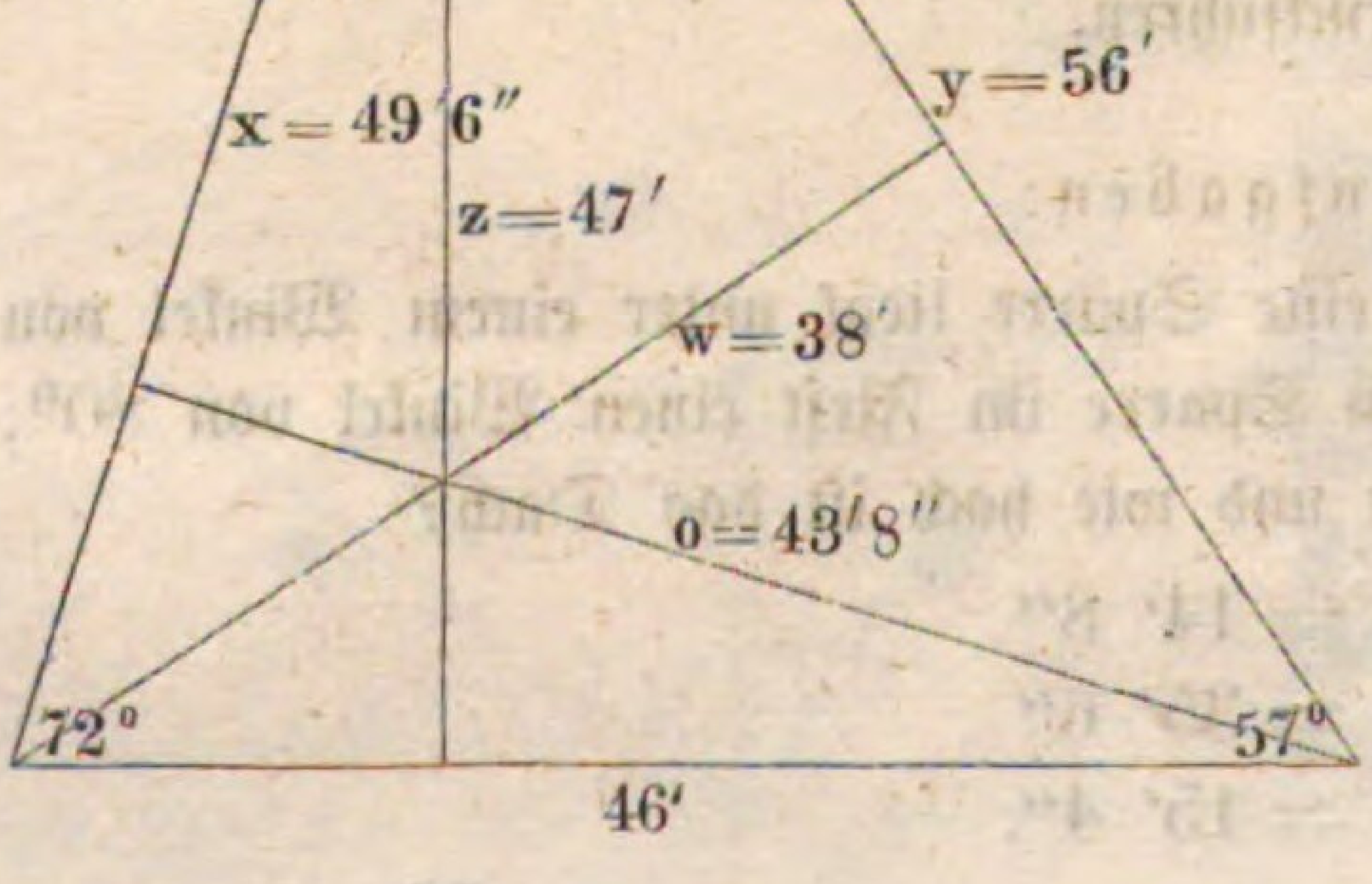


Der unbekannte Winkel $= 180^0 - (75^0 + 80^0) = 25^0$.





2) Die Grundlinie eines Dreiecks ist 29′ lang; der anliegende Winkel ist $= \alpha$, der gegenüberstehende Winkel $= \beta$. Wie groß ist der dritte unbekannte Winkel und wie lang sind die beiden unbekannten Seiten? Suche erst durch Construction den Winkel x!



3) Ein Dreieck hat eine Seite von 46′ Länge, ein anliegender Winkel ist 72^0 und der gegenüberstehende 51^0 groß; wie groß ist der dritte unbekannte Winkel? Wie lang sind die beiden unbekannten Seiten und wie lang sind die drei Perpendikel des Dreiecks?

Antwort:

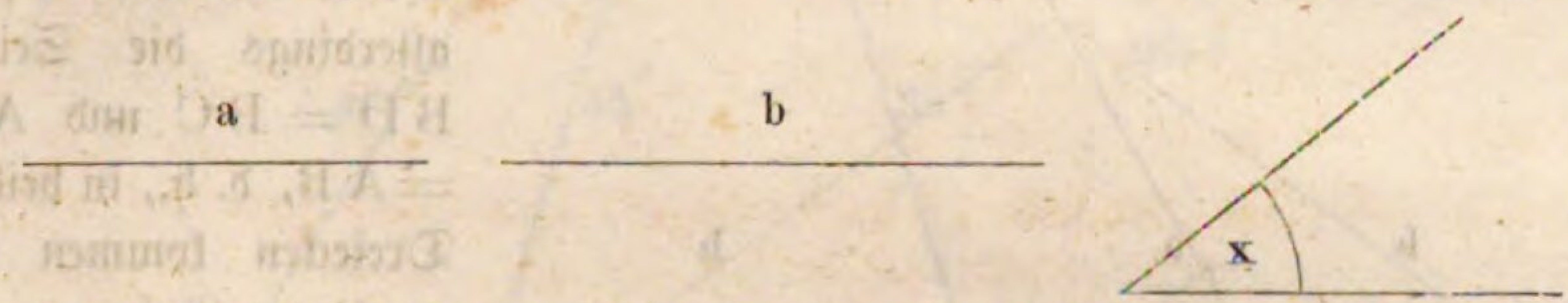
Der anliegende Winkel ist $= 180^0 - (72^0 + 51^0) = 57^0$.
$x = 49' \, 6''$, $y = 56'$, $z = 47'$,
$o = 43' \, 8''$, $w = 38'$.

V. Congruenzsatz:

Durch eine Seite, einen anliegenden Winkel und die **größere** gegenüberstehende Seite ist ein Dreieck vollständig bestimmt.

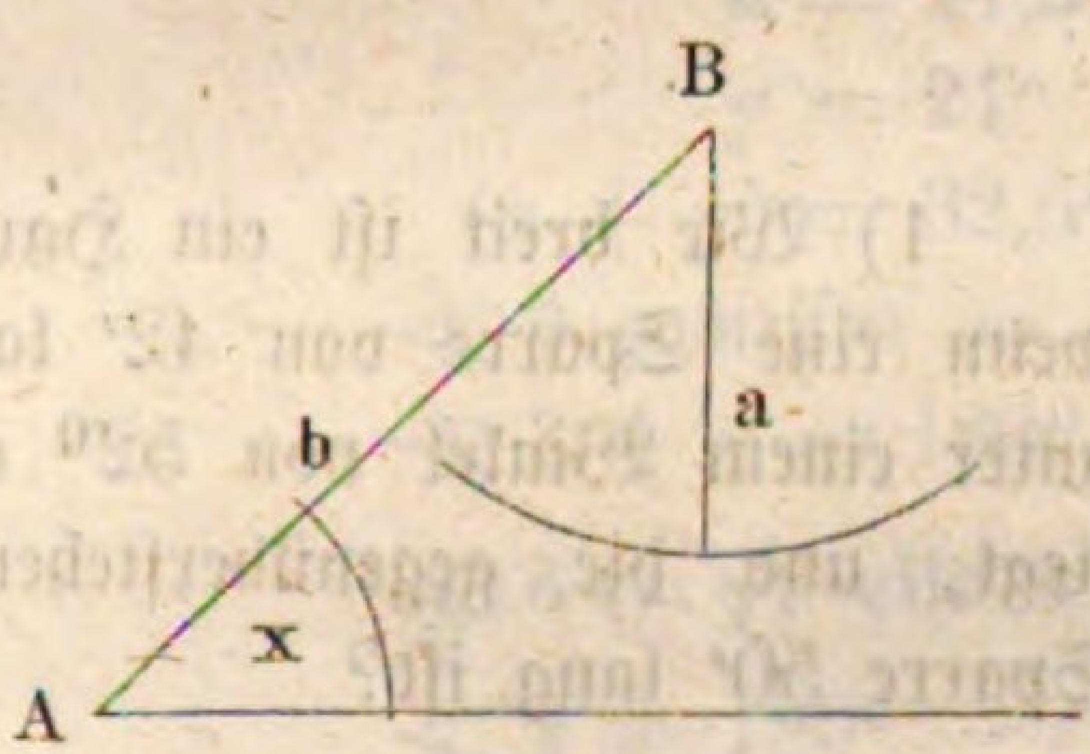
Beweis:

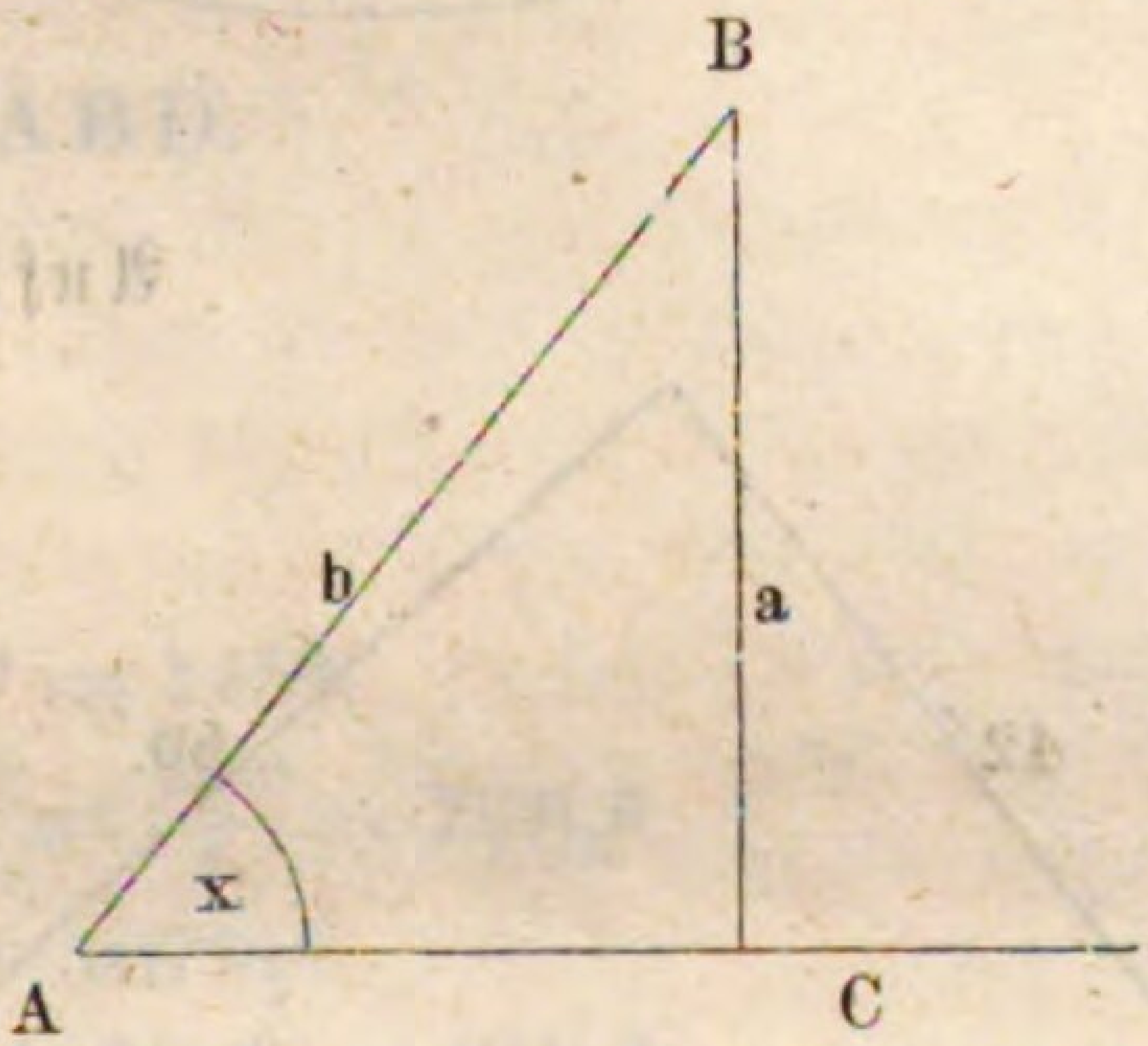
Es seien die Seiten a und b und der Winkel x gegeben; alsdann sind



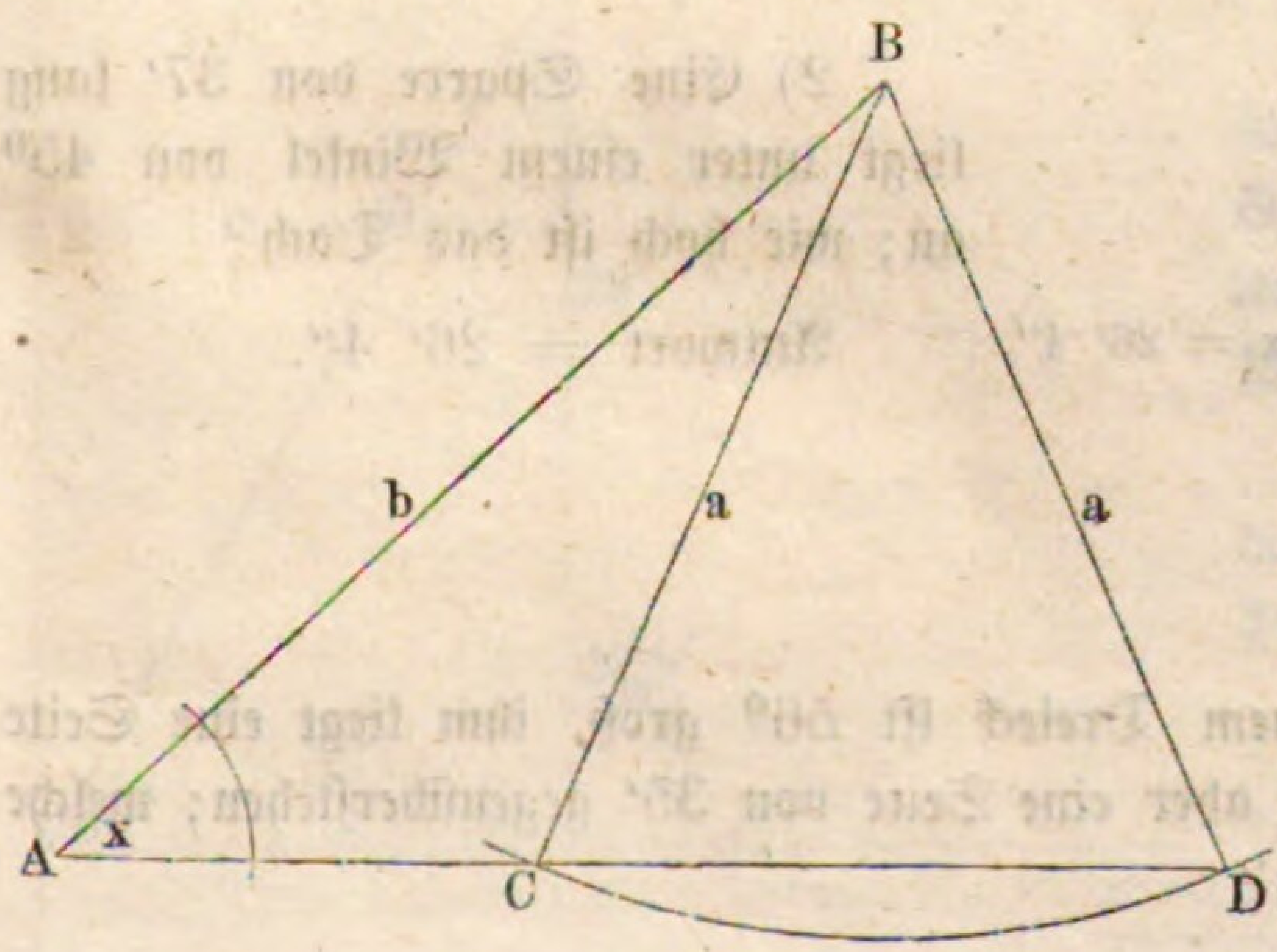
zwei Möglichkeiten zu unterscheiden: es kann nämlich

1) die größere Seite b dem ∡ x an- und die kleinere Seite a dem ∡ x gegenüberliegen. In diesem Falle sind entweder kein, oder ein, oder zwei Dreiecke möglich. Ist nämlich die Linie a kürzer als das Perpendikel von B auf die Grundlinie, so ist gar kein Dreieck möglich; ist aber





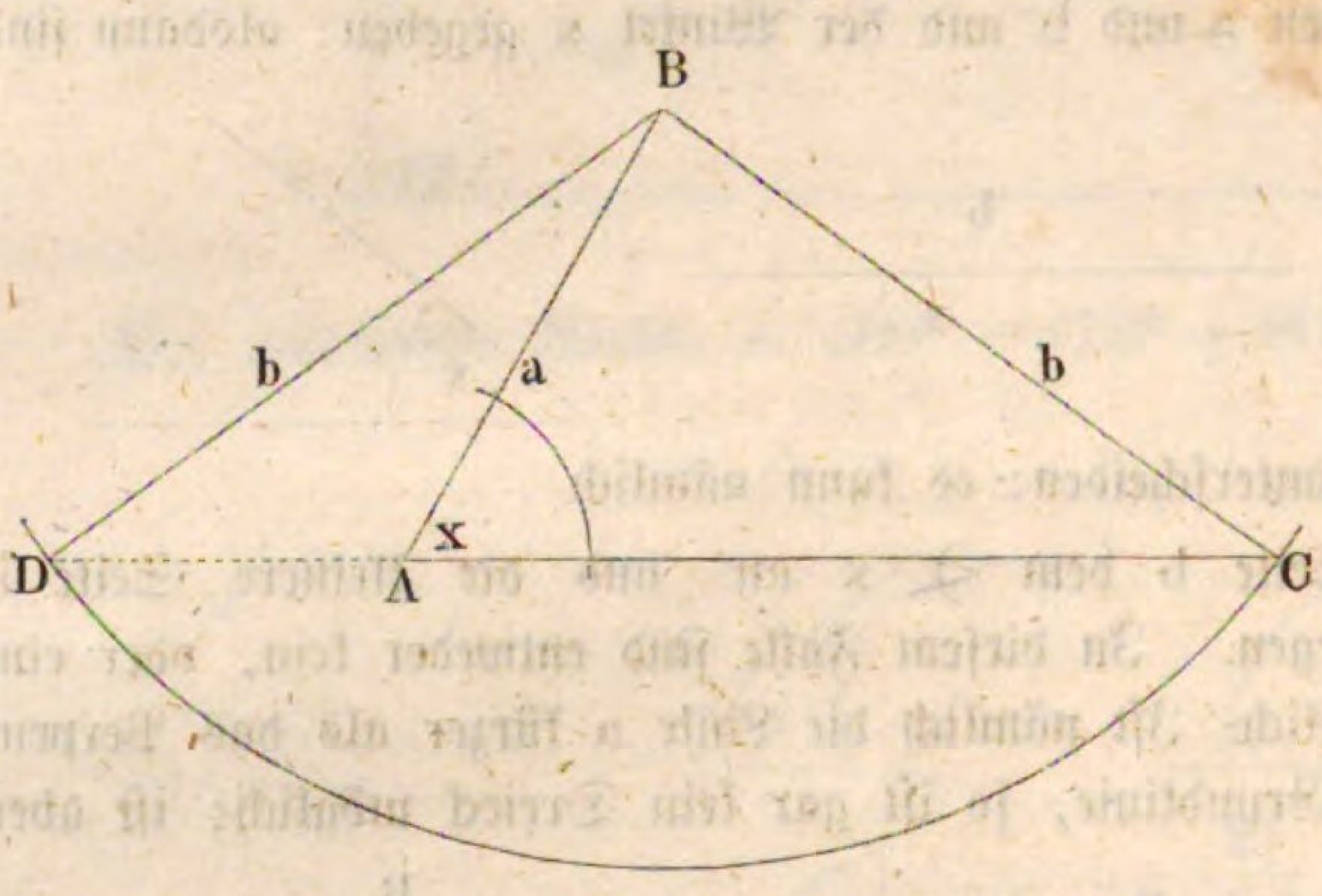
die kürzere Seite a gerade so lang als das Perpendikel von B auf die Grundlinie, A C, so ist nur ein Dreieck möglich, und in diesem besondern Falle ist also das Dreieck durch die drei gegebeuen Stücke vollständig bestimmt.



Ist die kleinere Seite a länger als das Perpendikel von B auf die Grundlinie AC, immer aber kürzer als b, so sind zwei Dreiecke möglich, nämlich das Dreieck ABC und das Dreieck ABD.

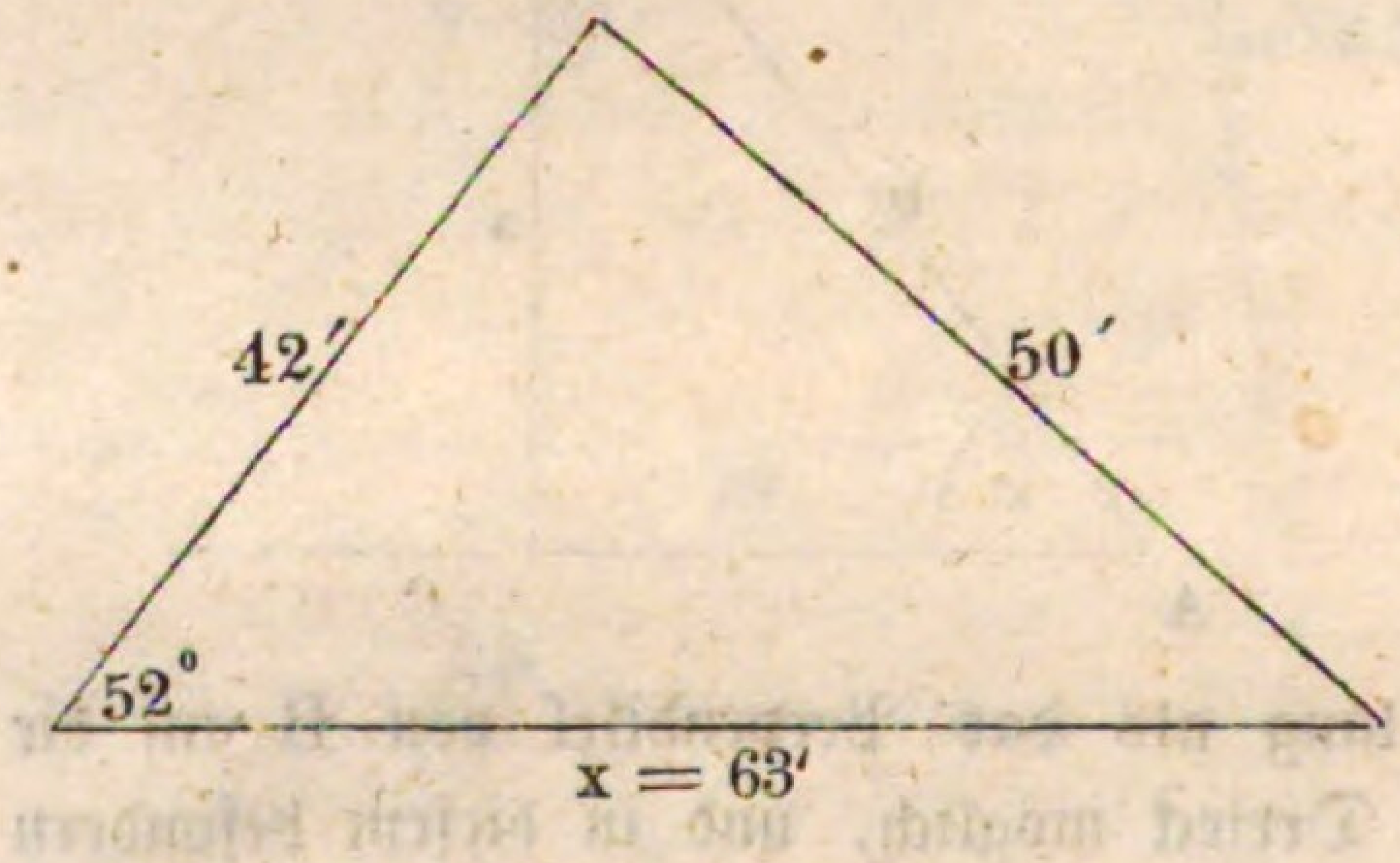
Wenn also die größere Seite dem gegebenen Winkel

an und die kleinere ihm gegenüber liegt, so ist das Dreieck durch diese drei Stücke nicht vollständig bestimmt; liegt aber die kleinere Seite a dem gegebenen Winkel x an und die größere ihm gegenüber, so ist das Dreieck durch die drei gegebenen Stücke vollständig bestimmt, und wir haben alsdann einen fünften Congruenzsatz.



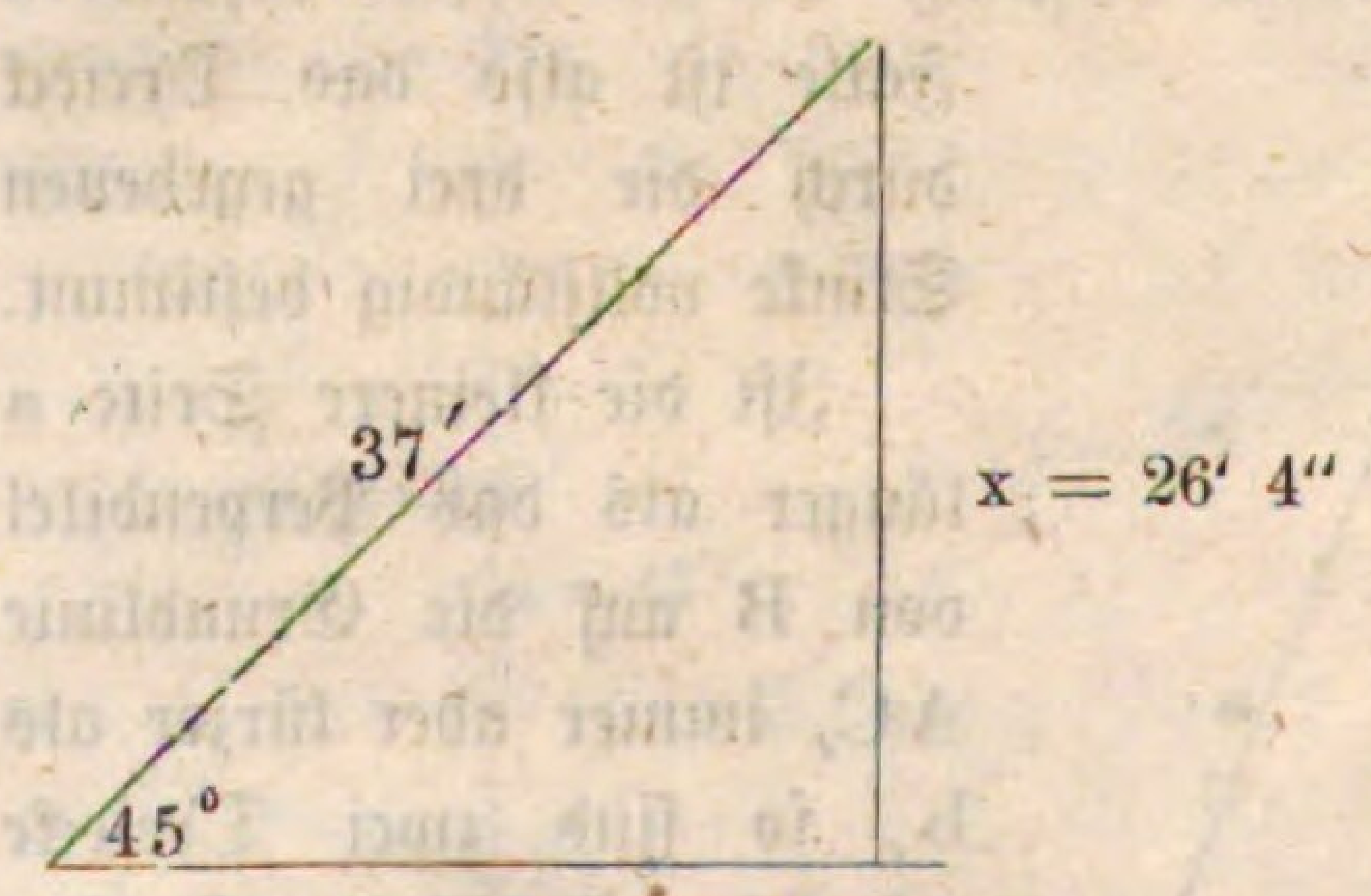
In den Dreiecken DAB und BAC sind allerdings die Seiten BD = BC und AB = AB, d. h., in beiden Dreiecken kommen die gegebenen Linien a und b als Seiten vor; aber nur in dem Dreiecke ABC ist der gegebene Winkel x, und daher ist dieses das allein mögliche Dreieck.

Aufgaben:



1) Wie breit ist ein Haus, wenn eine Sparre von 42′ lang unter einem Winkel von 52⁰ anliegt, und die gegenüberstehende Sparre 50′ lang ist?

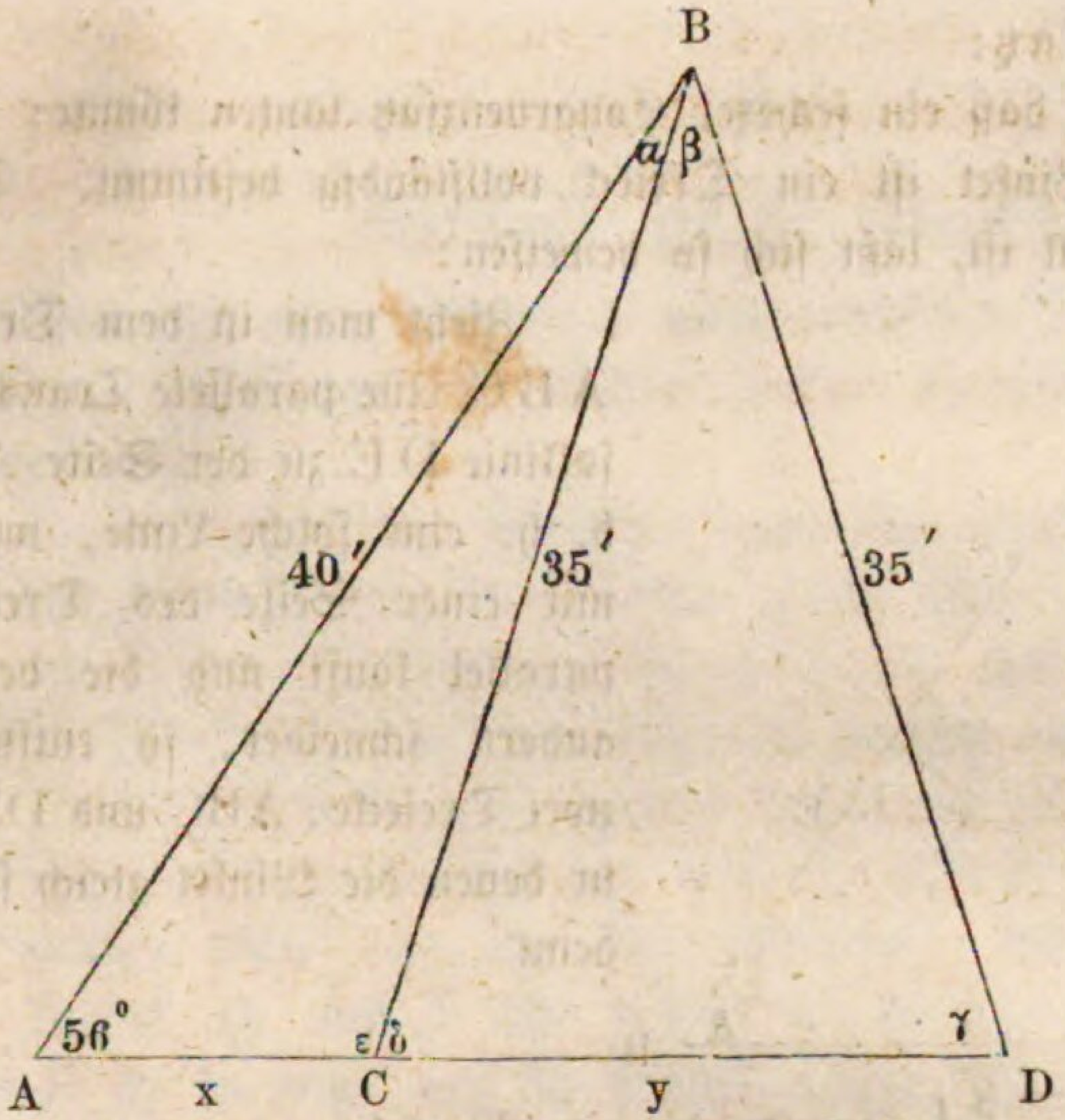
Antwort = 63′.



2) Eine Sparre von 37′ lang liegt unter einem Winkel von 45⁰ an; wie hoch ist das Dach?

Antwort = 26′ 4″.

3) Ein Winkel in einem Dreieck ist 56⁰ groß, ihm liegt eine Seite von 40′ Länge an, ihm soll aber eine Seite von 35′ gegenüberstehen; welche beiden Dreiecke sind möglich?



Wie lang ist die Grundlinie des einen und wie lang die Grundlinie des andern Dreiecks; und wie groß sind die drei Winkel in dem einen und wie groß in dem andern Dreiecke?

Antwort:

Mögliche Dreiecke: ABC und ABD.

$x = 11{,}5'$

$y = 21'$

$(x + y) = 32{,}5'$

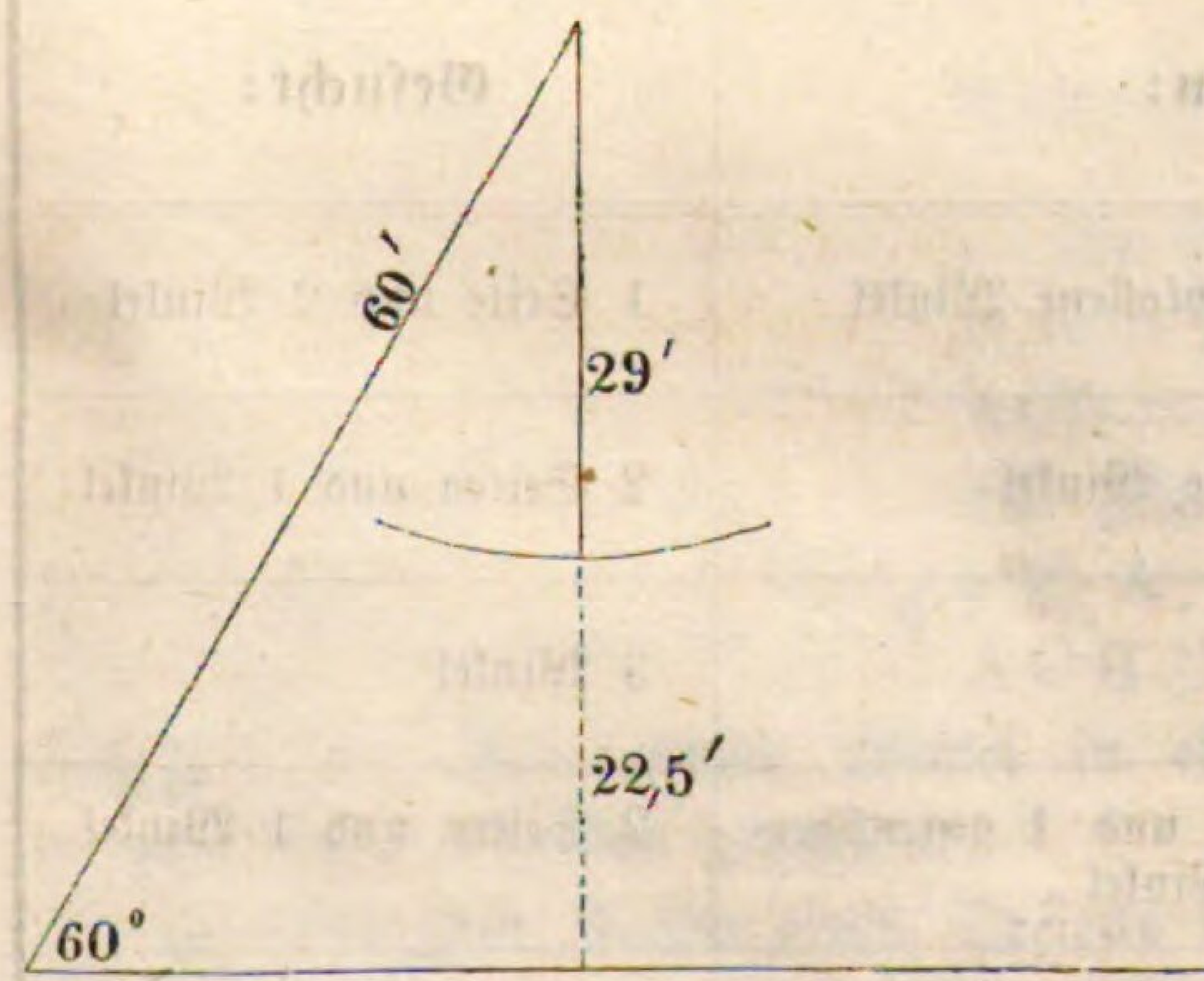
$\sphericalangle\, \beta$ gemessen $= 35^0$

$\sphericalangle\, \delta + \gamma = 180^0 - 35^0 = 145^0$

$\sphericalangle\, \delta = \gamma$; also δ und $\gamma = \frac{145^0}{2} = 72\frac{1}{2}{}^0$

$\sphericalangle\, \varepsilon = 180^0 - 72\frac{1}{2}{}^0 = 107\frac{1}{2}{}^0$

$\sphericalangle\, \alpha = 180^0 - (56^0 + 107\frac{1}{2}{}^0) = 16\frac{1}{2}{}^0.$

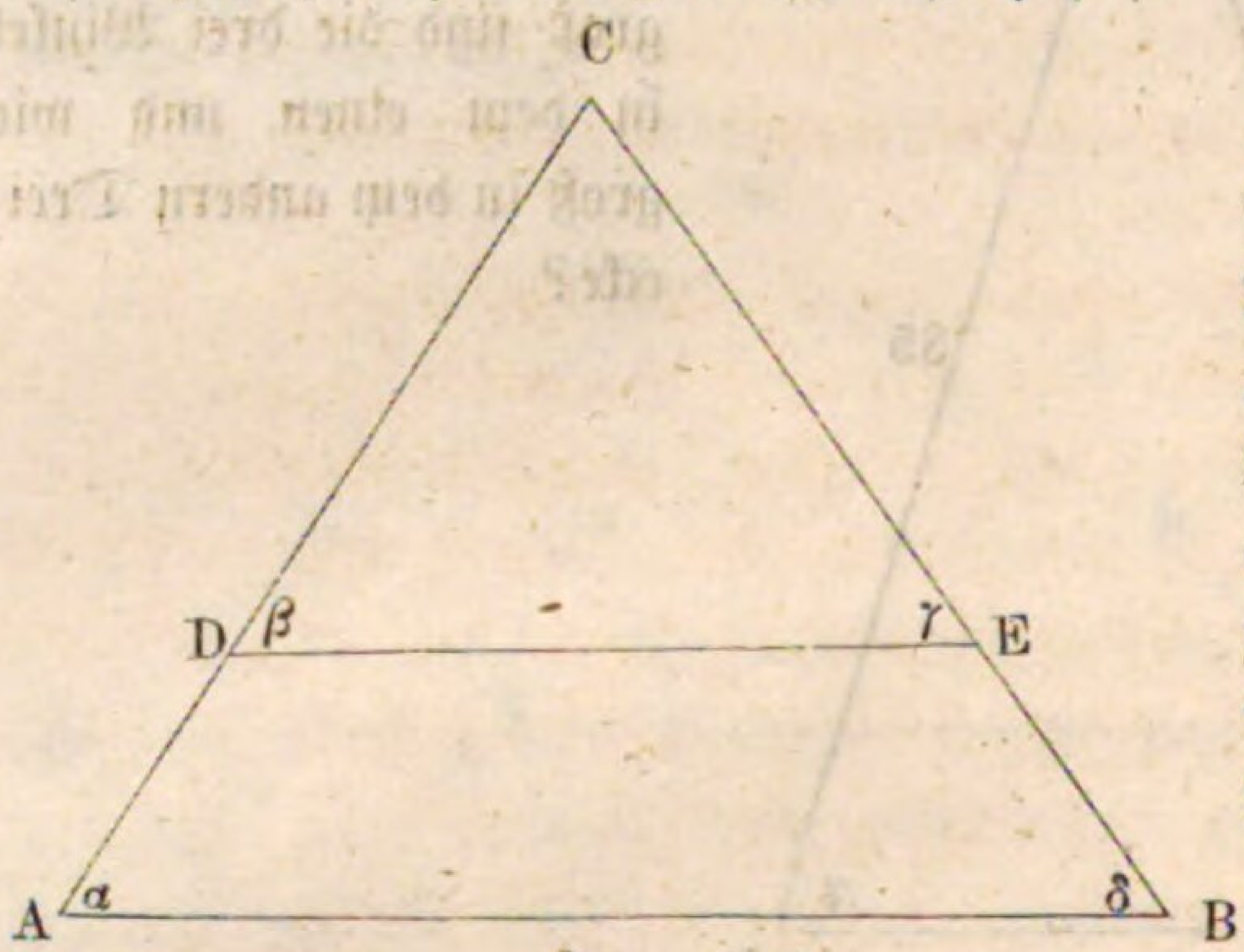


4) Construire ein Dreieck, in welchem einem Winkel von 60^0 eine Seite von $60'$ an- und eine Seite von $29'$ gegenüberliegt!

Die Aufgabe ist unmöglich, denn das Perpendikel ist um $22{,}5'$ zu kurz.

VI. Congruenzsatz:

Man sollte glauben, daß ein sechster Congruenzsatz lauten könnte: Durch seine drei Winkel ist ein Dreieck vollständig bestimmt. Daß dieses jedoch nicht der Fall ist, läßt sich so beweisen:



Zieht man in dem Dreieck ABC eine parallele Transversallinie DE zu der Seite AB, d. h. eine solche Linie, welche mit einer Seite des Dreiecks parallel läuft und die beiden andern schneidet, so entstehen zwei Dreiecke: ABC und DEC, in denen die Winkel gleich sind; denn

$\sphericalangle\, \alpha = \beta$ }
$\sphericalangle\, \delta = \gamma$ } correspondirende Winkel.

$\sphericalangle\, C = C$; jede Größe ist sich selbst gleich.

Aber nimmermehr können diese beiden Dreiecke einander congruent sein, denn das Dreieck DEC ist nur ein Theil von dem Dreieck ABC, und nie kann ein Theil dem Ganzen gleich sein.

Es sind also nur fünf Congruenzsätze möglich, welche alle Etwas mit einander gemein haben, so daß sich die Lehre von der Congruenz der Dreiecke durch einen Satz ausdrücken läßt, welcher so lautet: Ein Dreieck ist durch drei seiner Stücke, unter welchen aber wenigstens eine Seite sein muß, vollständig bestimmt.

Zusammenstellung:

Laufende Nummer	Gegeben:	Gesucht:
I.	2 Seiten und der eingeschlossene Winkel	1 Seite und 2 Winkel
II.	1 Seite und 2 anliegende Winkel	2 Seiten und 1 Winkel
III.	3 Seiten	3 Winkel
IV.	1 Seite, 1 anliegender und 1 gegenüberstehender Winkel	2 Seiten und 1 Winkel
V.	1 Seite, 1 anliegender Winkel und die größere, gegenüberstehende Seite	1 Seite und 2 Winkel.

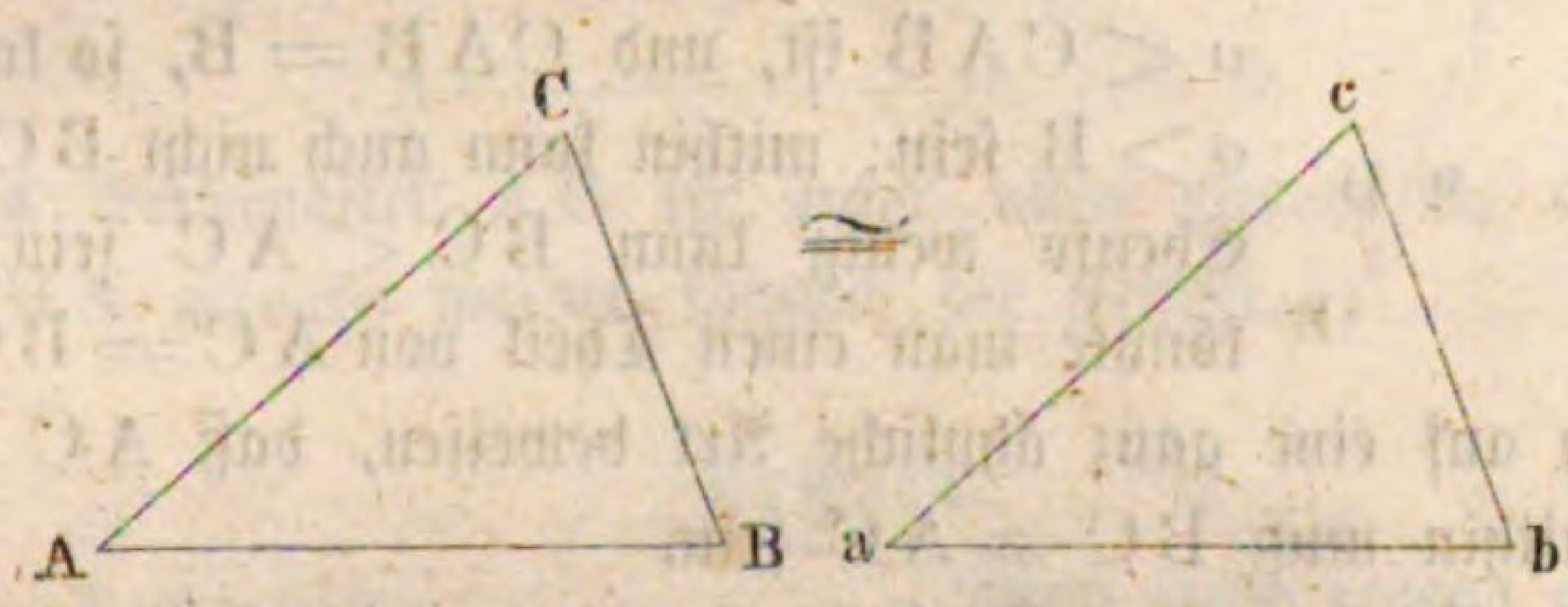
§. 4.

Folgerungen aus den Congruenzsätzen.

Aus den eben bewiesenen Congruenzsätzen können wir eine Reihe von Schlüssen ziehen und die meisten vorher ausgeführten Constructionen als richtig beweisen.

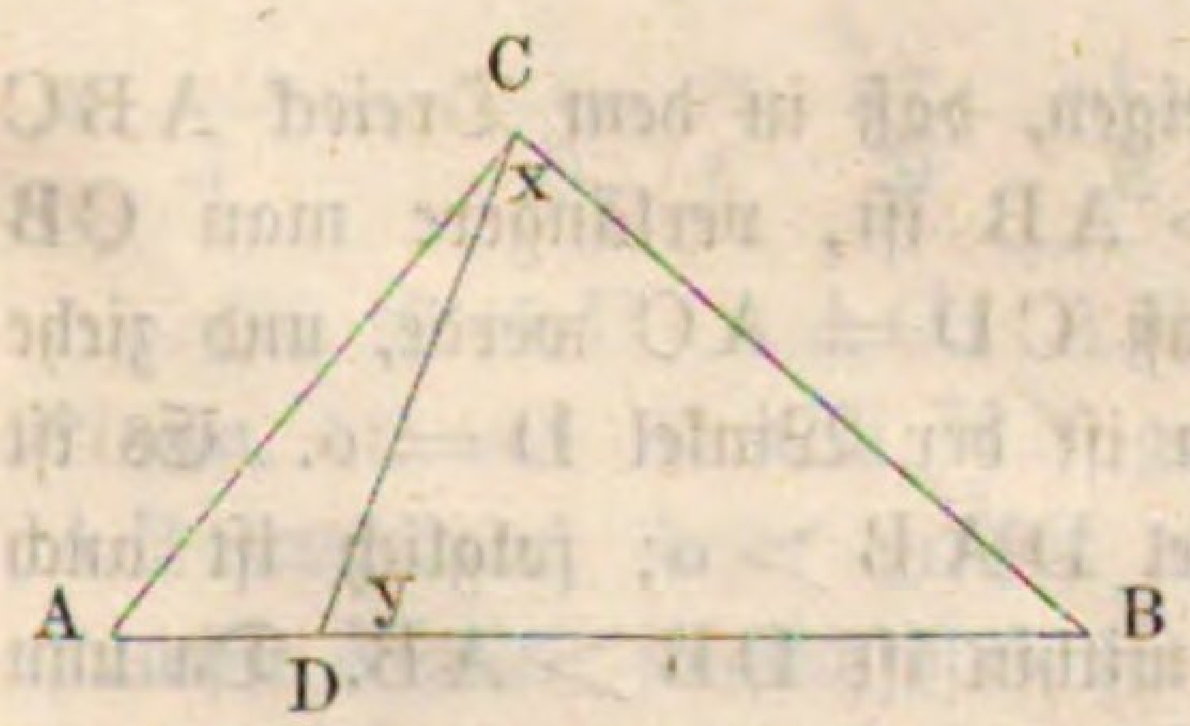
1) In congruenten Dreiecken liegen den gleichen Seiten gleiche Winkel, und umgekehrt den gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

2) Wären die Seiten A B, A C, a b und a c untereinander gleich, folglich die Dreiecke gleichschenklig, so würden die Dreiecke auch congruent sein, wenn man sie so auf einander legte, daß a c auf A B und a b auf A C fiele, welches möglich ist, weil der Winkel a sich immer gleich bleibt, von welcher Seite man ihn auch betrachtet. Alsdann würde der Winkel c den Winkel B, und b den Winkel C decken; da aber auch c = C und b = B ist, so folgt, daß die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks einander gleich sind, und hieraus folgt weiter, daß in einem gleichseitigen Dreieck alle drei Winkel einander gleich sind.



3) Von zwei Winkeln eines Dreiecks ist derjenige der größte, welcher der größten von den beiden gegenüberliegenden Seiten gegenübersteht.

Beweis:



Es sei in dem Dreieck A B C die Seite A B > B C, so muß auch der Winkel ACB > A sein; denn man mache BD = BC und ziehe C D, so ist x = y. Ferner ist y > A, folglich auch x > A. Da nun A C B > x ist, so ist um so mehr A C B > A. Der größte Winkel in einem Dreieck überhaupt steht der größten Seite desselben gegenüber.

4) Von zwei Seiten eines Dreiecks ist diejenige die größte, welche dem größten der beiden gegenüberliegenden Winkel gegenübersteht.

Beweis:

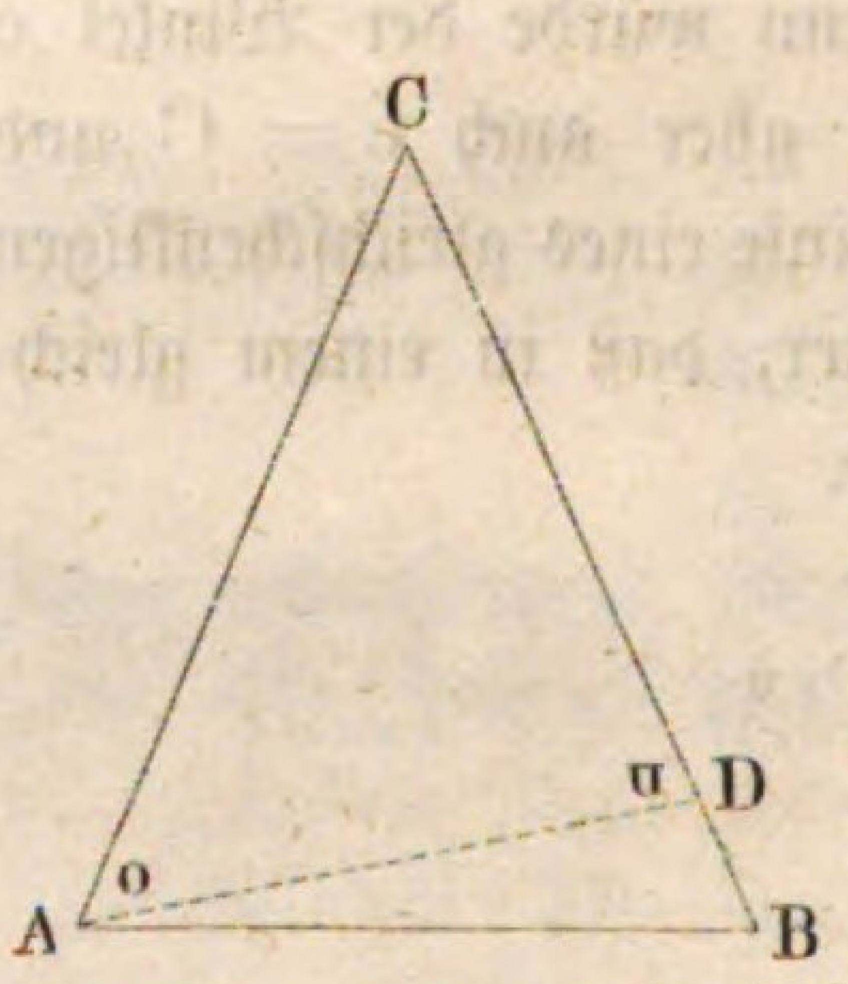
Es sei in dem Dreieck ABC der Winkel C > A, so muß auch die Seite AB > BC sein, denn, gesetzt, es wäre AB = BC, so müßte auch C = A sein; und wäre BC > AB, so müßte A > C sein. Beides aber ist gegen die Voraussetzung, daß C > A sein solle; mithin muß AB > BC sein.

Die größte Seite in einem Dreiecke überhaupt steht dem größten Winkel desselben gegenüber.

Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist die größte unter den drei Seiten desselben.

5) Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich sind, so sind auch die diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten gleich, d. h. das Dreieck ist gleichschenklig.

Beweis:

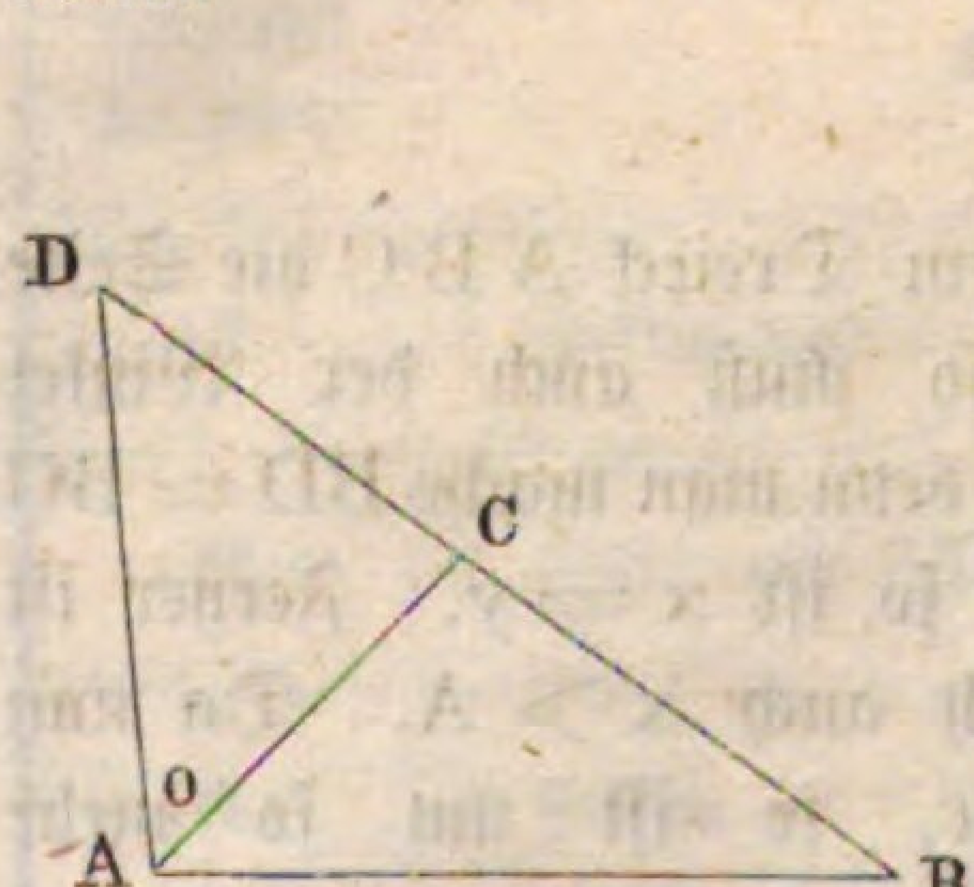


Es sei in dem Dreieck ABC der Winkel CAB = B, so muß auch BC = AC sein, denn, gesetzt, es wäre BC > AC, so sei CD = AC. Alsdann ziehe man AD, so wäre o = u. Ferner ist u > B, folglich wäre auch o > B. Da nun o < CAB ist, und CAB = B, so kann unmöglich o > B sein; mithin kann auch nicht BC > AC sein. Ebenso wenig kann BC < AC sein, denn sonst könnte man einen Theil von AC = BC setzen, und dann ließe sich auf eine ganz ähnliche Art beweisen, daß AC nicht > BC sein könnte; mithin muß BC = AC sein.

Wenn alle Winkel eines Dreiecks einander gleich sind, so sind es auch die Seiten desselben.

6) Zwei Seiten eines Dreiecks sind zusammen allemal größer als die dritte.

Beweis:



Um zu zeigen, daß in dem Dreieck ABC AC + CB > AB ist, verlängere man CB nach D, so daß CD = AC werde, und ziehe AD. Alsdann ist der Winkel D = o. Es ist aber der Winkel DAB > o; folglich ist auch DAB > D; mithin ist DB > AB. Da nun DB = AC + CB ist, so ist AC + CB > AB.

7) Wenn von einem Punkte, D, innerhalb eines Dreiecks, ABC, zwei Linien AD und BD, nach den Endpunkten irgend einer Seite, AB, gezogen werden, so ist der Winkel ADB, welchen diese Linien zusammen einschließen,

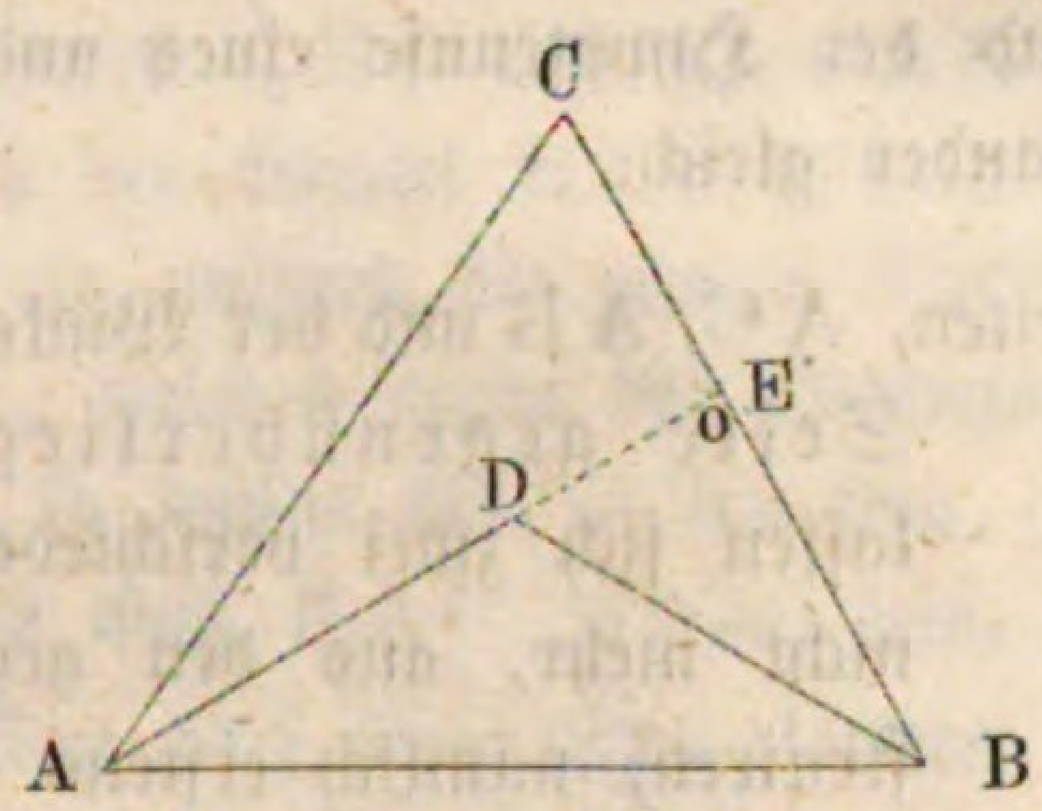
größer als der Winkel C, welcher der Seite AB gegenübersteht, hingegen ist die Summe der Linien AD + DB < als die der Seiten AC + CB, welche den Winkel C einschließen.

Beweis:

Man verlängere AD nach E, so ist o > C und ADB > o; folglich um so mehr ADB > C. Ferner ist:

AC + CE > AD + DE, ebenso
DE + EB > DB

folgt: AC + CE + DE + EB > AD + DE + DB; also auch
AC + CE + EB > AD + DB, d. i.
AC + CB > AD + DB.



8) Das Perpendikel AB ist unter allen Linien, die von A nach der Standlinie MN gezogen werden können, die kleinste.

Beweis:



Man ziehe irgend eine andere Linie von A nach MN, z. B. AC, so ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck, und der rechte Winkel in B, folglich AC > AB; mithin ist AB kleiner als jede andre Linie von A nach MN.

Das Perpendikel AB mißt den Abstand des Punktes A von der Linie MN.

Es ist AD > AC; AE > AD u. s. w., d. h. je weiter sich die Linien, die von A nach MN gezogen werden können, von dem Perpendikel AB entfernen, desto größer werden sie; denn die Winkel o, u, r sind stumpfe Winkel, folglich sind die Seiten, welche ihnen gegenüberstehen, größer als die, welche ihren Nebenwinkeln gegenüberliegen.

Auch die Winkel o, u, r werden immer größer, und ihre Nebenwinkel immer kleiner, je weiter die Linie, an welcher sie liegen, sich von dem Perpendikel entfernt.

Auf beiden Seiten des Perpendikels AB sind diejenigen Linien von A nach MN einander gleich, welche nach von B gleich entfernten Punkten gehen, z. B. wenn Bd = BD ist, so ist Ad = AD.

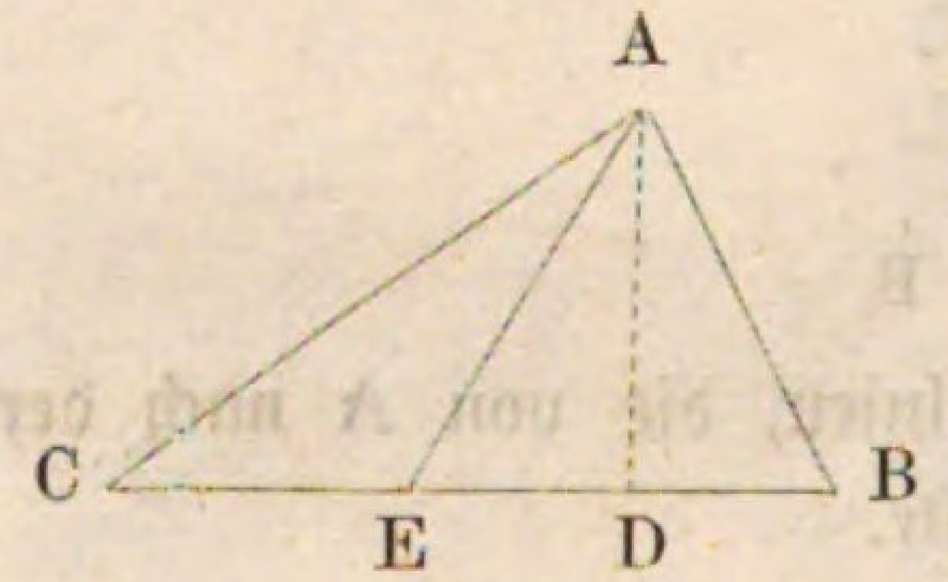
Die Winkel, welche auf beiden Seiten des Perpendikels AB an gleichen Linien liegen, sind einander gleich.

Für jede Linie von bestimmter Größe, die jedoch größer als AB sein muß, gibt es auf jeder Seite des Perpendikels AB nur einen einzigen Punkt in der Linie MN, nach welchem sie, von A aus gelegt, hinpaßt.

Auch für jeden Winkel von bestimmter Größe gibt es auf jeder Seite des Perpendikels AB nur einen einzigen Punkt in der Linie MN, in welchem er durch die Linie von A aus gebildet wird.

9) Wenn ein Kathetus und die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks einem Katheten und der Hypotenuse eines andern gleich sind, so sind die ganzen Dreiecke einander gleich.

10) Wenn zwei Seiten, AC, AB und der Winkel C, als der kleinern Seite gegenüberliegend, gegeben sind, so lassen sich zwei verschiedene Dreiecke, aber auch nicht mehr, aus den gegebenen 3 Stücken construiren, nämlich erstens das Dreieck ABC und zweitens das Dreieck AEC, in welchem AE = AB ist. Daß nur zwei Dreiecke möglich sind, folgt aus 8).



11) Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gleich, der von diesen eingeschlossene Winkel aber in dem einen Dreieck größer als in dem andern ist, so ist auch die dritte Seite in jenem Dreieck größer, als in diesem.

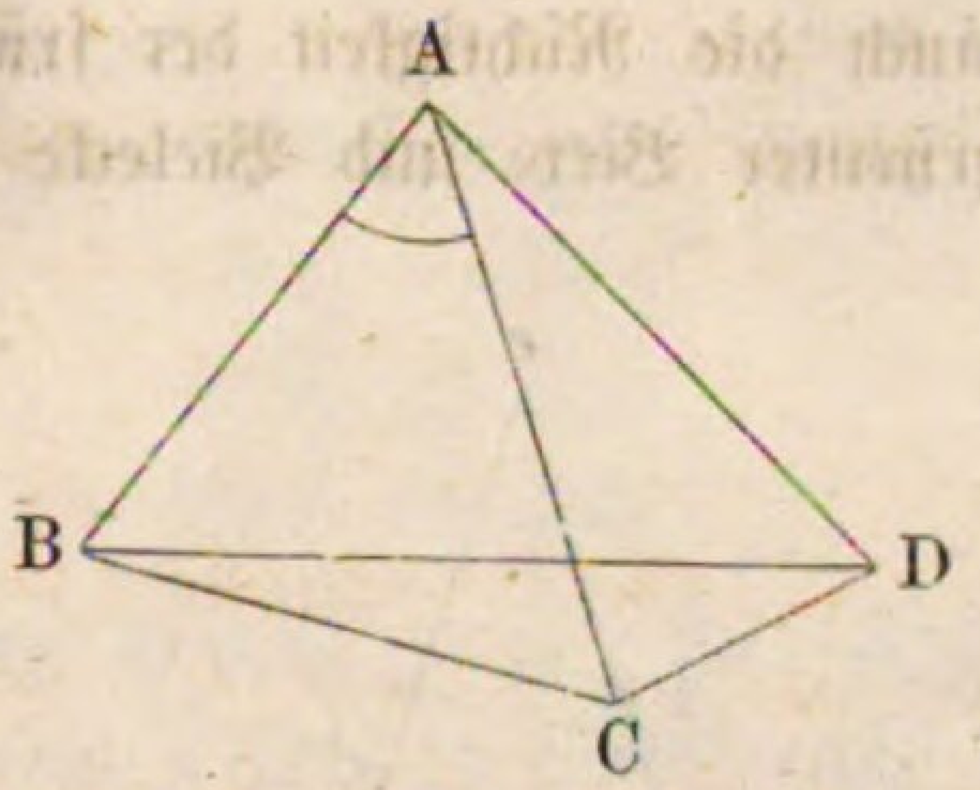
Beweis:

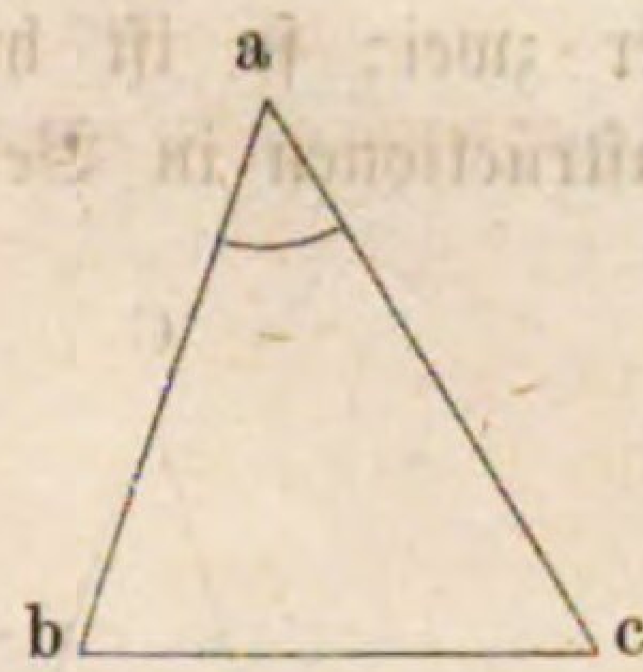
Es sei in den Dreiecken ABC und abc AB = ab, AC = ac und der Winkel BAC > bac.

Man nehme an, der Winkel BAD sei = bac, mache AD = ac = AC und ziehe BD, so ist das Dreieck BAD ≅ bac, folglich BD = bc. Ferner ziehe man DC, so ist

Winkel ADC = ACD, auch ist
" ACD > BCD
ADC > BCD.

Nun ist der Winkel BDC > ADC; also um so mehr BCD > BCD; mithin ist BC > BD, und da BD = bc ist, so ist BC > bc.





12) Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gleich, die dritte aber ungleich ist, so ist auch der ihr gegenüberstehende Winkel ungleich, und zwar ist er in demjenigen Dreiecke am größten, in welchem diese Seite am größten ist.

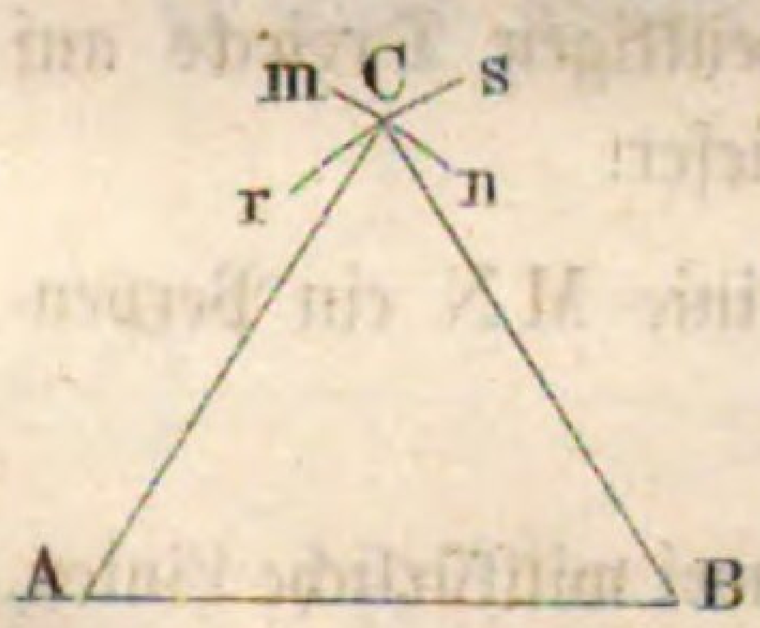
Beweis:

Es sei in den Dreiecken ABC und abc AB = ab, AC = ac und BC > bc, so muß auch der Winkel BAC < bac sein; denn, wären beide Winkel einander gleich, so müßten die ganzen Dreiecke einander gleich sein, folglich auch BC = bc, welches gegen die Bedingung ist. Wäre aber der Winkel BAC < bac, so müßte BC < bc sein, was ebenfalls gegen die Voraussetzung ist; mithin muß BAC > bac sein.

Anmerkung: Man darf aber nicht glauben, daß der Winkel BAC in demselben Verhältniß größer als bac wäre, in welchem BC > bc ist. Ebenso wenig ist im vorhergehenden Fall die Seite BC in demselben Verhältniß größer, als bc, in welchem der Winkel BAC > bac ist.

13) Beweise für die Richtigkeit früher ausgeführter Constructionen:

a) Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren:



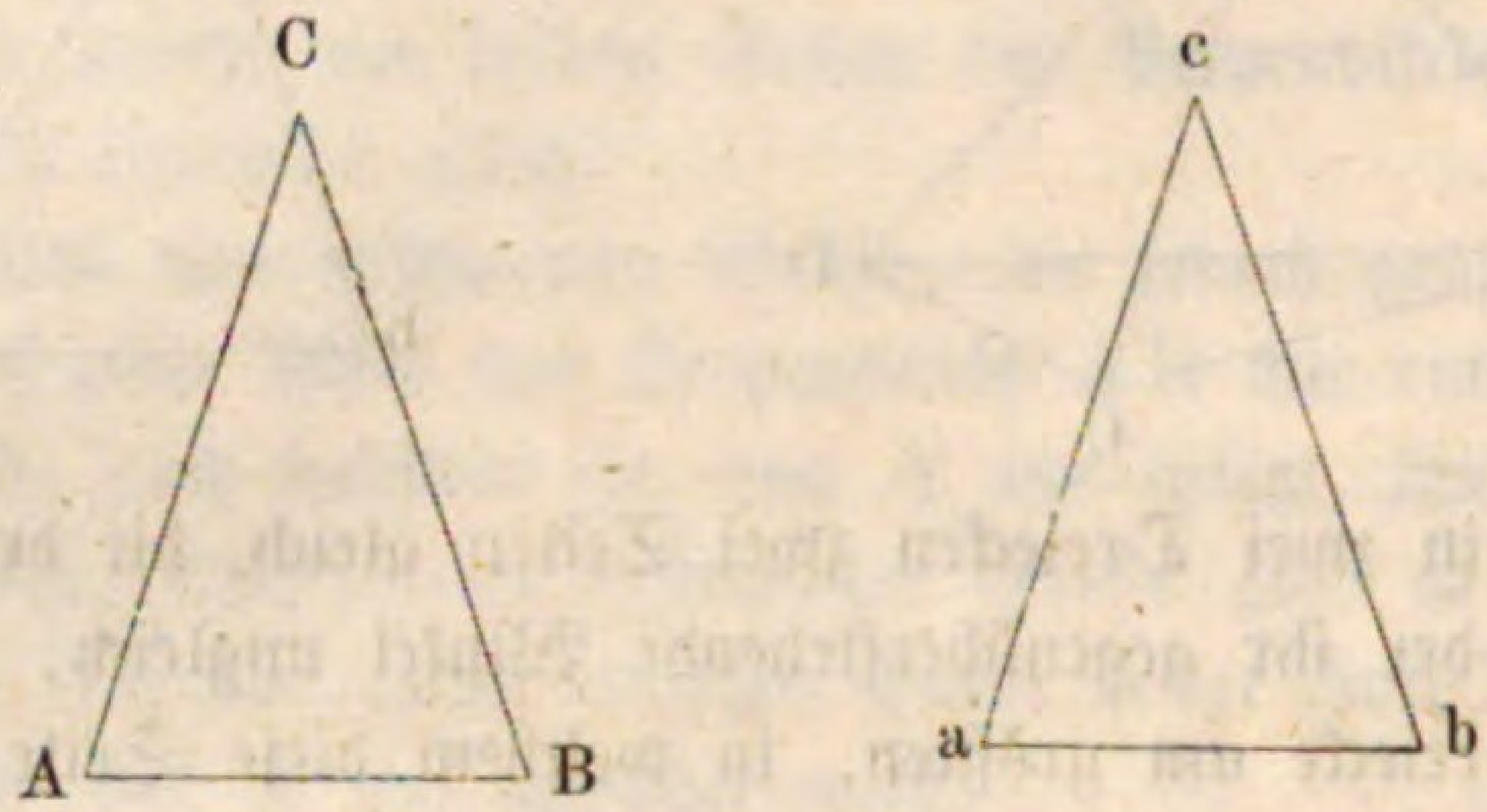
Alle geraden Linien von A nach Bogen mn sind einander gleich; ebenso sind es alle geraden Linien von B nach Bogen rs. Da nun Br = Am sein soll, so muß auch AC = BC sein. Beide Bogen aber müssen einander in irgend einem Punkte schneiden, weil Am > $\frac{1}{2}$ AB sein muß.

Wird Am = AB genommen, so wird das Dreieck gleichseitig.

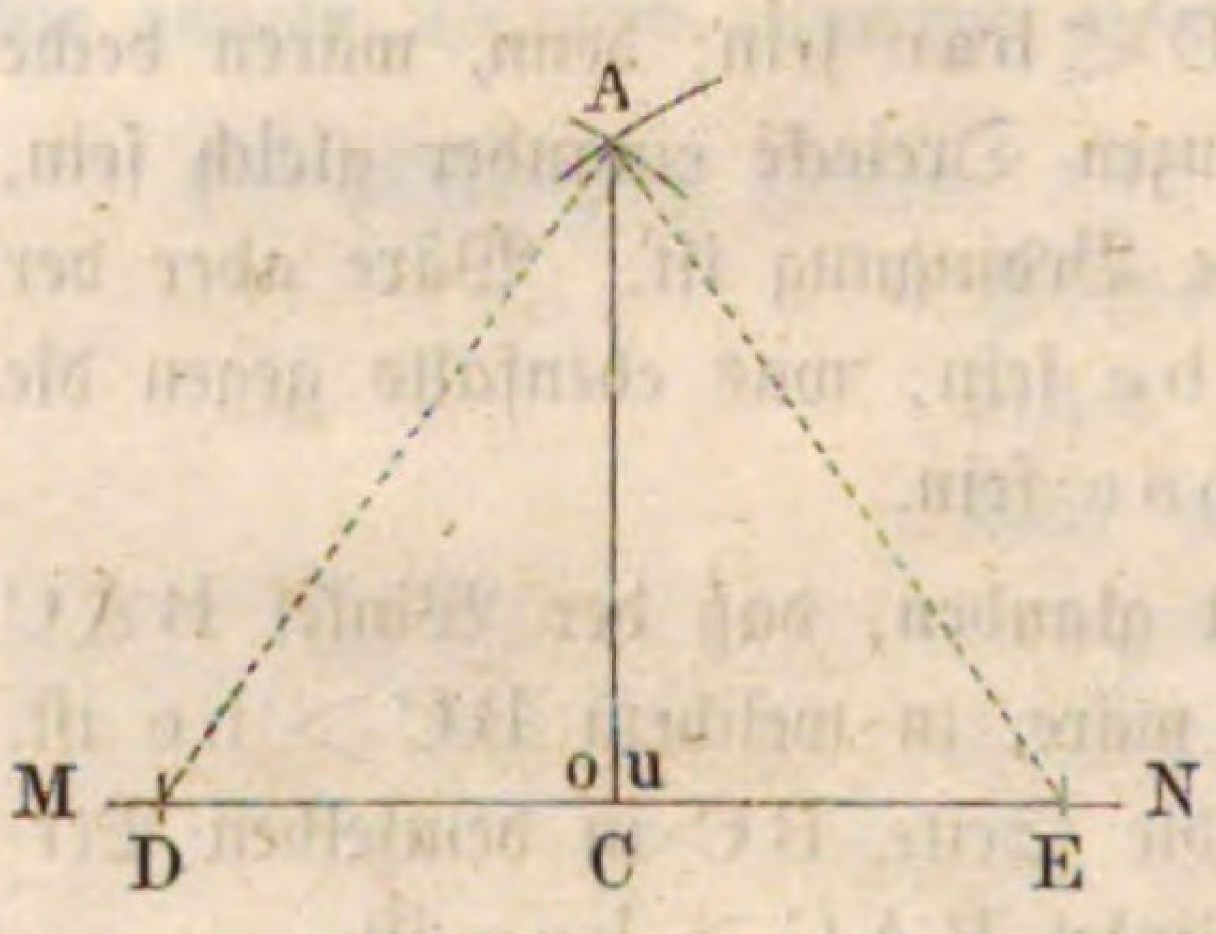
b) Ein Dreieck zu verzeichnen, welches einem gegebenen Dreieck, ABC, $\cong$ sei.

Die Seiten des Dreiecks abc sind nach der Construction den Seiten das Dreiecks ABC gleich, folglich sind beide Dreiecke nach dem dritten Satze congruent. Anstatt des Dreiecks ABC können auch drei Linien gegeben werden; nur müssen je zwei derselben zusammen größer als die dritte sein. Da jede geradlinige Figur durch Diagonalen, welche sich nicht schneiden, in so viele Dreiecke zerlegt werden kann, wie die Figur Seiten

hat, weniger zwei; so ist hierdurch auch die Richtigkeit der früher ausgeführten Constructionen in Betreff congruenter Vier- und Vielecke bewiesen.



c) Aus einem Punkte C in einer geraden Linie, MN, eine andere Linie, AC, senkrecht zu ziehen.



Hier ist:

$$AD = AE$$
$$DC = CE$$
$$AC = AC$$

Daher ist Dreieck ACD $\cong$ ACE; folglich ist Winkel

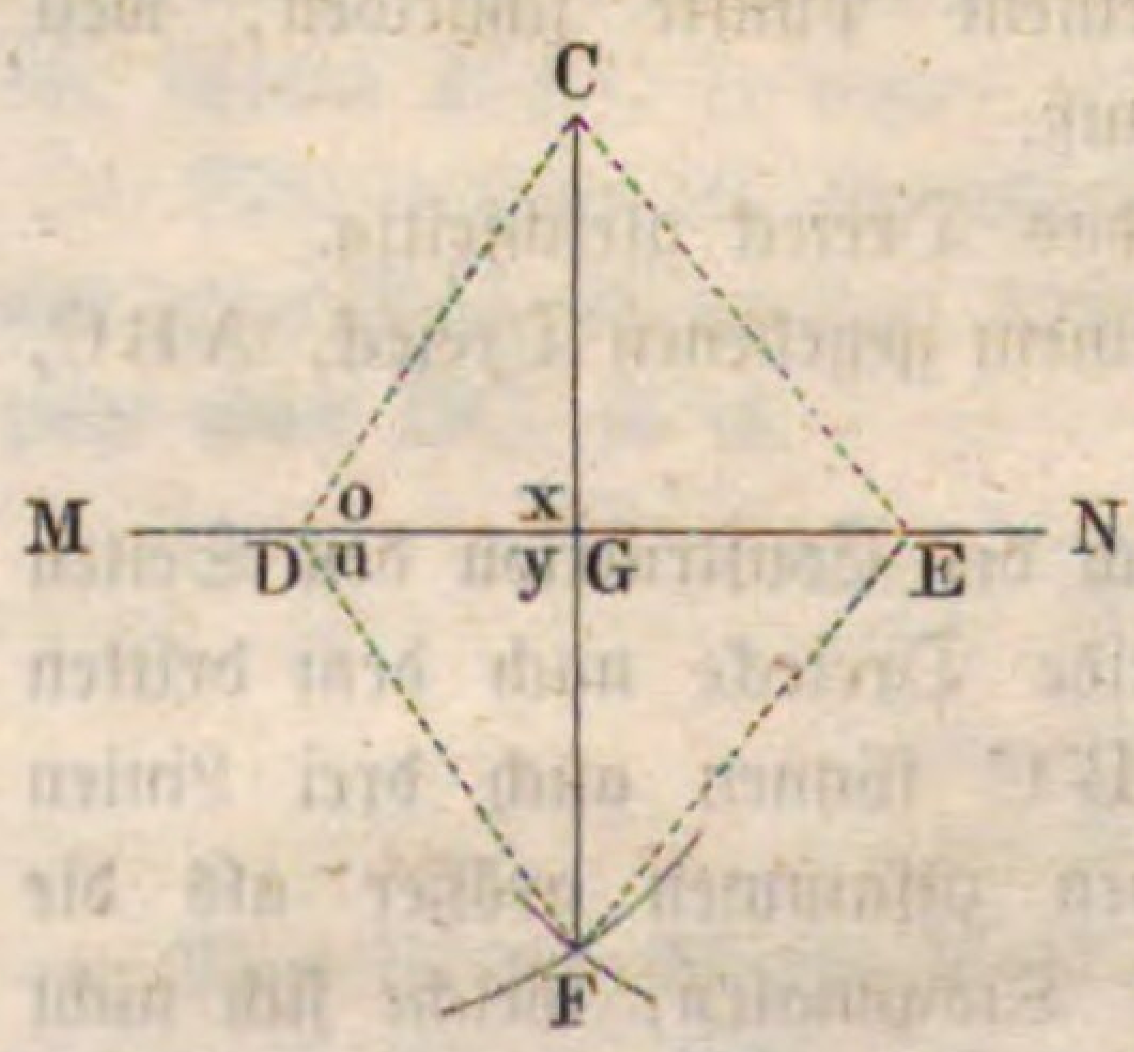
$o = u$, mithin ist

jeder $= R$; also AC auf MN senkrecht.

Ein Perpendikel, aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie gezogen, halbirt nicht nur die Grundlinie, sondern auch den derselben gegenüberliegenden Winkel und das ganze Dreieck.

Eine gerade Linie, aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Mitte der Grundlinie gezogen, steht senkrecht auf dieser.

d) Aus einem Punkte C außerhalb der geraden Linie MN ein Perpendikel auf MN zu ziehen.



Man ziehe aus C zwei willkürliche Linien, CD und CE, nach der Linie MN, schlage alsdann mit einer Eröffnung des Zirkels $= DC$ von D aus einen Bogen unterhalb MN; ebenso mit einer Eröffnung des Zirkels $= EC$, von E aus ebendaselbst einen anderen Bogen. Der Durchschnittspunkt F beider Bogen gibt mit dem Punkte C die Richtung des verlangten Perpendikels CF.

Beweis:

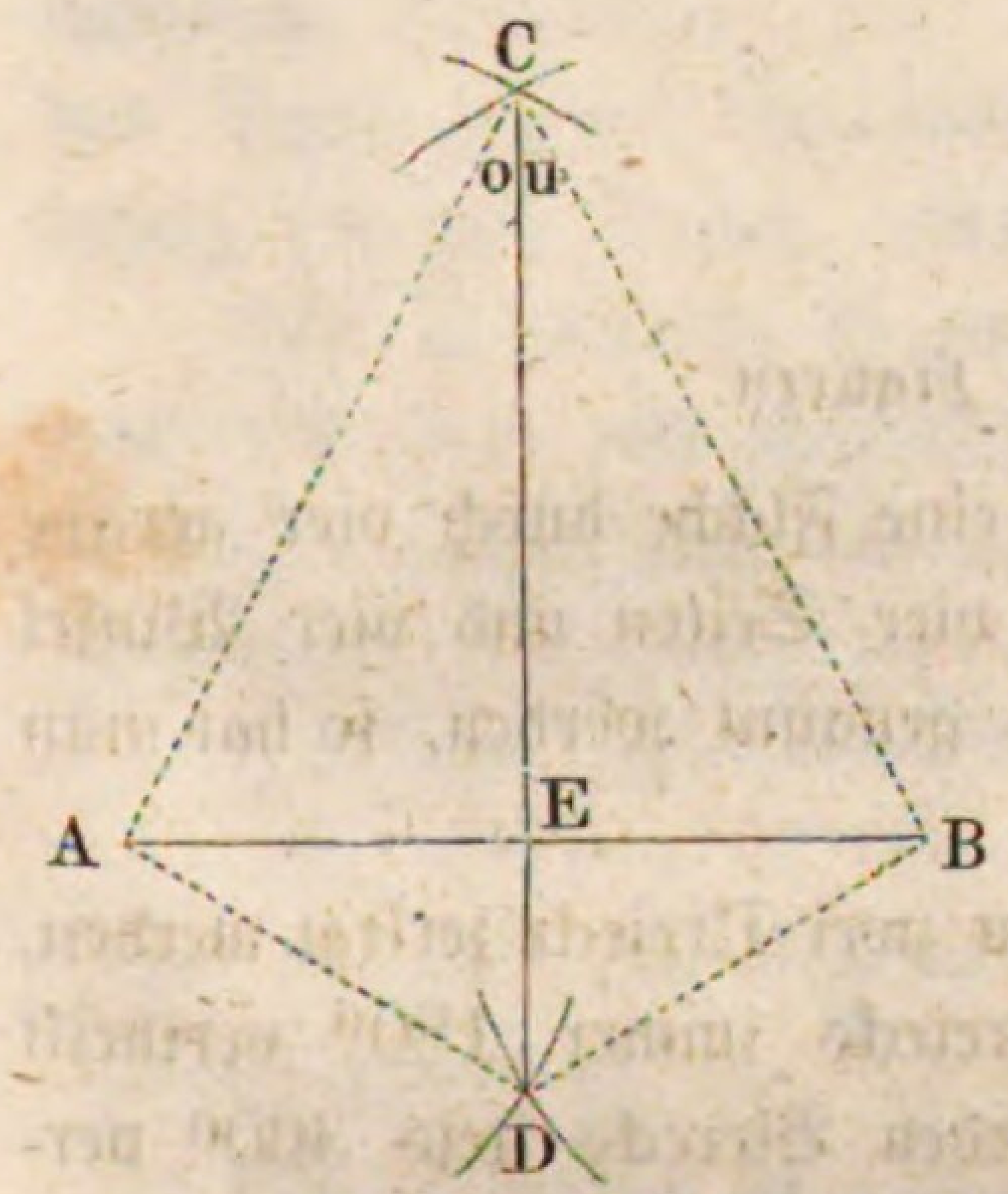
Man ziehe DF und EF, so ist

$$DC = DF$$
$$CE = EF$$
$$DE = DE$$

Dreieck DCE $\cong$ DFE; folglich ist auch Winkel $o = u$. Daher ist das Dreieck CDG $\cong$ FDG nach Satz I.; mithin ist auch Winkel $x = y$; also MN senkrecht auf CF, und CF senkrecht auf MN.

e) Eine gerade Linie AB in zwei gleiche Theile zu theilen.

Beweis:

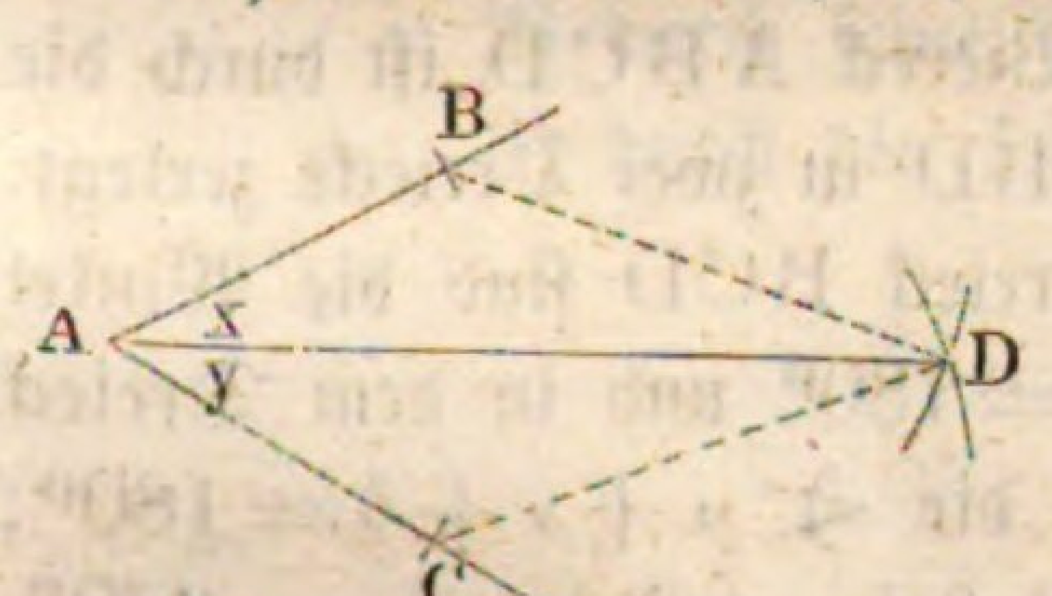


$$AC = CB$$
$$AD = DB$$
$$DC = DC$$

Dreieck ADC $\cong$ BCD; folglich
∢ $o = u$; und da
$AC = BC$ und
$CE = CE$ ist,

so ist Dreieck AEC $\cong$ BEC; also
$$AE = EB.$$

f) Einen Winkel, A, in zwei gleiche Theile zu theilen.

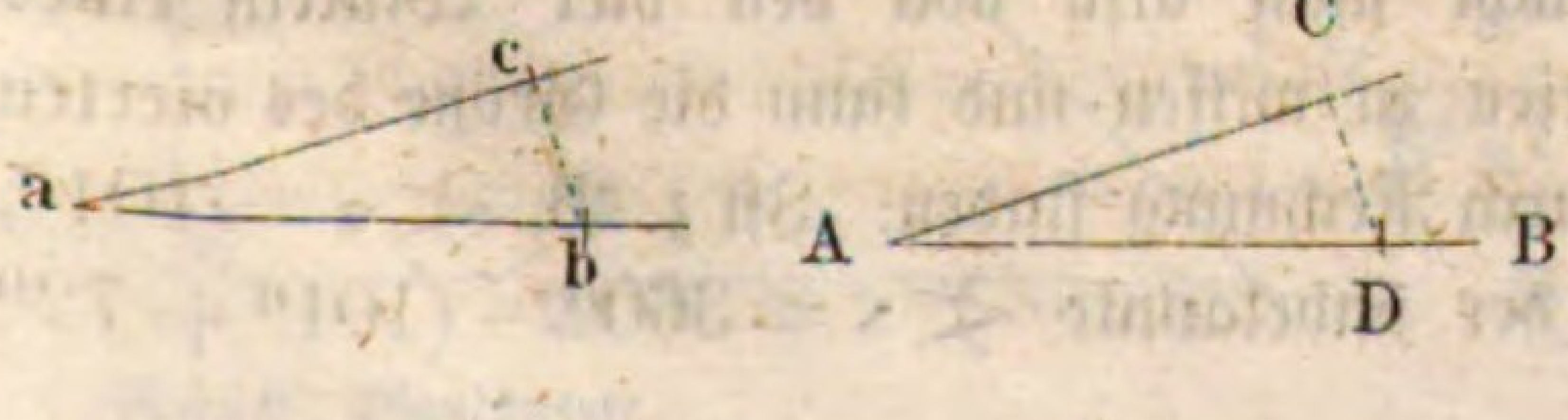


$AB = AC$ } nach der Construction
$BD = DC$ } nach der Construction
$AD = AD$

Dreick ABD $\cong$ ACD; mithin Winkel
$x = y$.

g) Einen gegebenen Winkel, a, an eine gerade Linie, AB, in den Punkt A zu tragen.

Auflösung:

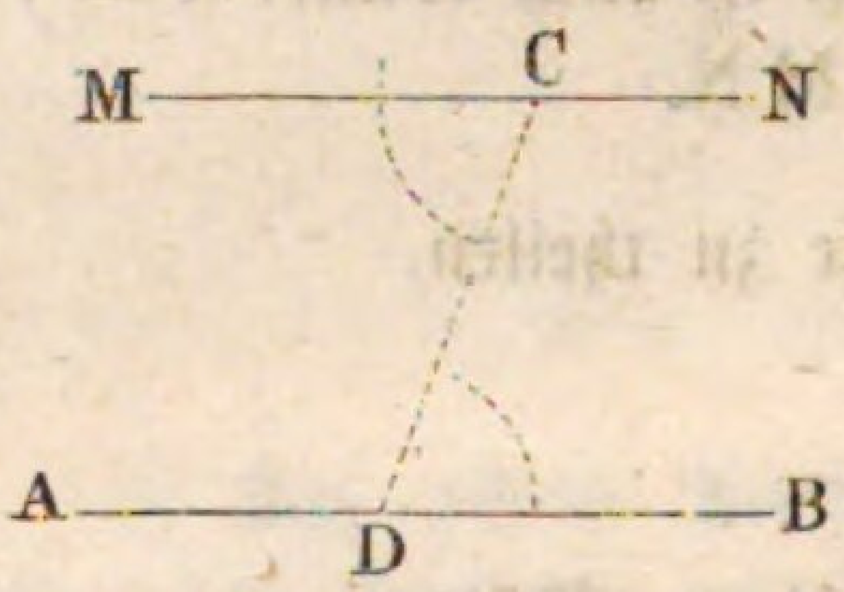


Ziehe cb und construire ein Dreieck ACD $\cong$ acb; alsdann ist Winkel $a = A$.

Anmerkung: Um ein Perpendikel auf dem Ende einer geraden Linie zu errichten, kann man erst ein Perpendikel in einem beliebigen Punkt einer andern Linie errichten, und dann den rechten Winkel an das Ende der ersteren Linie übertragen.

h) Durch einen Punkt C eine Linie mit AB || zu ziehen.

Auflösung:



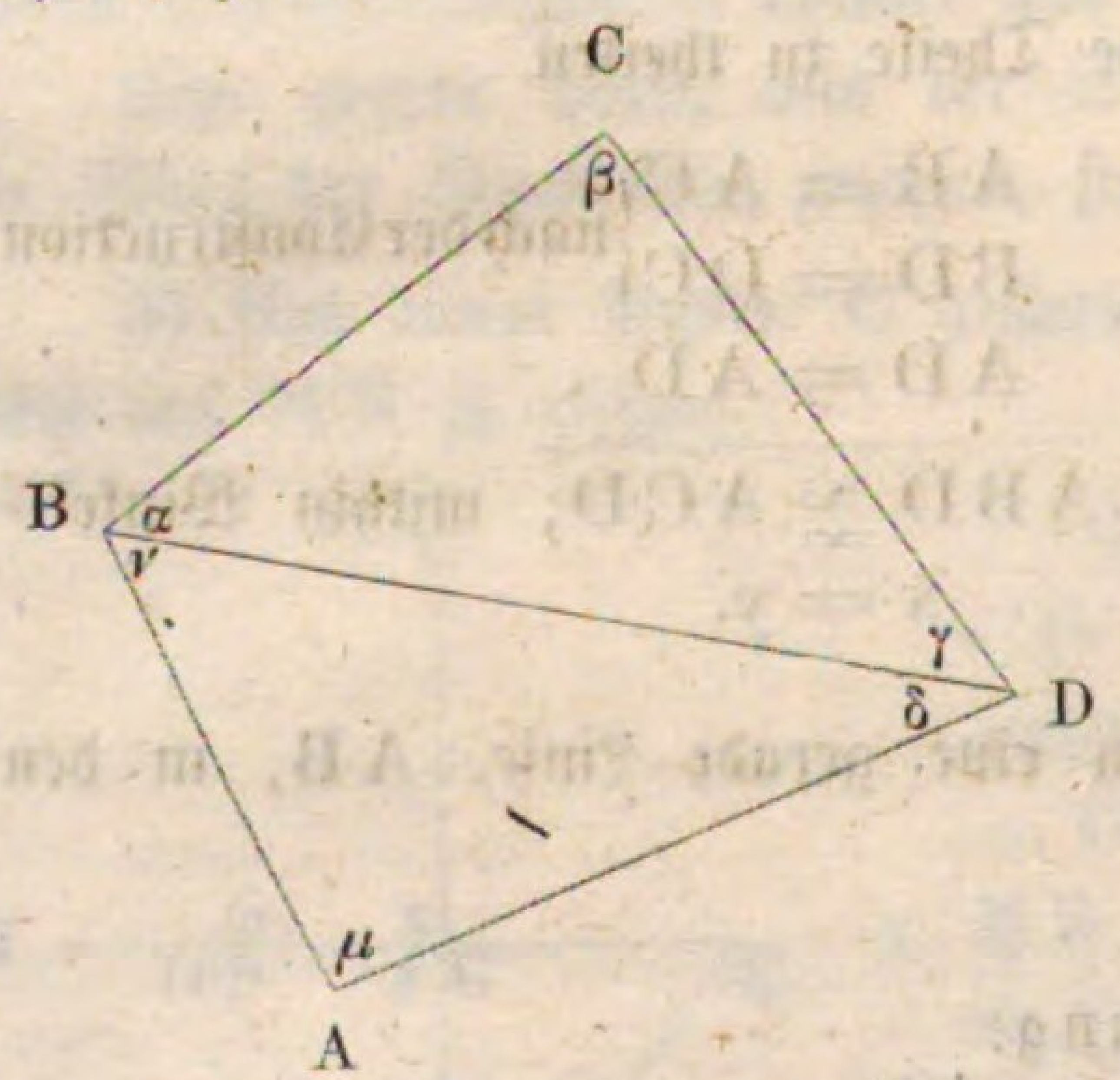
Man ziehe aus dem gegebenen Punkte C eine gerade Linie, CD, willkürlich nach AB, und mache den Winkel $DCM = CDB$, so ist $MN \parallel AB$; denn die gleichen Winkel DCM und CDB sind Wechselwinkel.

§. 5.

Bestimmung der vierseitigen Figuren.

Eine vierseitige Figur entsteht, wenn man eine Fläche durch vier gerade Linien begränzt. Da eine solche Figur immer vier Seiten und vier Winkel hat, welche häufig, was freilich falsch ist, Ecken genannt werden, so hat man die vierseitigen Figuren auch Vierecke genannt.

Jedes Viereck kann durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt werden, und da in den drei Winkeln eines jedes Dreiecks immer 180^0 vertheilt liegen, so liegen in den vier Winkeln eines jeden Vierecks stets 360^0 vertheilt, z. B.

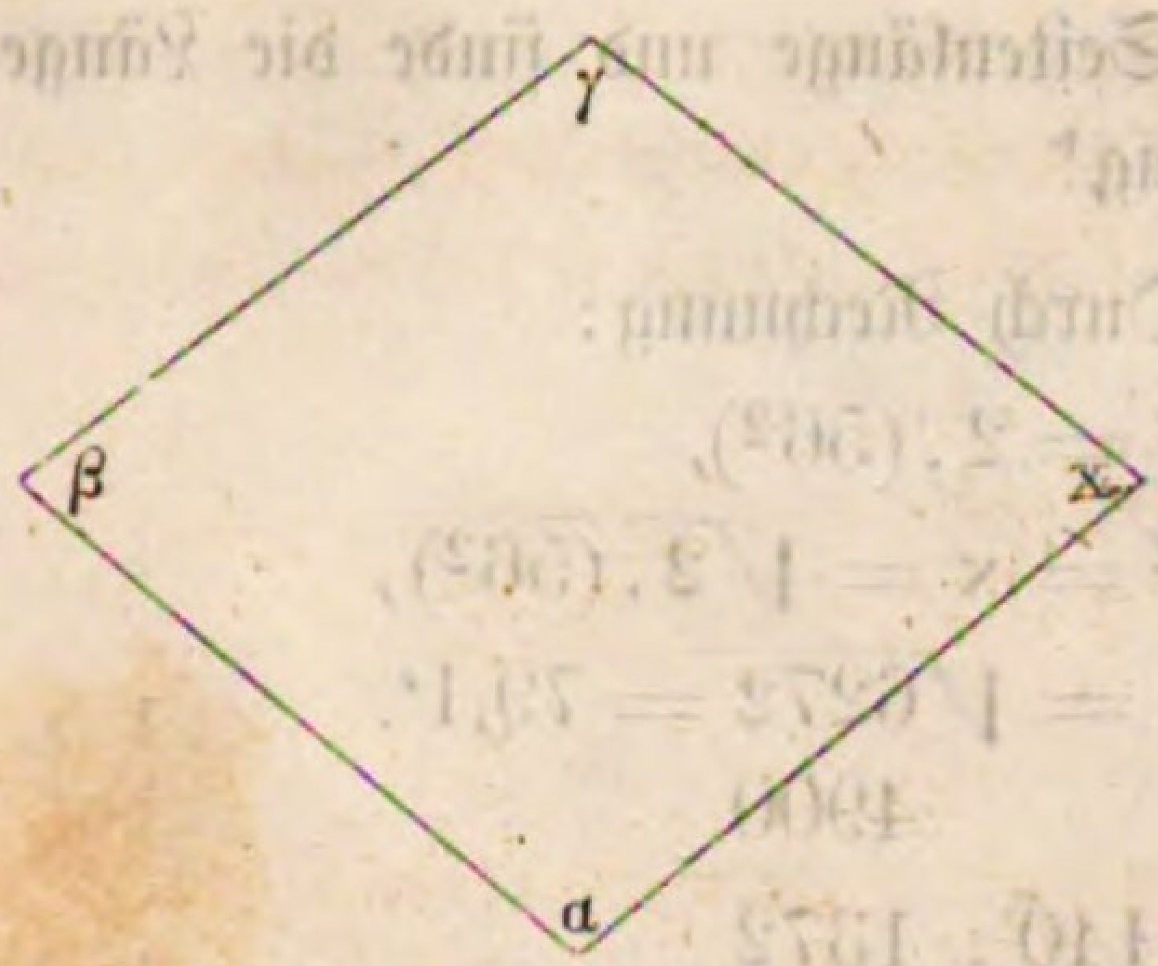


Das Viereck ABCD ist durch die Diagonale BD in zwei Dreiecke zerlegt. In dem Dreieck BCD sind die Winkel $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ und in dem Dreieck BAD sind die $\sphericalangle\ \mu + \nu + \delta = 180^0$; also sind $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \mu + \nu = 360^0$. Ferner sind $\sphericalangle\ \alpha + \nu = \sphericalangle\ B$

$$\sphericalangle\ \gamma + \delta = \sphericalangle\ D$$

$$\mu + B + \beta + D = 360^0.$$

Im schlimmsten Fall braucht man also von den vier Winkeln eines Vierecks nur die Größe von dreien zu wissen und kann die Größe des vierten unbekannten Winkels jedesmal durch Rechnung finden. Ist z. B. $\sphericalangle\ \alpha = 101^0$, $\sphericalangle\ \beta = 72^0$, $\sphericalangle\ \gamma\ 105^0$, so ist der unbekannte $\sphericalangle\ x = 360^0 - (101^0 + 72^0$



$+ 105^0) = 82^0$. Eine vierseitige Figur ist also eine solche, welche durch vier gerade Linien begränzt ist und vier Winkel hat, welche zusammen 360^0 messen. Jede vierseitige Figur besteht demnach aus vier Seiten und aus vier Winkeln, d. h. aus acht wesentlichen Stücken, und es entsteht also die Frage:

Durch wie viele und durch welche von diesen acht Stücken ist ein Viereck vollständig bestimmt?

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir zunächst die möglichen Arten von vierseitigen Figuren angeben, da jede einzelne Art ihre eigenthümliche Bestimmung hat. Die sechs möglichen vierseitigen Figuren sind: das Quadrat, der Rhombus, das Rechteck, die Rhomboide, das Paralleltrapez und das Trapez, welche wir nacheinander nunmehr bestimmen wollen.

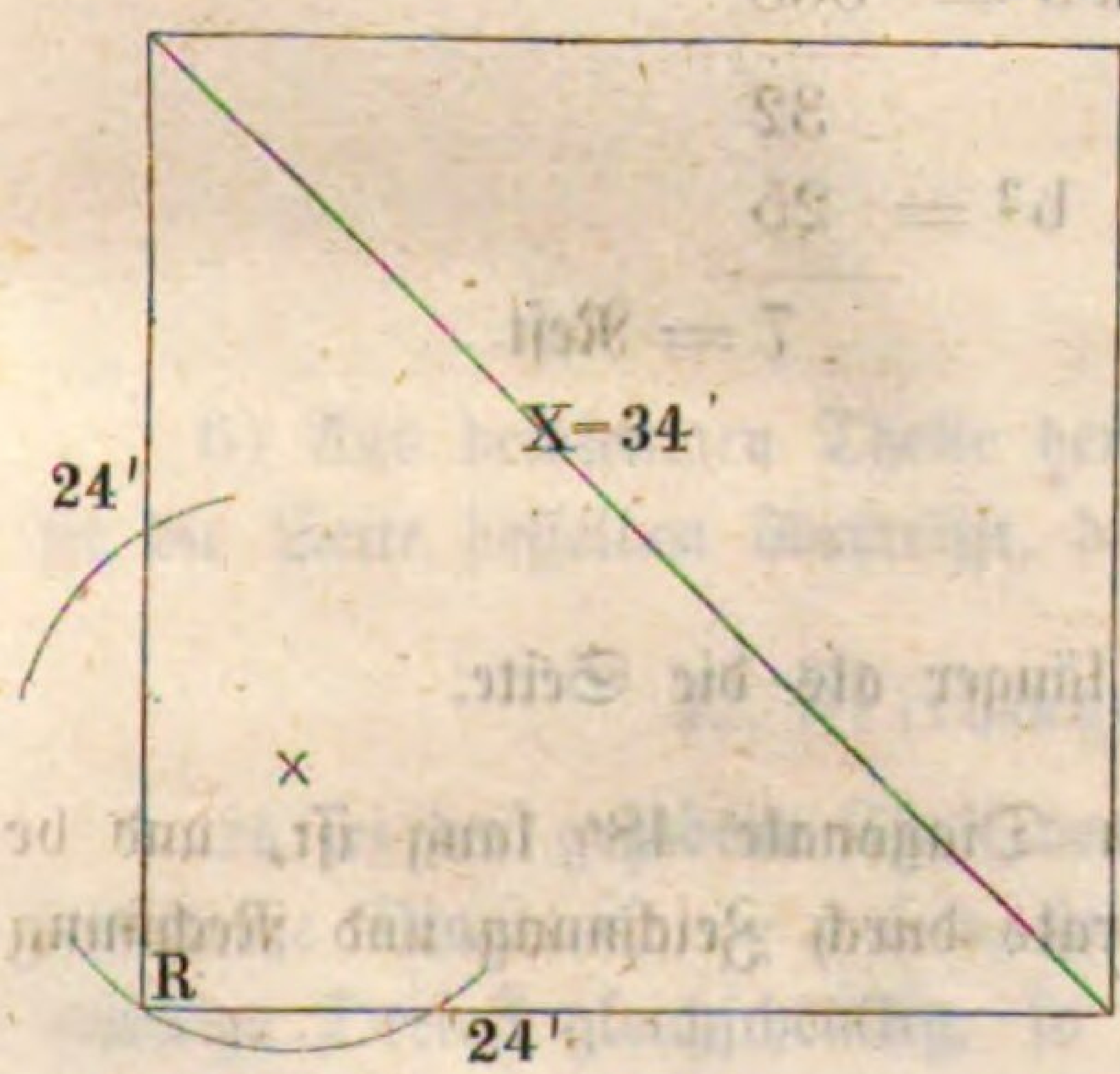
Das **Quadrat** ist von allen geradlinigen Figuren die einfachste, weil man von ihren acht wesentlichen Stücken nur die Länge einer einzigen Seite zu wissen nöthig hat, um daraus das Quadrat nach allen Beziehungen hin bestimmen zu können; daher kommt es, daß man das Quadrat zum Maße für alle Flächen angenommen hat.

Ein Quadrat ist eine solche vierseitige Figur, welche vier gleich lange Seiten und vier gleich große Winkel hat; jeder Winkel ist also $\doteq$ R; denn $\frac{360^0}{4} = 90^0 = R$.

Das Quadrat ist demnach bestimmt:

1) durch eine Seite;
2) durch seine Diagonale;
3) durch die Differenz zwischen Seite und Diagonale.

Aufgaben:

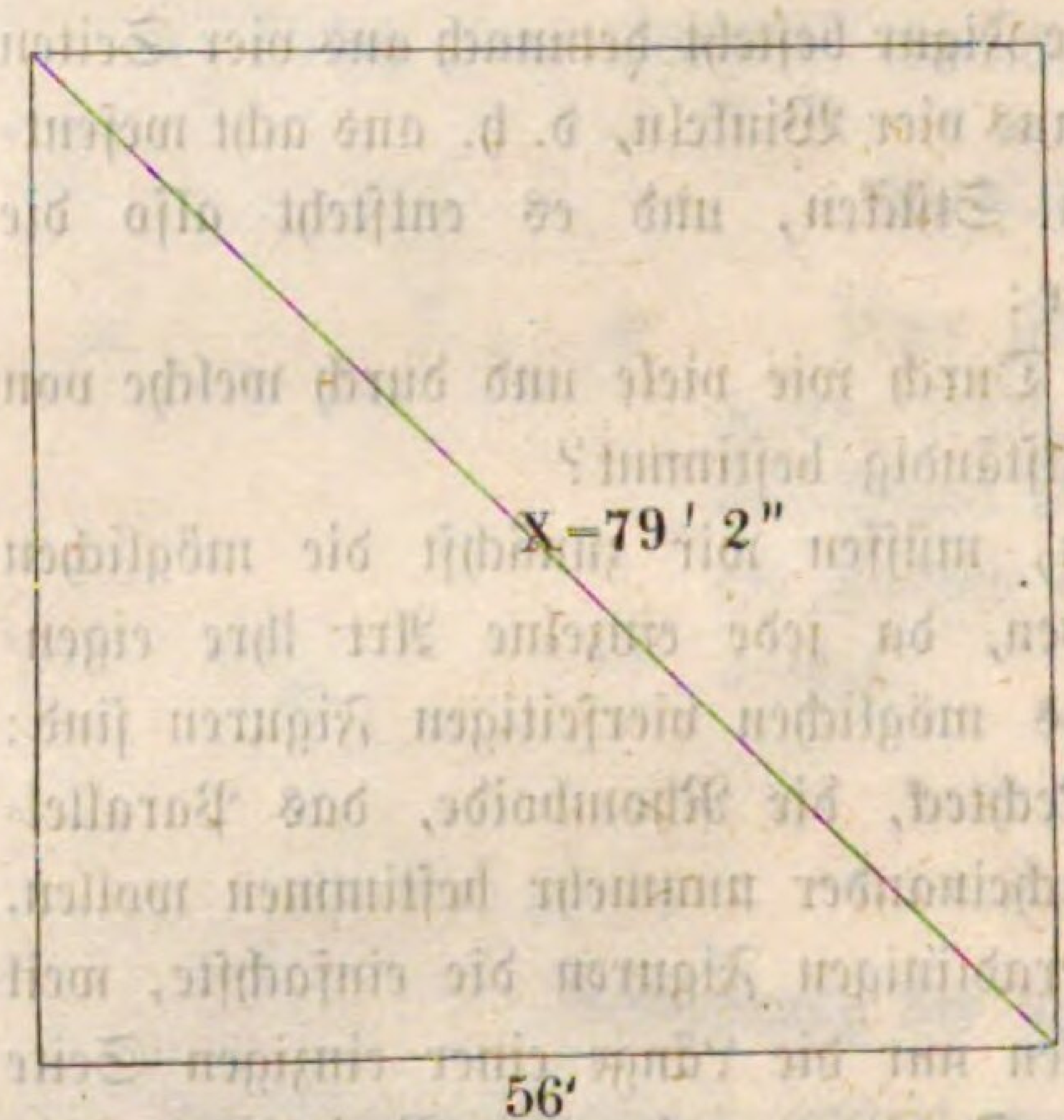


1) Construire ein Quadrat von 24′ Seitenlänge und bestimme die Länge der Diagonale durch Zeichnung, prüfe aber die Richtigkeit der Zeichnung durch Rechnung!

Rechnung:

$$x^2 = 2.(24^2),$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{2.(24^2)},$$
$$x = \sqrt{1152} = 33{,}9'.$$

2) Construire ein Quadrat von 56′ Seitenlänge und finde die Länge der Diagonale durch Zeichnung und Rechnung!



Durch Rechnung:

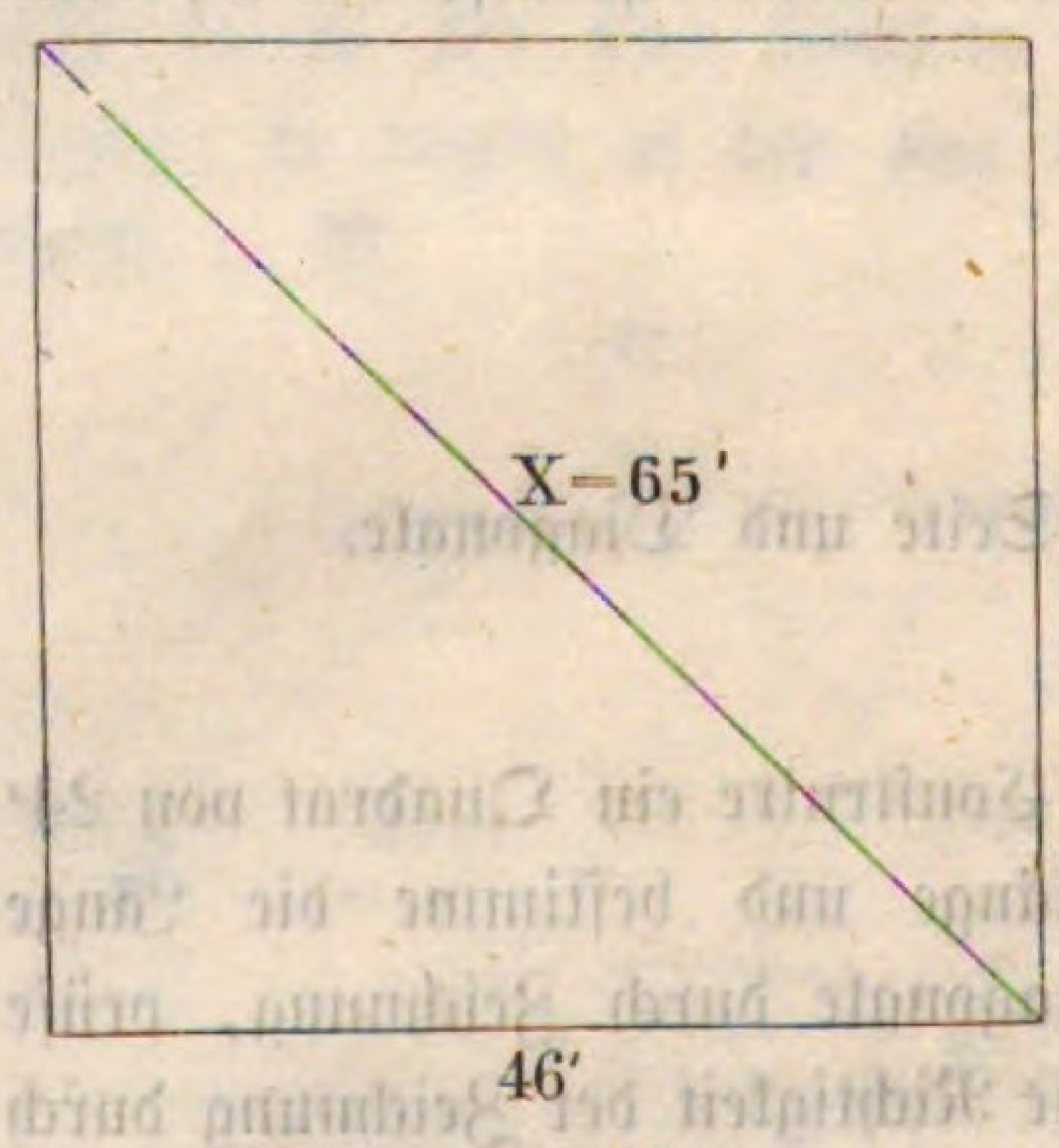
$$x^2 = 2 . (56^2),$$

$$\sqrt{x^2} = x = \sqrt{2 . (56^2)},$$

$$x = \sqrt{6272} = 79{,}1'.$$

4900
140 : 1372
1260
112
81
1580 : 3100
1580
1520
1
1519 Rest.

3) Construire ein Quadrat von 46′ Seitenlänge und bestimme durch Zeichnung und Rechnung, um wie viele Fuß die Diagonale des Quadrats länger ist, als seine Seite!



Durch Rechnung:

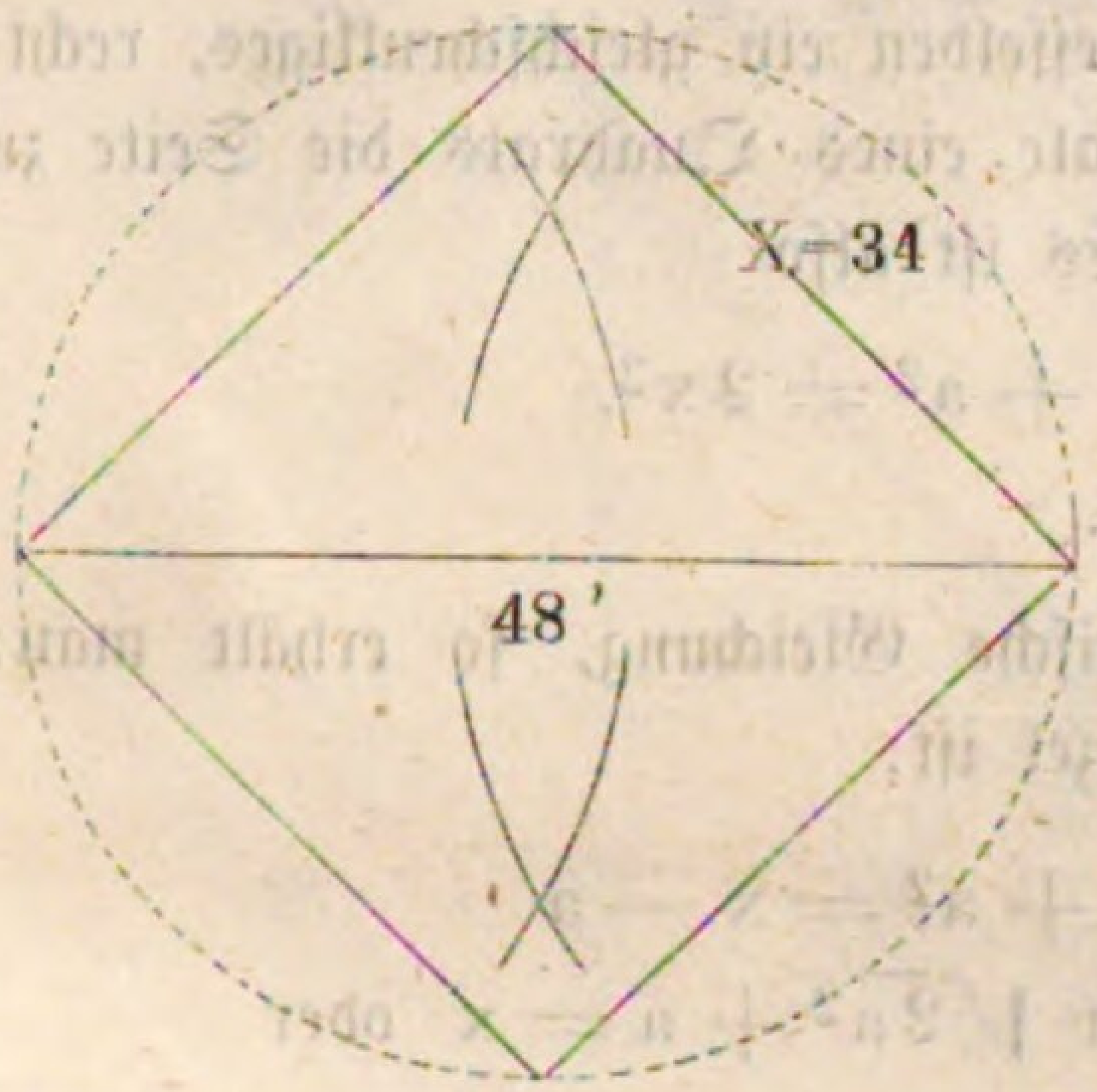
$$x^2 = 46^2 + 46^2,$$

$$x = \sqrt{4232} = 65'$$

$a^2 = 3600$
$2a = 120 : 632$
$2ab = 600$
32
$b^2 = 25$
7 = Rest.

65′
— 46′
19′ ist die Diagonale länger als die Seite.

4) Construire ein Quadrat, dessen Diagonale 48′ lang ist, und bestimme die Länge der Seite des Quadrats durch Zeichnung und Rechnung!



Durch Rechnung:

$48^2 = x^2 + x^2 = 2x^2,$

$48^2 = 2304 = 2x^2,$

$x^2 = \frac{2304}{2} = 1152,$

$x = \sqrt{1152} = 34'$

$a^2 = 900$

$2a = 60 : 252$

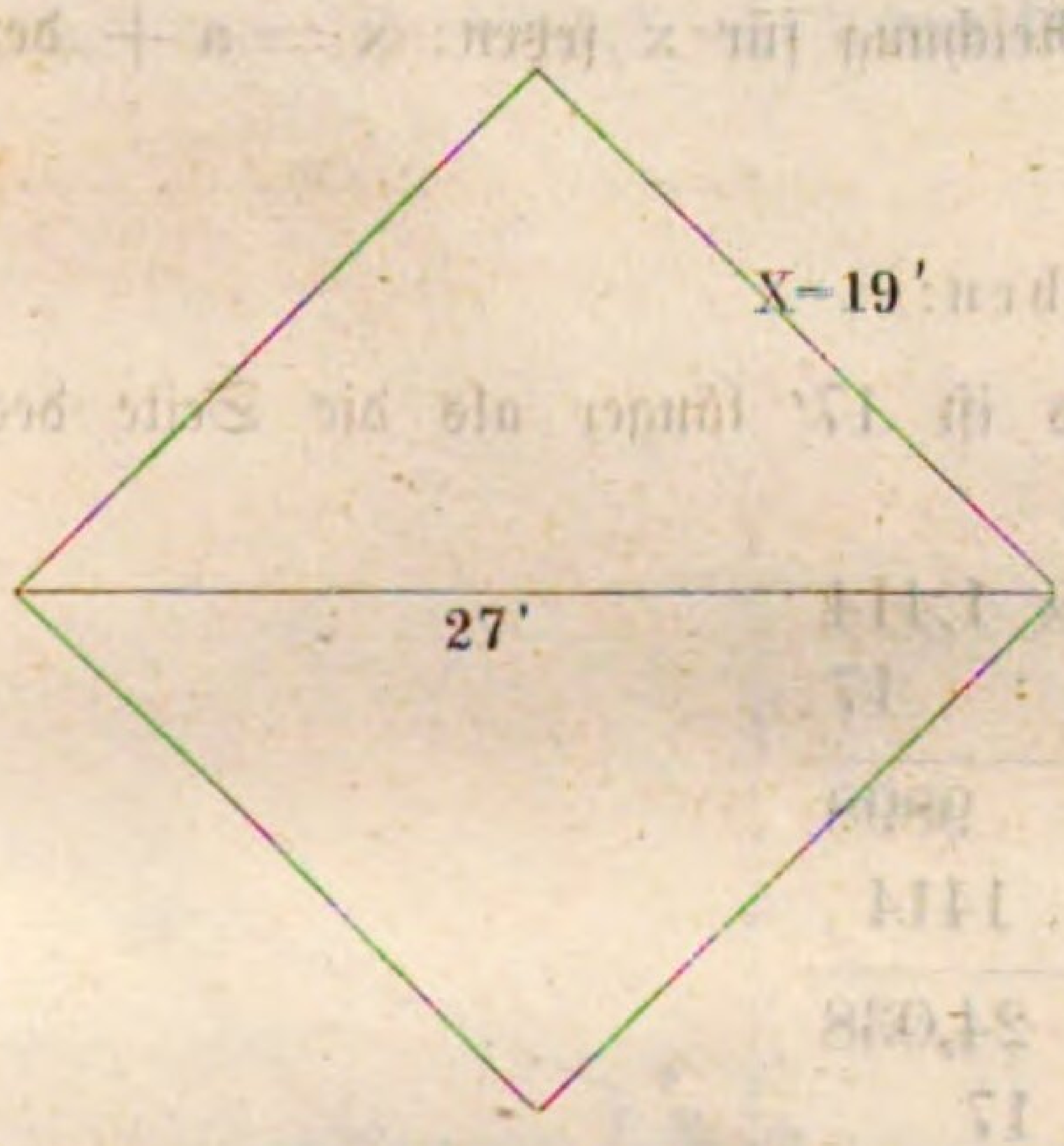
$2ab = 240$

12

$b^2 = 16$

$- 4 =$ Rest.

5) Construire ein Quadrat, dessen Diagonale 27′ lang ist und bestimme die Länge der Seite des Quadrats durch Zeichnung und Rechnung.



$27^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$

$x^2 = \frac{27^2}{2} = 364,5,$

$\sqrt{\frac{27^2}{2}} = \sqrt{x^2} = x,$

$x = \sqrt{364,50} = 19,1$

$a^2 = 10000$

$2a = 200 : 26450$

$2ab = 18000$

8450

$b^2 = 8100$

380 : 350

380

$- 30$

1

$- 31 =$ Rest.

6) Aus demjenigen Theile der Diagonale eines Quadrats, um welchen sie die Seite desselben übertrifft, die letztere zu finden!

I. Arithmetische Auflösung:

Es sei der gegebene Theil der Diagonale $= a$, die Seite $= x$, also die ganze Diagonale $= x + a$, so ist $(x + a)^2 = 2x^2$, denn ist das rechtwinklige Dreieck gleichschenklig, so wird das Quadrat der Hypotenuse noch

einmal so groß als das Quadrat eines Katheten. Die Diagonale eines Quadrats aber macht mit zwei Seiten desselben ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck; daher gibt die Diagonale eines Quadrats die Seite zu einem noch einmal so großen Quadrat. Es ist also

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 = 2x^2.$$
$$a^2 = x^2 - 2ax.$$

Ergänzt man diese unreine, quadratische Gleichung, so erhält man: $2a^2 = x^2 - 2ax + a^2$, wovon die Wurzel ist:

$$\sqrt{2a^2} = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2} = x - a$$
$$\sqrt{2a^2} = x - a; \text{ mithin } \sqrt{2a^2} + a = x \text{ oder}$$
$$a + a\sqrt{2} = x.$$

Nun läßt sich aber beweisen, daß die Seite eines Quadrats sich immer zu seiner Diagonale verhält, wie $1 : \sqrt{2}$, denn setzen wir die Seite eines Quadrats $= 1$, so ist die Diagonale des Quadrats $= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; es verhält sich also die Seite des Quadrats zur Diagonale, wie 1:1,414...; demnach können wir in die frühere Gleichung für x setzen: $x = a +$ der Diagonale des Quadrats von a.

Aufgaben:

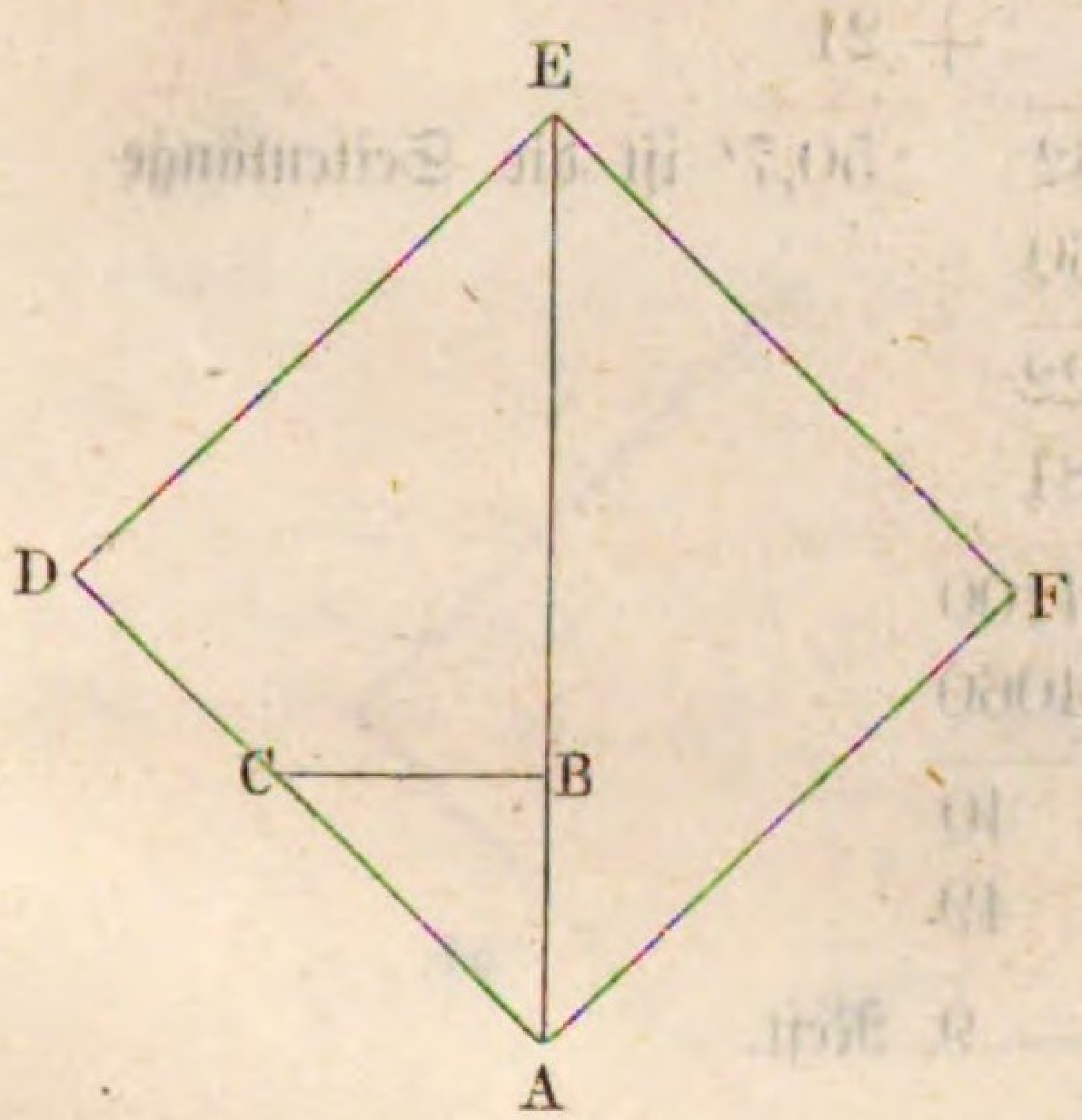
1) Die Diagonale eines Quadrats ist 17′ länger als die Seite des Quadrats; wie lang ist die Seite?

$$
\begin{array}{r}
17 + 17 \times 1{,}414 \\
17 \\
\hline
9898 \\
1414 \\
\hline
24{,}038 \\
+\ 17 \\
\hline
41{,}038'.
\end{array}
$$

2) Die Seite eines Quadrats ist 34′; finde nach dem Verhältniß von $1 : \sqrt{2}$ die Diagonale!

$$
\begin{array}{r}
1{,}414 \\
34 \\
\hline
5656 \\
4242 \\
\hline
48{,}076'.
\end{array}
$$

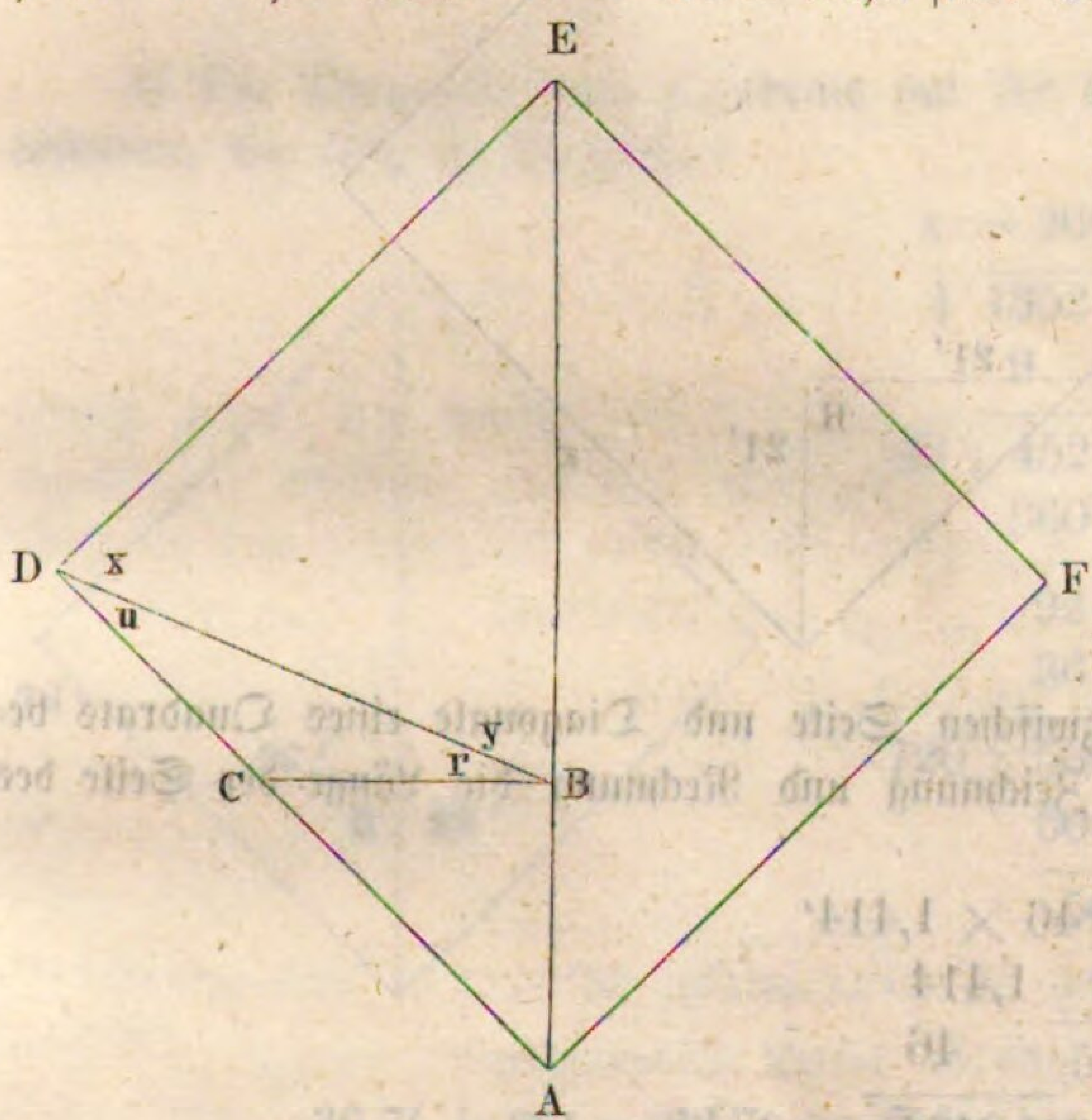
II. Geometrische Auflösung:



Es sei A B das gegebene Stück der Diagonale; man lege B C = A B rechtwinklig daran, ziehe A C und verlängere die Linie so, daß C D = A B werde; alsdann errichte man D E senkrecht in D auf A D; verlängere A B so weit, daß sie D E in E schneidet, und vollende das Quadrat A D E F, alsdann ist die gesuchte Seite des Quadrats durch Construction gefunden.

Beweis:

Es ist das Dreieck ABC ähnlich ADE, da beide den Winkel bei A gemein haben und ihre Winkel bei B und D rechte sind. Da nun ABC nach der Construction gleichschenklig ist, so ist es auch A D E, folglich A D E F ein Quadrat. Ferner ziehe man BD, so ist Dreieck BDC gleichschenklig, folglich ∢ r = ∢ u, also auch ∢ x = ∢ y und daher B E = E D, also ist A B auch der Ueberschuß der Diagonale über die Seite des Quadrats.

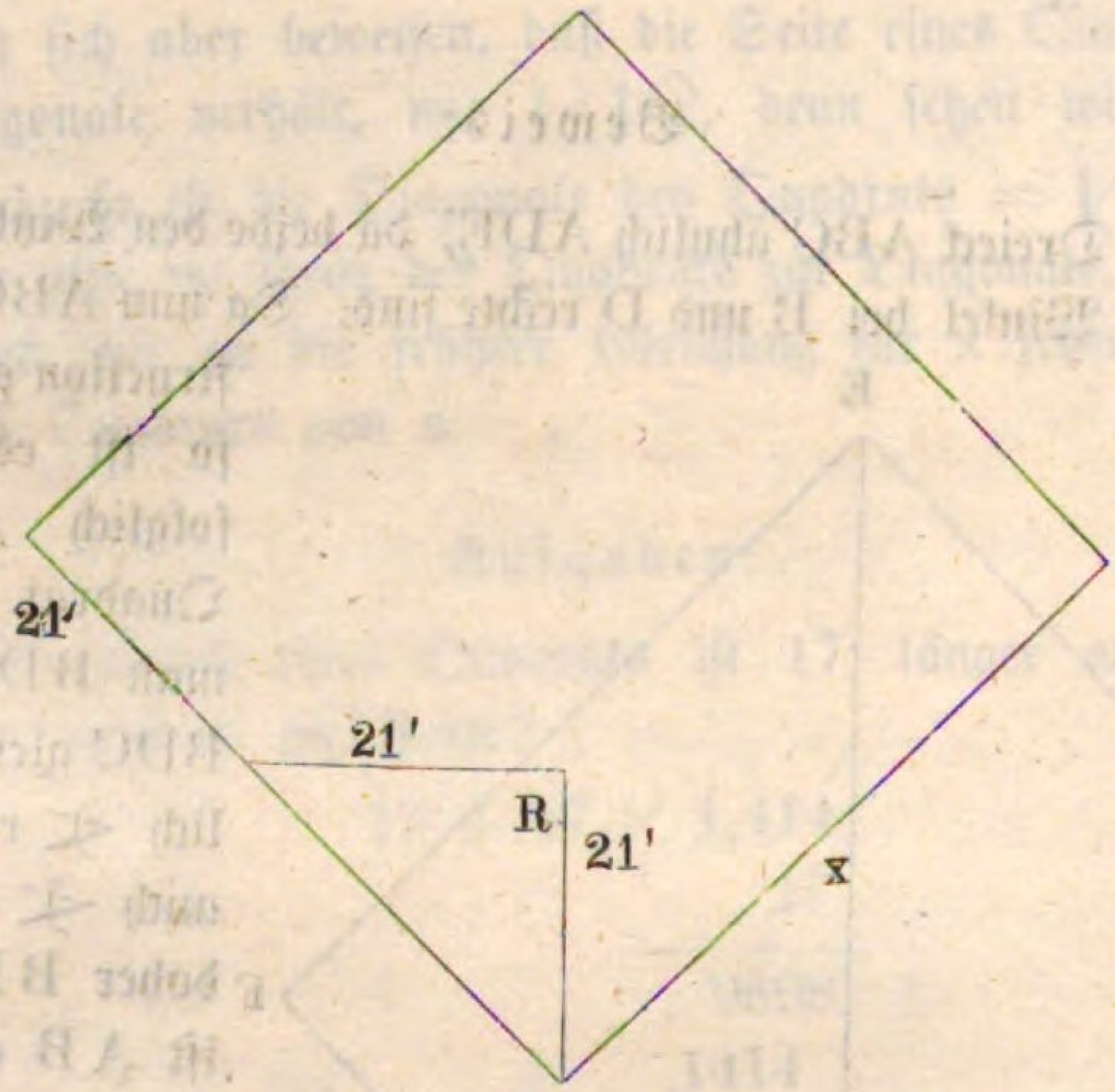


Aufgaben:

1) Die Diagonale eines Quadrats ist 21′ länger, als die Seite des Quadrats; finde durch Zeichnung und Rechnung die Länge der Seite des Quadrats!

$$x = 21' + \sqrt{(2 \times 21^2)} = \sqrt{882} = 29{,}7$$

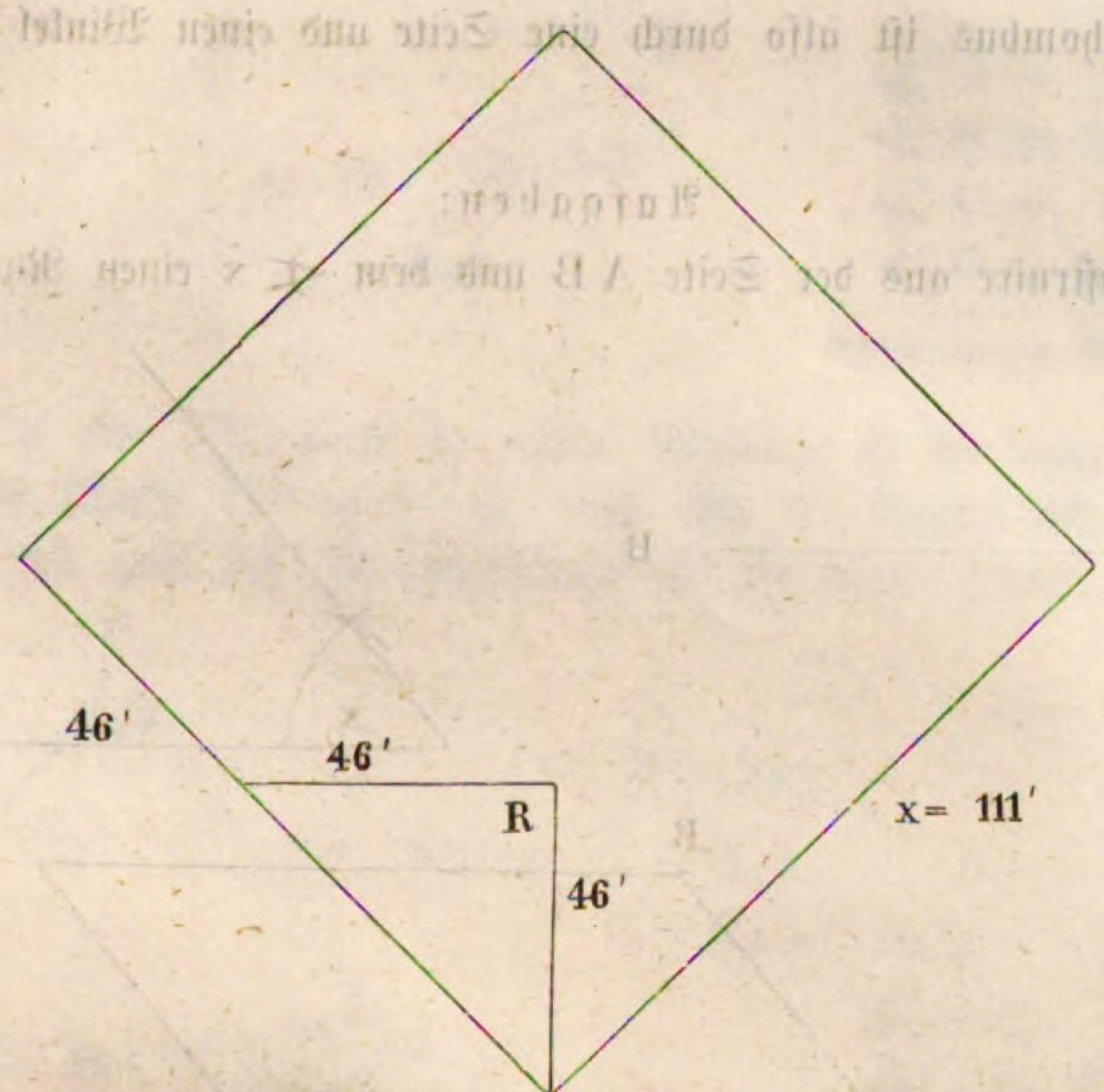
```
      4          + 21
 40 : 482        50,7' ist die Seitenlänge
      360
      122
       81
580 : 4100
      4060
        40
        49
      —  9 Rest.
```



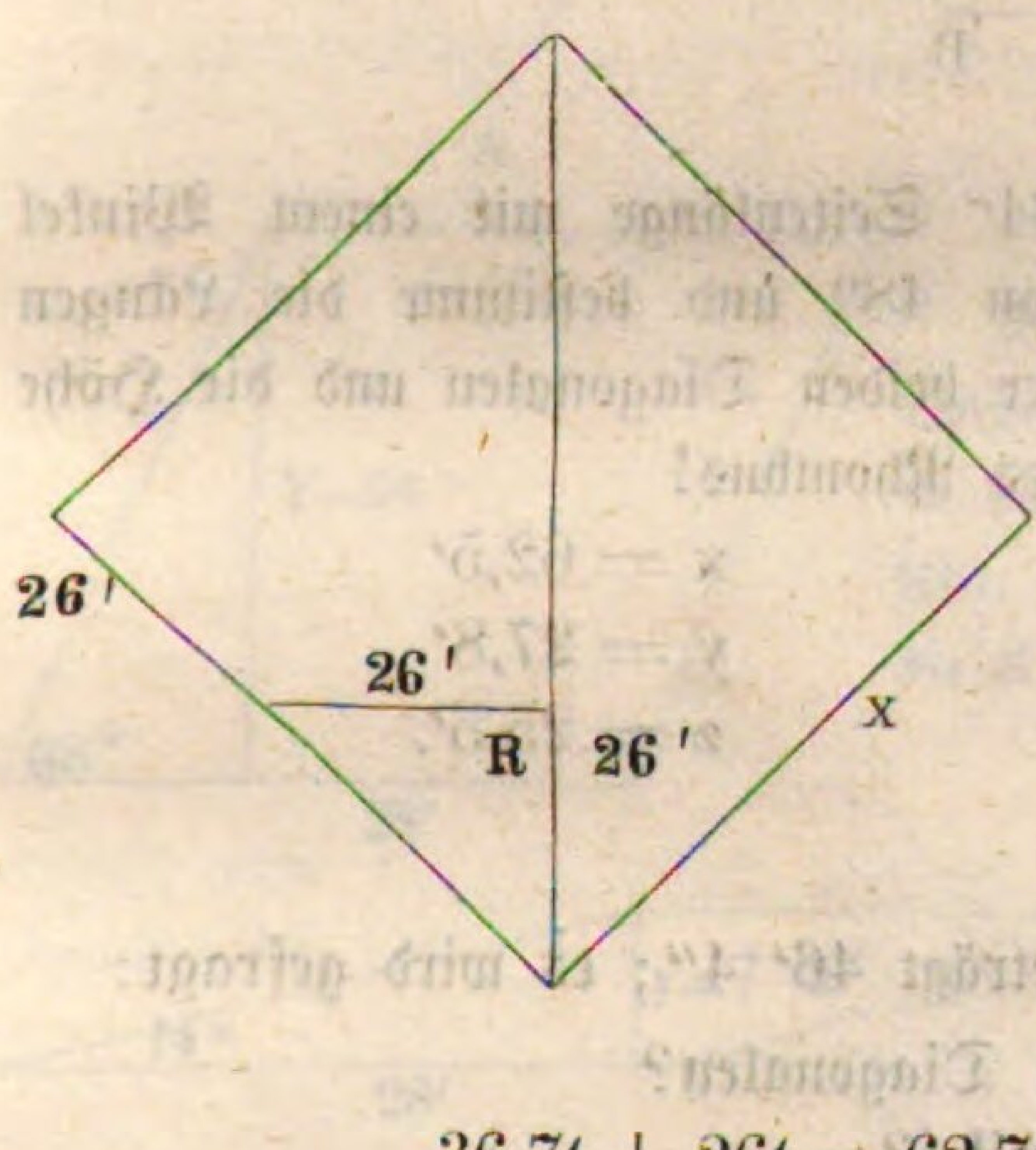
2) Die Differenz zwischen Seite und Diagonale eines Quadrats beträgt 46'; finde durch Zeichnung und Rechnung die Länge der Seite des Quadrats!

$$x = 46' + 46 \times 1{,}414'$$

```
    1,414
       46
    8484
   5656
   65,044
 +  46
  111,044' = Seite des Quadrats.
```



3) Die Diagonale eines Quadrats soll 26' länger sein, als die Seite desselben; wie lang ist die Seite?



$$x = 26' + \sqrt{(2 \times 26^2)}$$

$$\sqrt{1352} = 36,7$$

```
      9
 60 : 452
      360
      ---
       92
       36
      ---
720 : 5600
      5040
      ----
       560
        49
      ----
       511 = Rest.
```

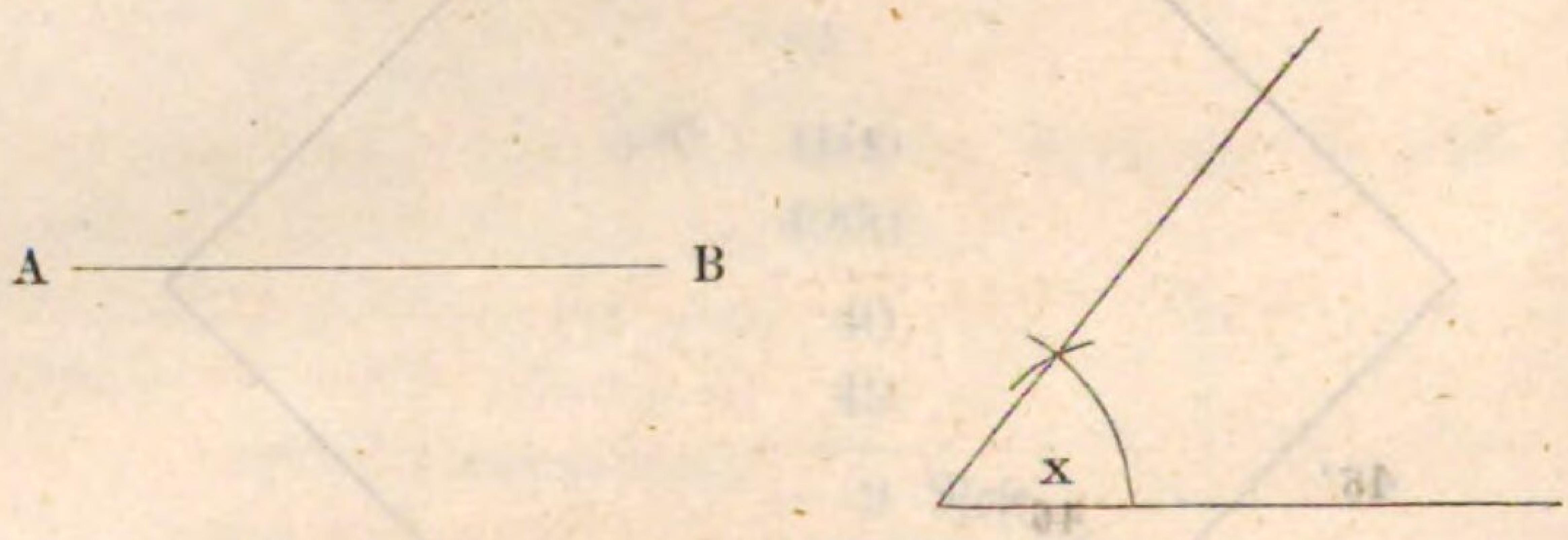
$36,7' + 26' = 62,7'$ = Seite des Quadrats.

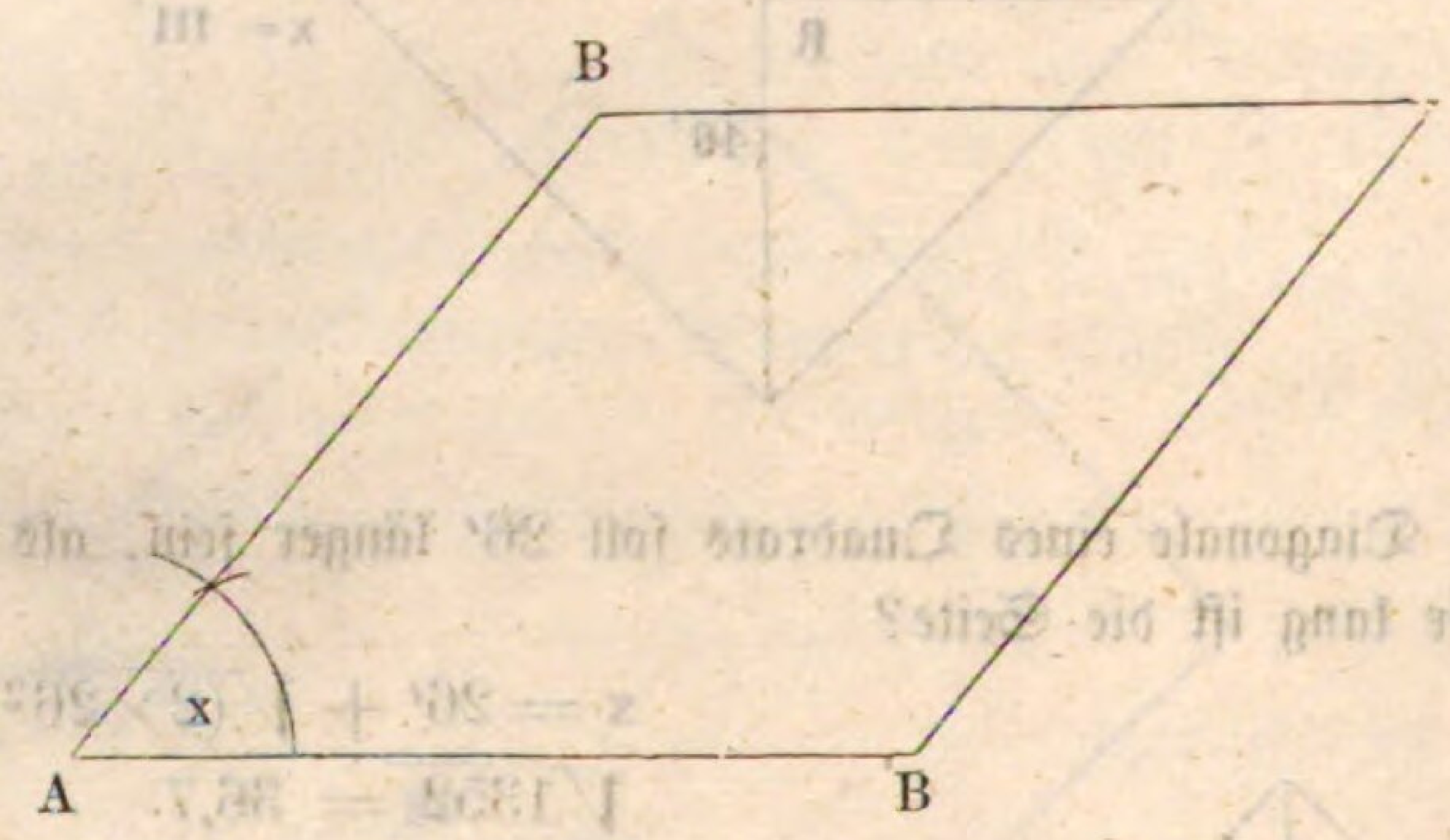
Verschiebt man ein Quadrat, d. h. läßt man seine Seiten unverändert und verändert nur seine Winkel, so entsteht ein verschobenes Quadrat, welches den Namen Rhombus erhält. In einem Rhombus sind also alle vier Seiten gleich lang, aber nur die gegenüberstehenden Winkel gleich groß.

Ein Rhombus ist also durch eine Seite und einen Winkel vollständig bestimmt.

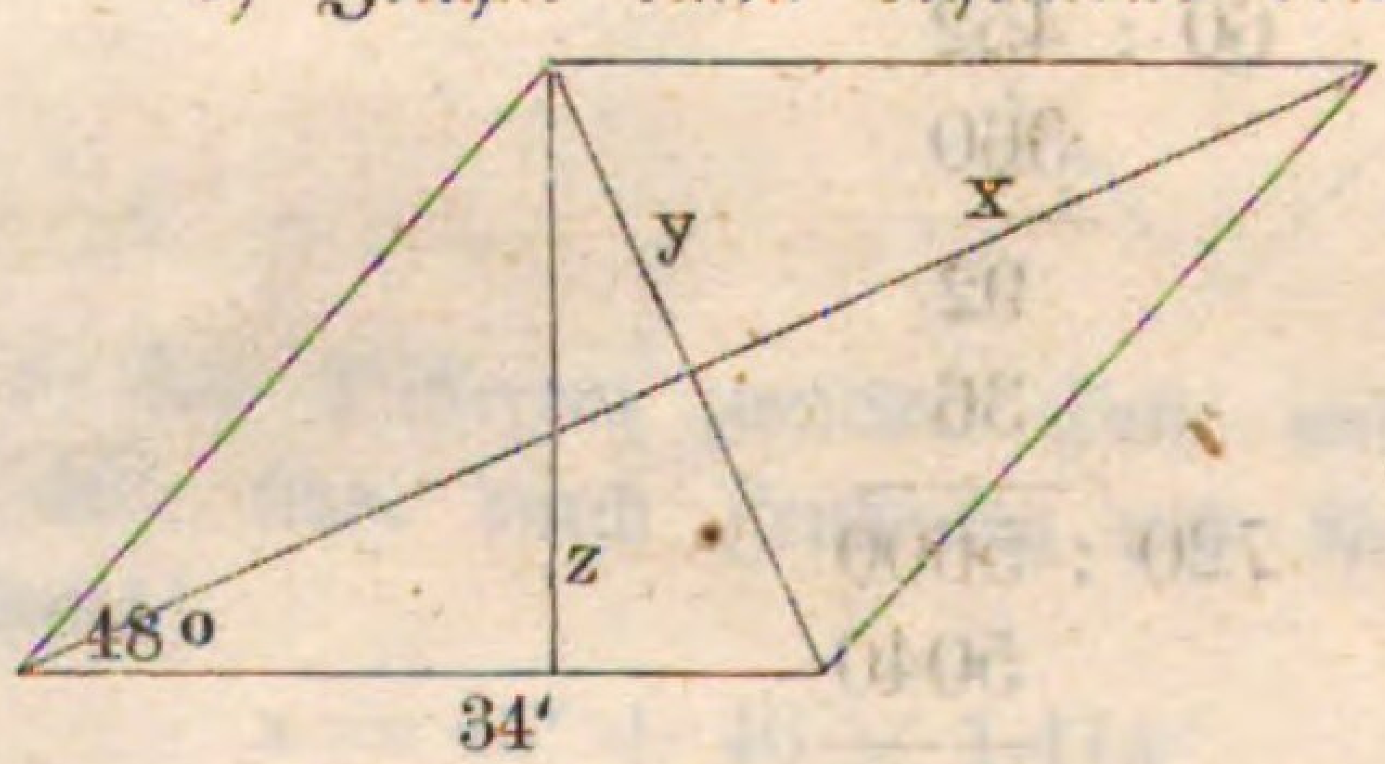
Aufgaben:

1) Construire aus der Seite AB und dem ∢ x einen Rhombus!





2) Zeichne einen Rhombus von 34′ Seitenlänge mit einem Winkel von 48⁰ und bestimme die Längen der beiden Diagonalen und die Höhe des Rhombus!



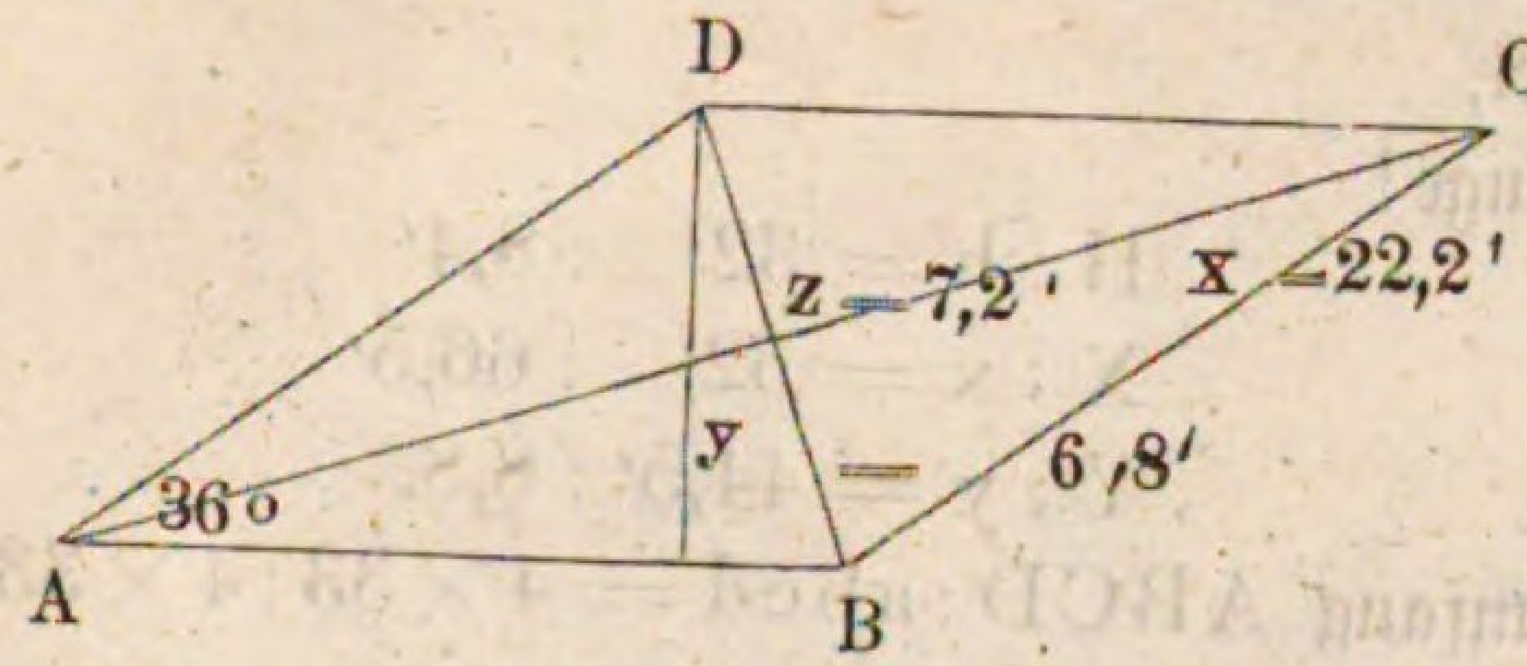
$x = 62,5'$
$y = 27,8'$
$z = 25,5'$.

3) Der Umfang eines Rhombus beträgt 46′ 4″; es wird gefragt:

1) Wie lang sind die beiden Diagonalen?
2) Wie lang ist das Perpendikel?
3) Wie groß sind die drei unbekannten Winkel, wenn ein Winkel in dem Rhombus 36⁰ groß ist?

$\frac{46' \, 4''}{4} = 11' \, 7''$ ist die zu nehmende Seitenlänge.

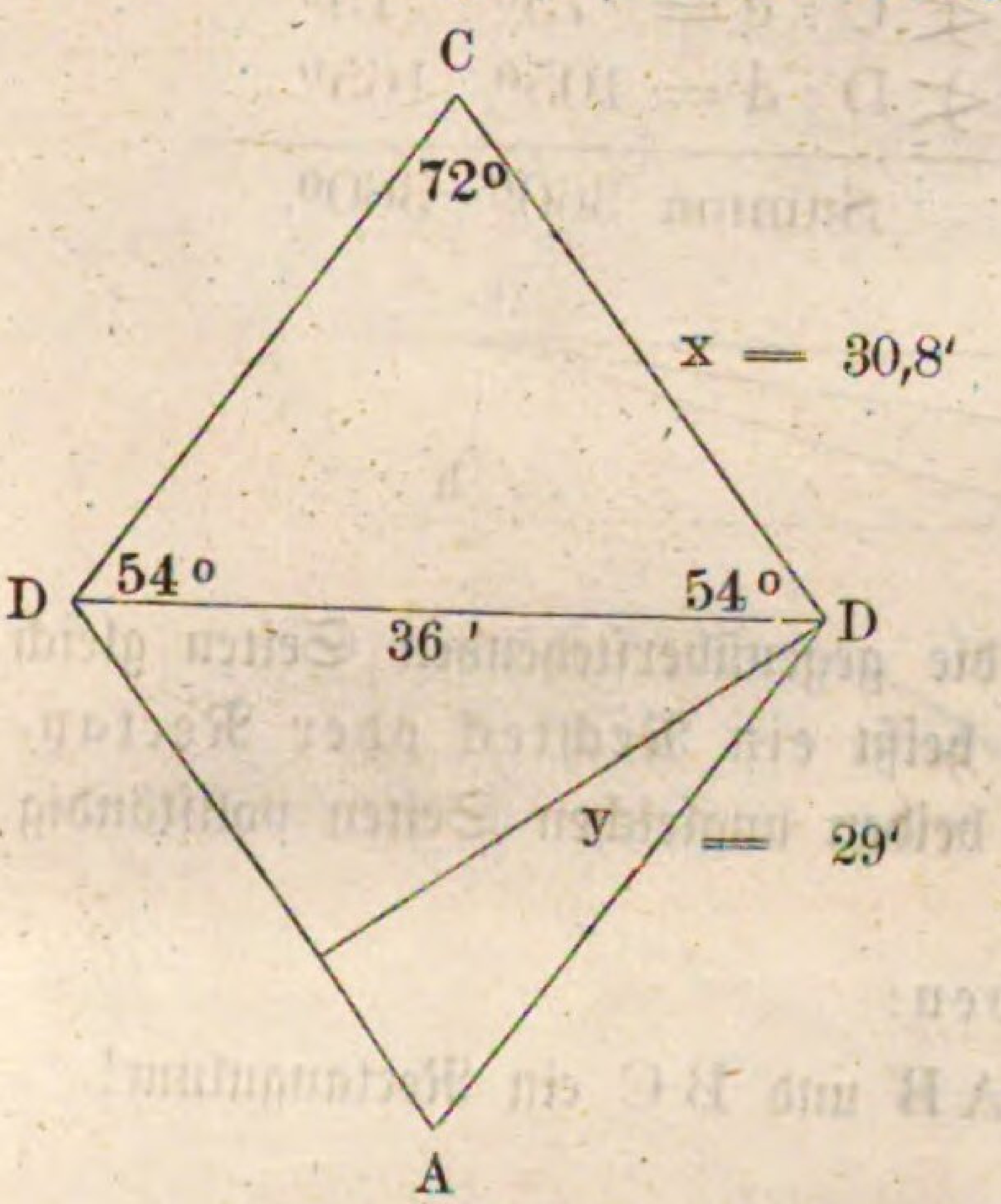
$x = 22,2'$, $z = 7,2'$, $y = 6,8'$.



∢ A = 36°
∢ B = 144°
∢ C = 36°
∢ D = 144°

Summa = 360°.

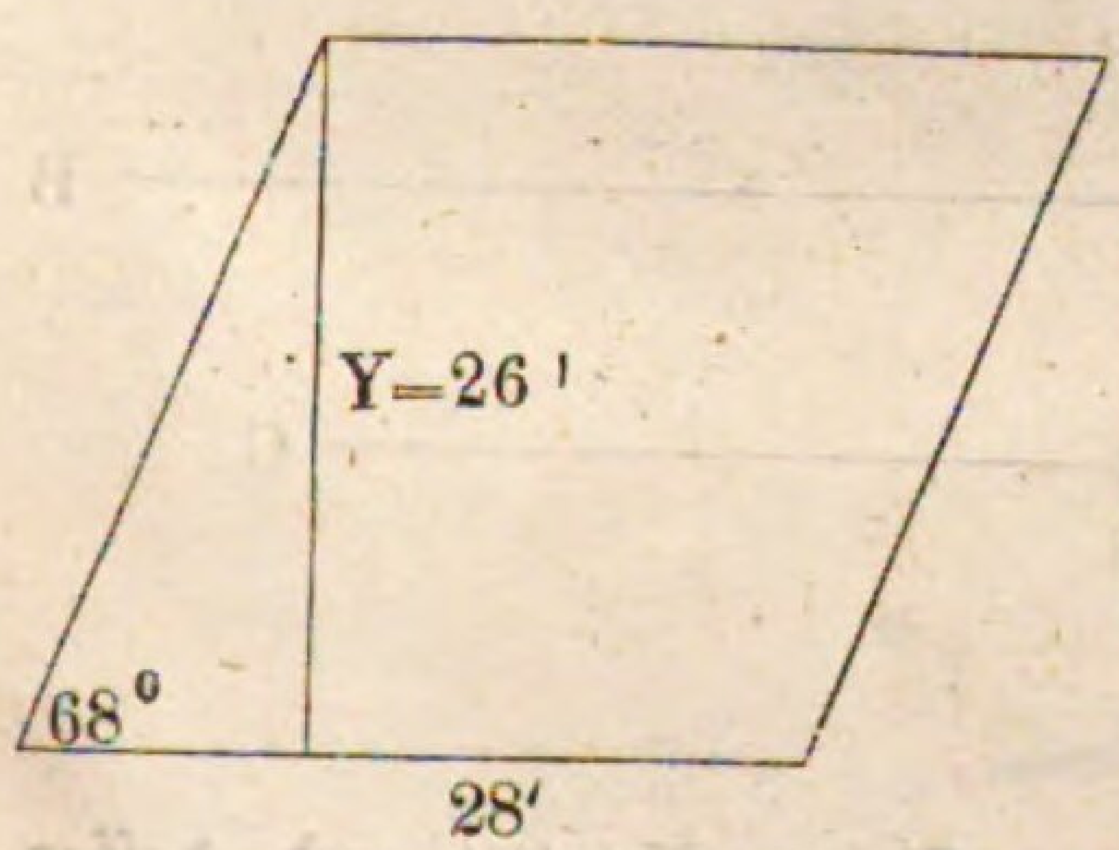
4) Die eine Diagonale in einem Rhombus ist 36′ lang, der gegenüberstehende Winkel 72° groß; wie lang sind die Seiten und das Perpendikel, und wie groß sind die unbekannten Winkel dieser Figur?



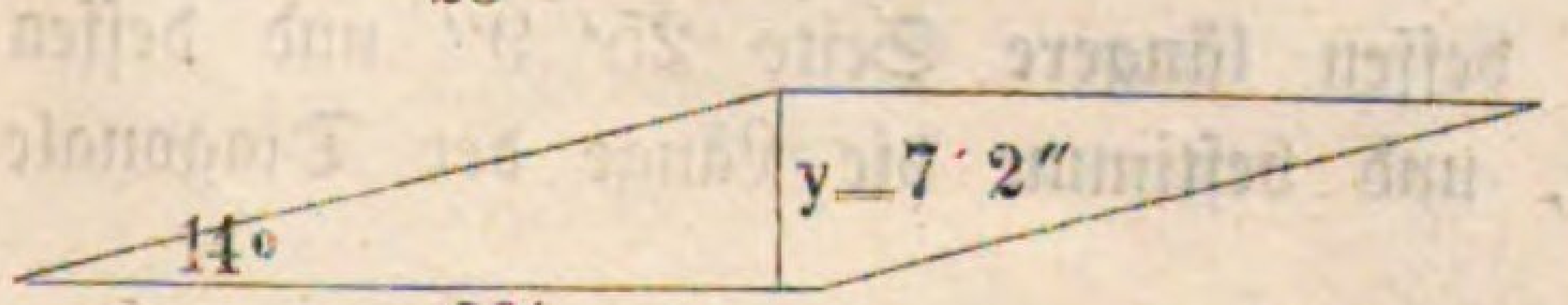
Antwort:

Seite x = 30,8′
Perpendikel y = 29′
∢ A = 72°
∢ B = 108°
∢ C = 72°
∢ D = 108°

Summa = 360°.



5) Zeichne zwei Rhomben von 28′ Seitenlänge; in dem einen soll ein Winkel von 60°, in dem andern ein Winkel von 14° enthalten sein, und bestimme das Verhältniß der Höhen dieser beiden Figuren zu einander!

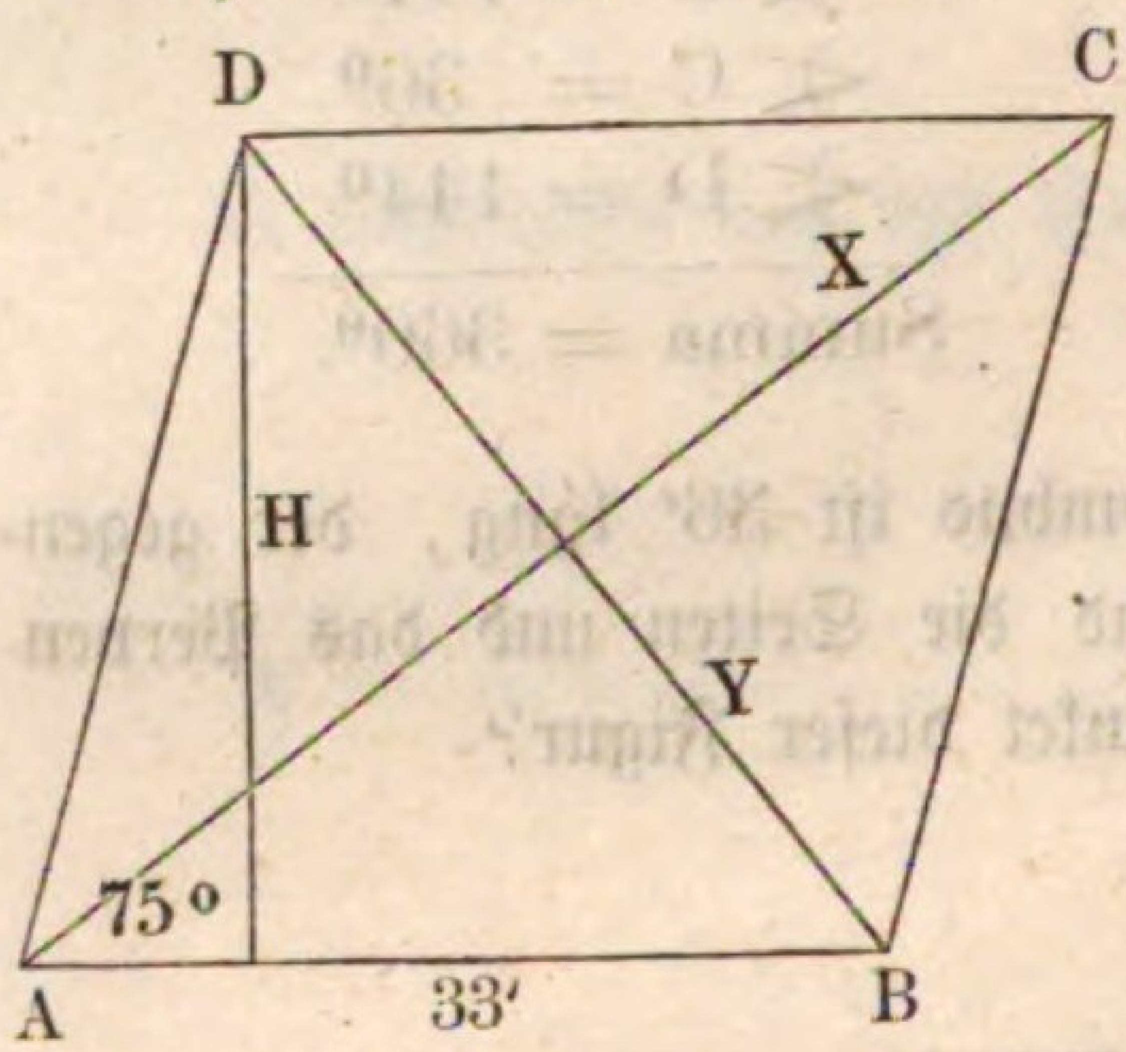


Y : y = 26′ : 7′ 2″.

6) Construire zwei Rhomben von 33′ Seitenlängen, von denen der eine einen Winkel von 15° und der andere einen Winkel von 75° enthält, und bestimme

1) das Verhältniß der Höhen,
2) das Verhältniß der Diagonalen,

3) das Verhältniß der Winkel,
4) das Verhältniß der Umfänge!

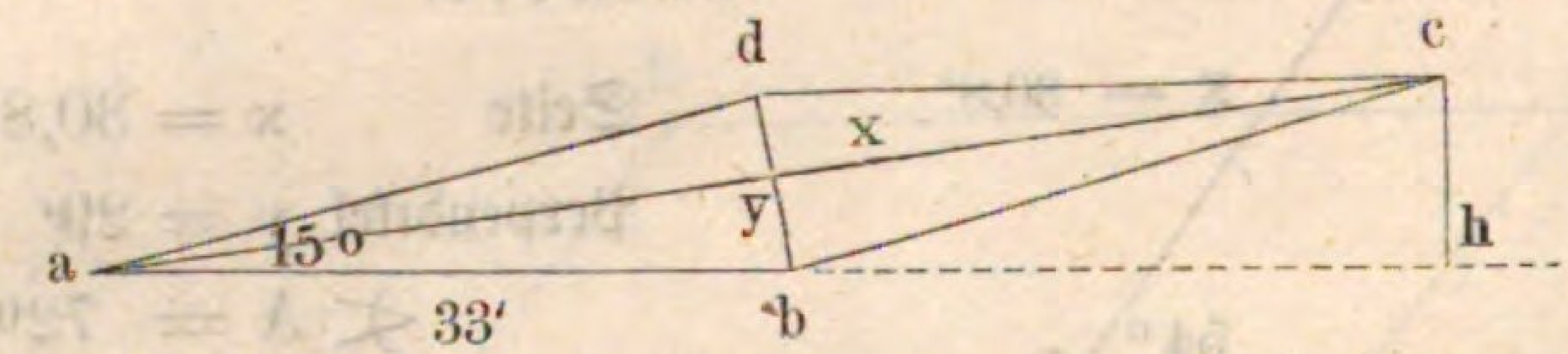


$H : h = 32' \quad : 8{,}4'$
$X : x = 52' \quad : 66{,}5'$
$Y : y = 44{,}5' : 8{,}8.$

Umfang ABCD : abcd = $4 \times 33 : 4 \times 33$,
d. h. die Umfänge sind gleich.

$\sphericalangle A : a = \ \ 75^0 : \ \ 15^0$
$\sphericalangle B : b = 105^0 : 175^0$
$\sphericalangle C : c = \ \ 75^0 : \ \ 15^0$
$\sphericalangle D : d = 105^0 : 165^0$

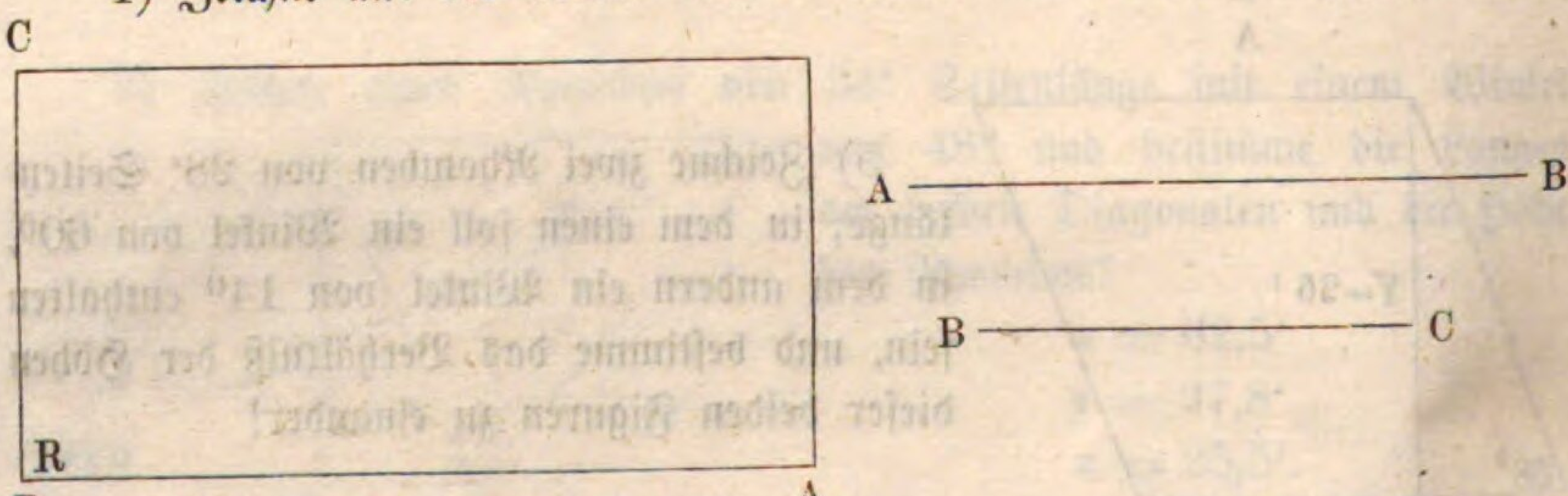
Summa $360^0 : 360^0$.



Eine vierseitige Figur, in welcher die gegenüberstehenden Seiten gleich lang und alle vier Winkel rechte sind, heißt ein **Rechteck** oder **Rectangulum**. Dieses Viereck ist durch seine beiden ungleichen Seiten vollständig bestimmt.

Aufgaben:

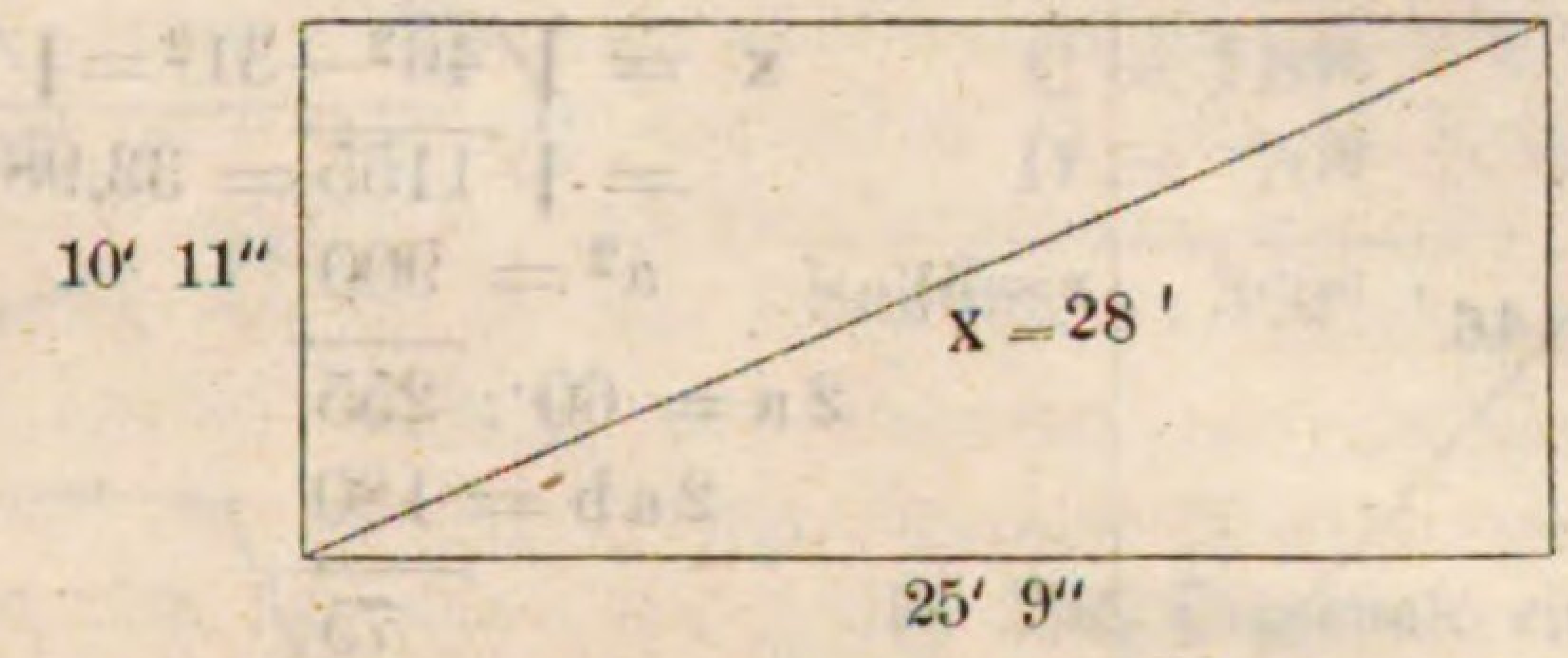
1) Zeichne aus den beiden Linien AB und BC ein Rectangulum!



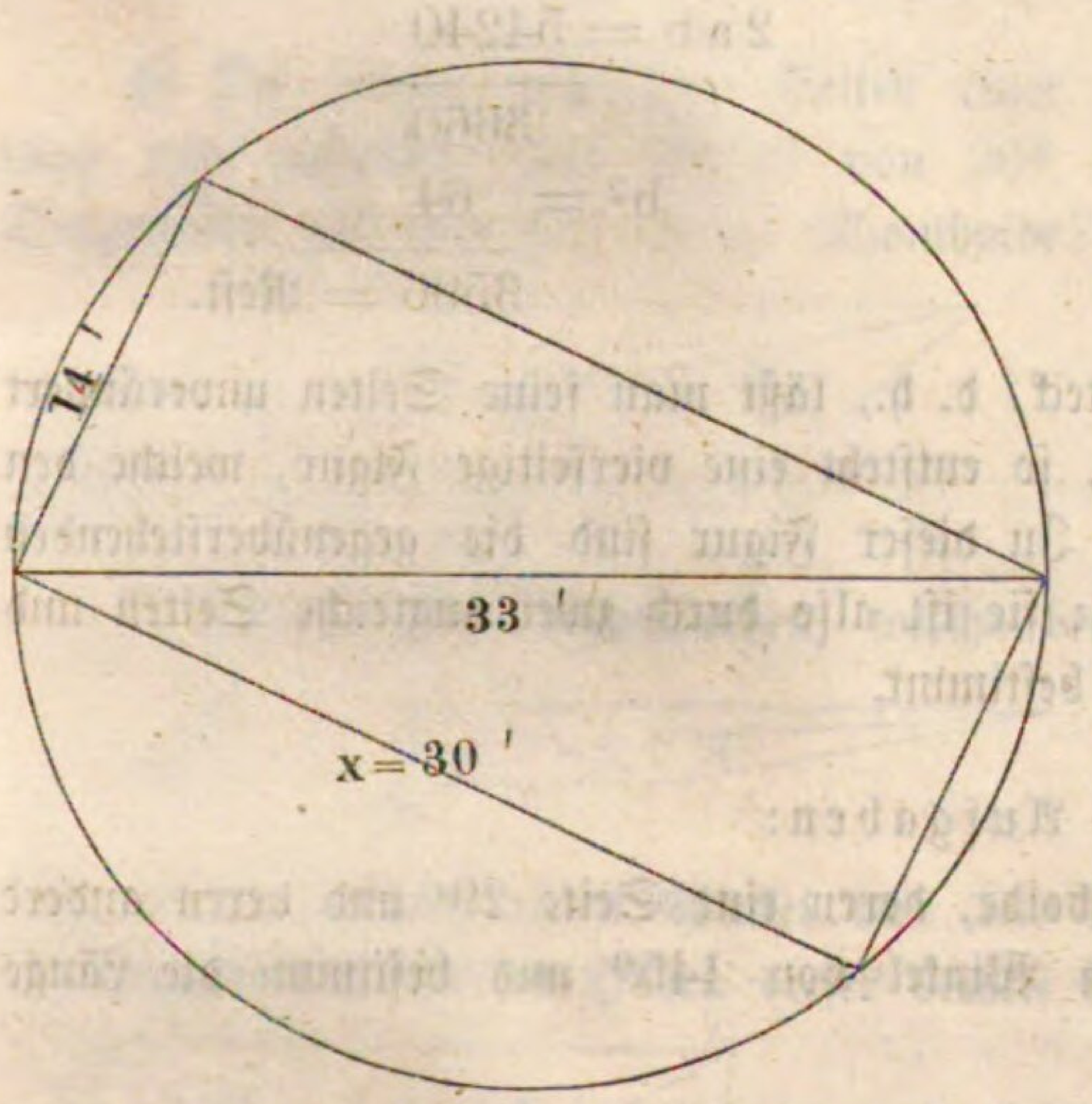
2) Construire ein Rechteck, dessen längere Seite 25′ 9″ und dessen kürzere Seite 10′ 11″ lang ist, und bestimme die Länge der Diagonale durch Zeichnung und Rechnung!

Rechnung:

$$x^2 = (309'')^2 + (131'')^2$$
$$x = \sqrt{(309^2 + 131^2)}$$
$$= \sqrt{(95481 + 17161)}$$
$$= \sqrt{112642} = 335{,}6'' = 27' \ 11{,}6''.$$



3) Die Diagonale eines Rechtecks ist 33′ lang, die Höhe des Rechtecks soll 14′ sein; finde durch Zeichnung und Rechnung, wie lang die Grundlinie dieser Figur ist!



Durch Rechnung:

$$x^2 = 33^2 - 14^2$$

$$x = \sqrt{33^2 - 14^2}$$

$$= \sqrt{1089 - 196}$$

$$= \sqrt{893} = 29{,}8'$$

$$a^2 = 400$$

$$2a = 40 : 493$$

$$2ab = 360$$

$$133$$

$$b^2 = 81$$

$$2a = 580 : 5200$$

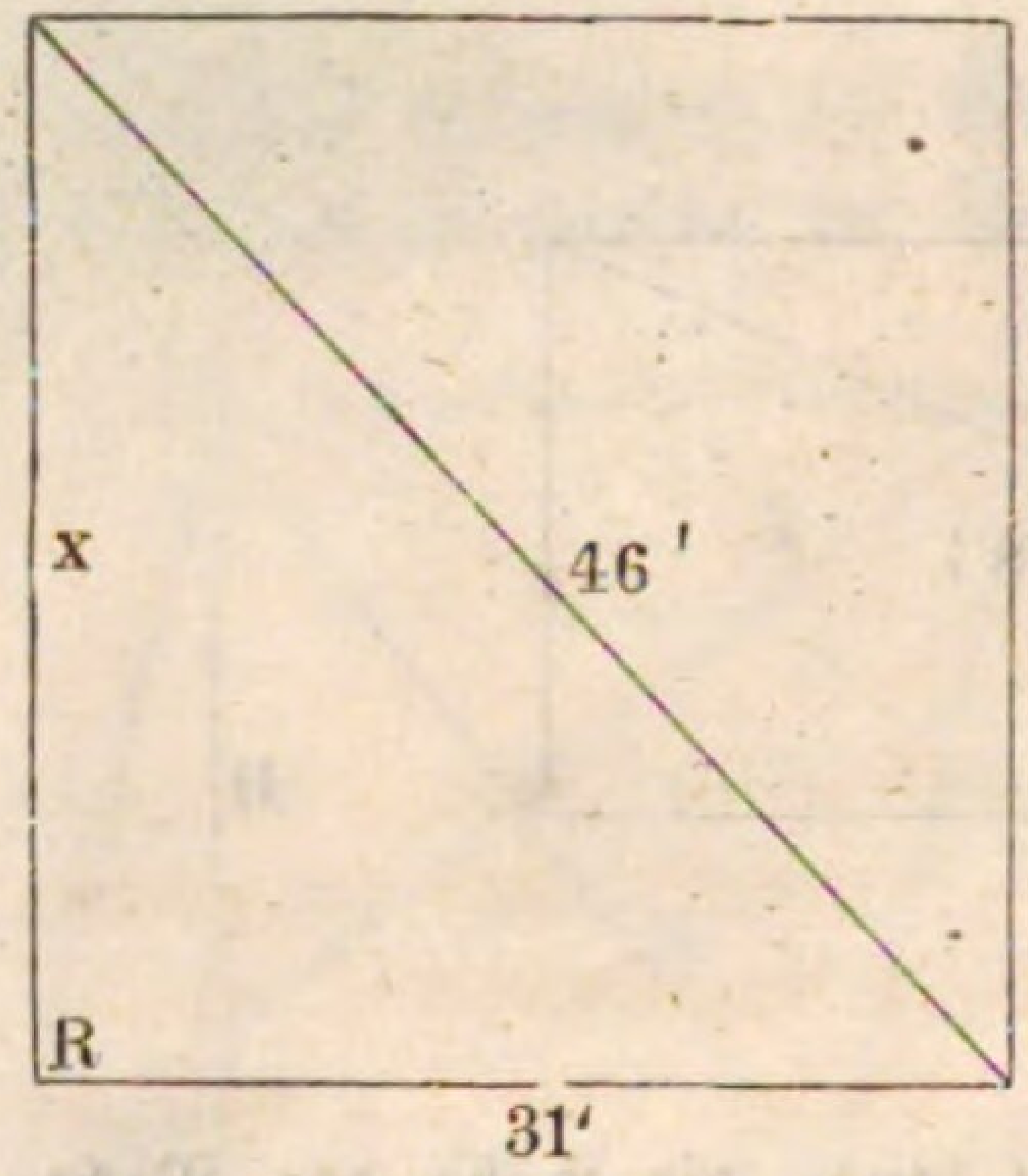
$$2ab = 4640$$

$$560$$

$$b^2 = 64$$

496 = Rest.

4) Die Diagonale eines Rechtecks ist 46′ lang, die eine Seite = 31′; finde durch Zeichnung und Rechnung die Länge der andern Seite!



x = 34'

Durch Rechnung:

$x^2 = 46^2 - 31^2$

$x = \sqrt{46^2 - 31^2} = \sqrt{2116 - 961}$

$= \sqrt{1155} = 33{,}98'$

$a^2 = 900$

$2a = 60 : 255$

$2ab = 180$

75

$b^2 = 9$

$2a = 660 : 6600$

$2ab = 5940$

660

$b^2 = 81$

$2a = 6780 : 57900$

$2ab = 54240$

3660

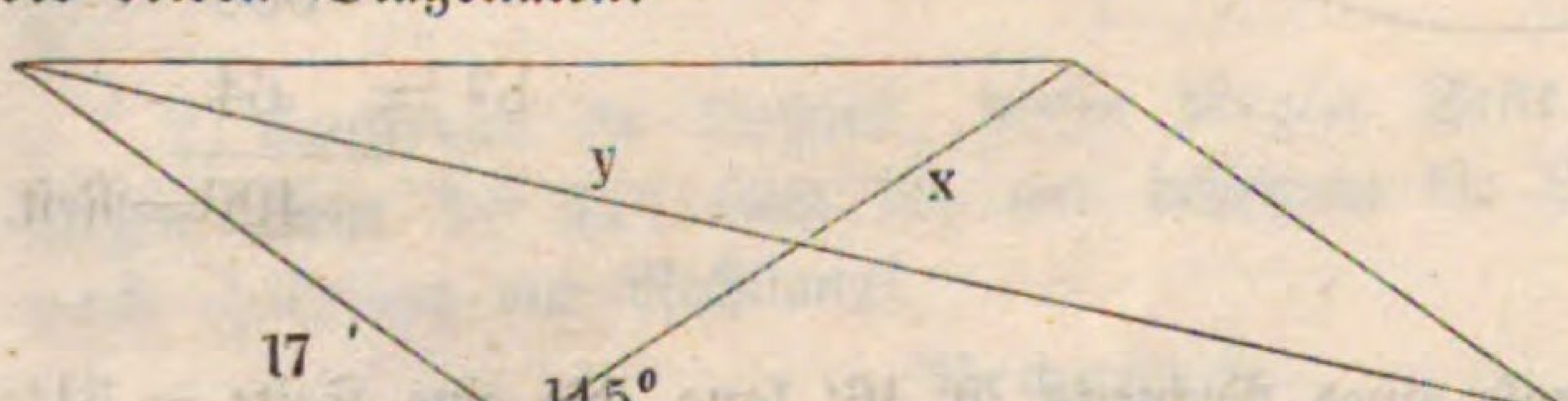
$b^2 = 64$

$3596 =$ Rest.

Verschiebt man das Rechteck, d. h., läßt man seine Seiten unverändert und verändert nur die Winkel, so entsteht eine vierseitige Figur, welche den Namen Rhomboide hat. In dieser Figur sind die gegenüberstehenden Seiten und Winkel gleich groß; sie ist also durch zwei ungleiche Seiten und durch einen Winkel vollständig bestimmt.

Aufgaben:

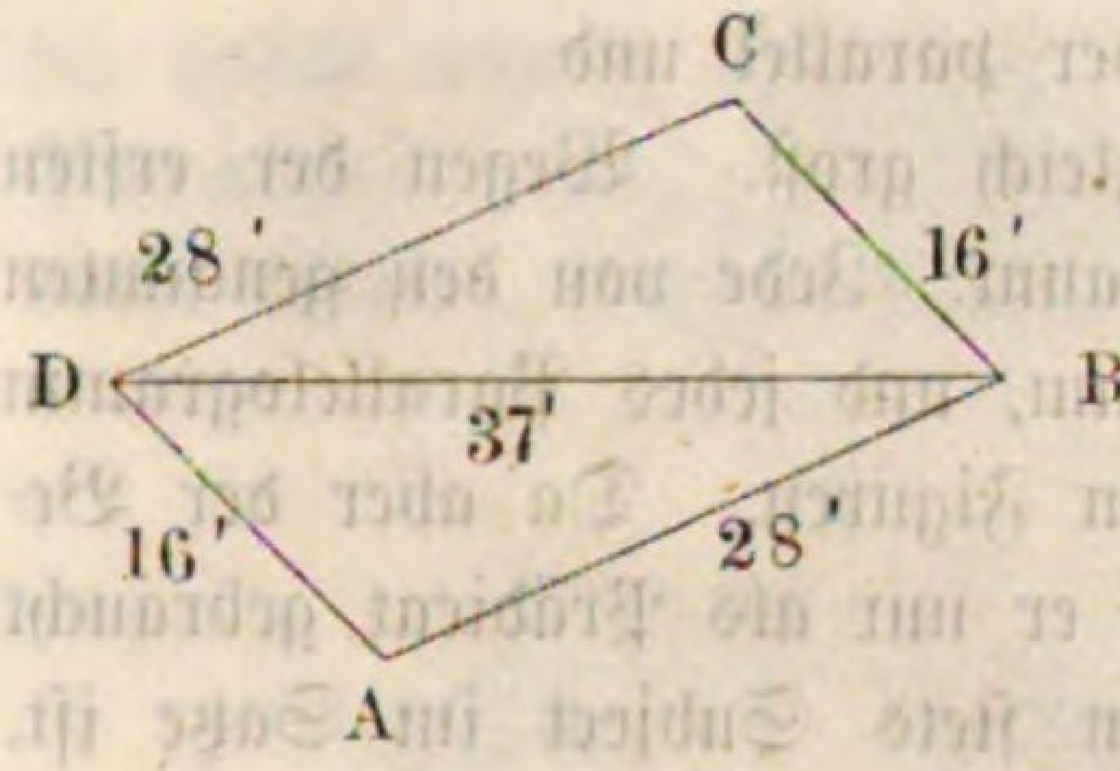
1) Construire eine Rhomboide, deren eine Seite 29' und deren andere Seite 17' lang ist mit einem Winkel von 145⁰ und bestimme die Länge der beiden Diagonalen!



Diagonale x = 18'

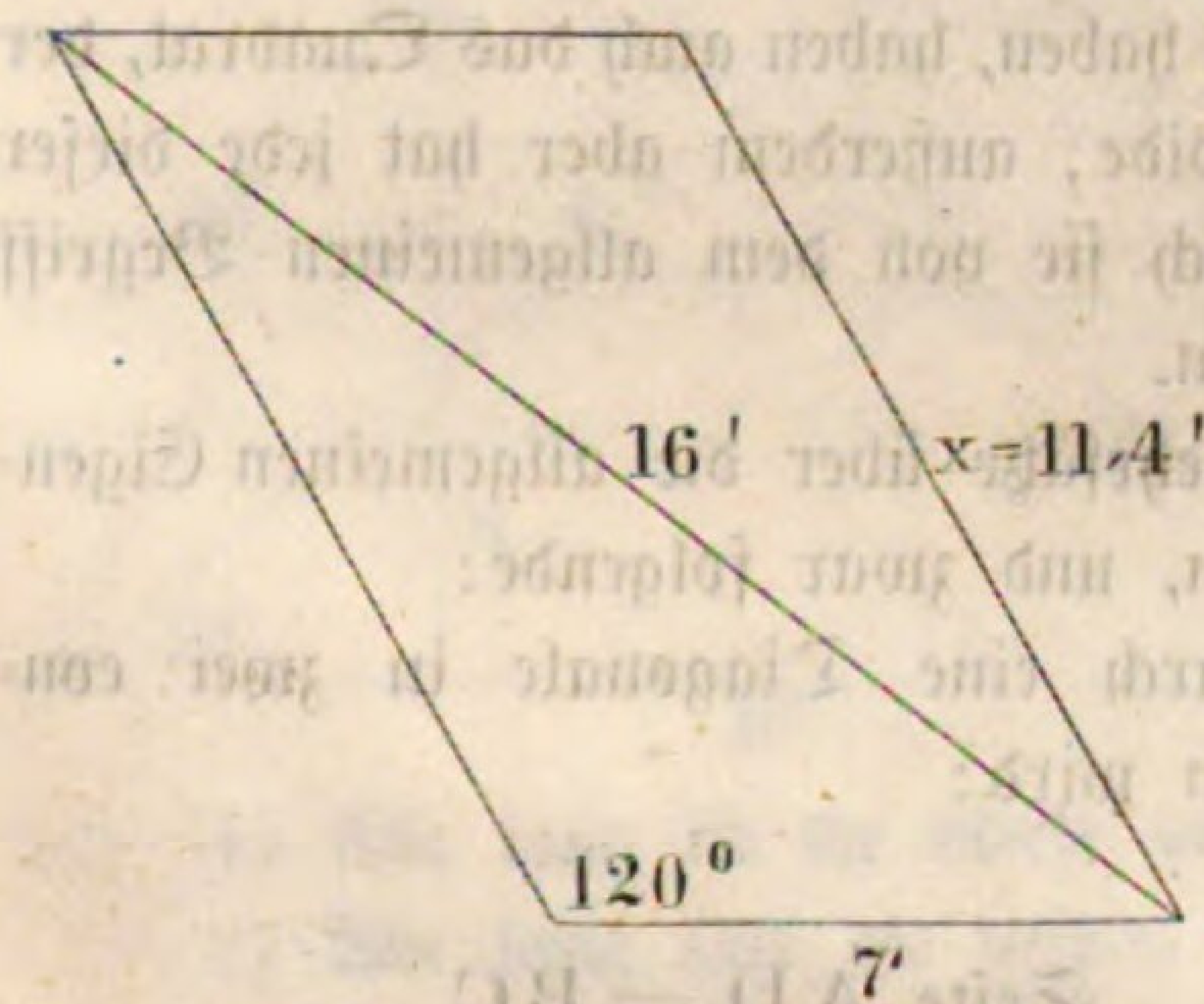
" y = 44'

2) Die beiden ungleichen Seiten einer Rhomboide sind 28' und 16' lang, die Diagonale ist 37' lang; wie sieht diese Figur in der Zeichnung aus, und wie groß sind ihre Winkel?



Winkel A = 110⁰ (gemessen)
" B = 70⁰
" C = 110⁰
" D = 70⁰

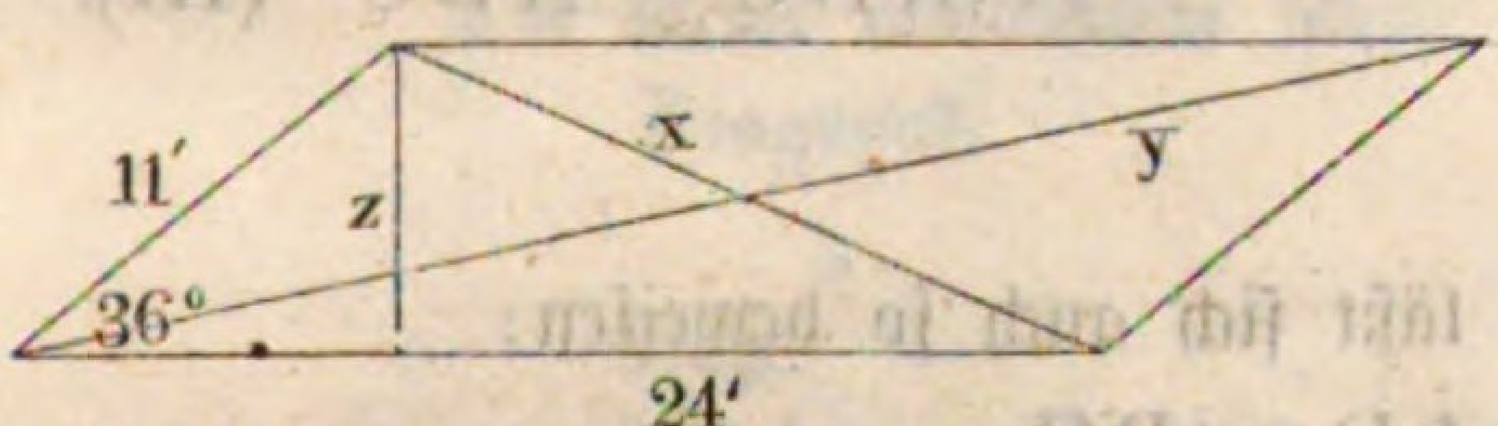
Summa = 360⁰



3) Die Diagonale einer Rhomboide ist 16′ lang, der gegenüberstehende Winkel 120⁰ groß, die eine Seite 7′ lang; wie lang ist die zweite unbekannte Seite?

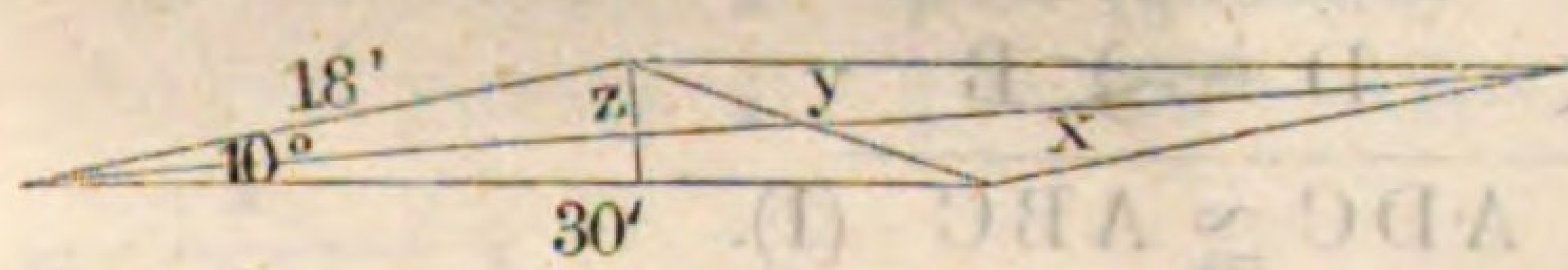
x = 11,4′.

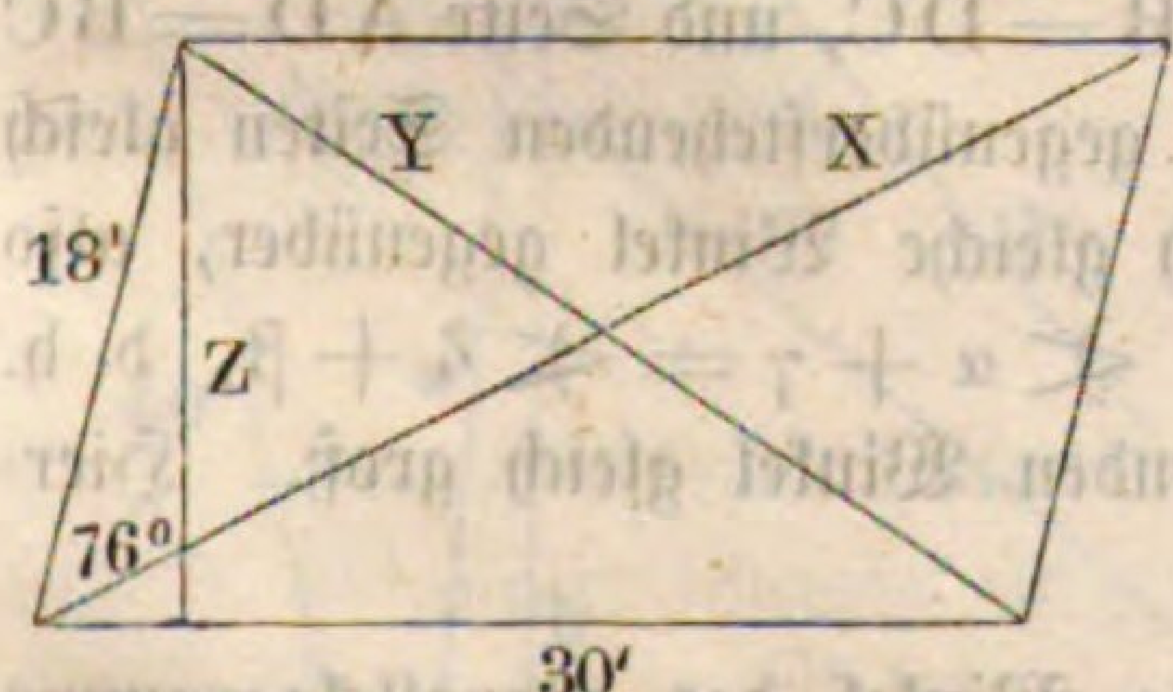
4) Die beiden ungleichen Seiten einer Rhomboide sind 24 und 11′ lang und schließen einen Winkel von 36⁰ ein; wie lang sind die beiden Diagonalen und wie hoch ist die Rhomboide?



Diagonale x = 16,2′
" y = 33,5′
Höhe z = 6,5′

5) Zeichne zwei Rhomboiden, welche beide zwei Seiten von 18′ und 30′ Länge haben; in der einen Rhomboide aber sollen diese beiden Seiten einen Winkel von 10⁰, in der andern einen Winkel von 76⁰ einschließen; wie verhalten sich die Diagonalen und die Höhen dieser beiden Rhomboiden zu einander?





Diagonale x : X = 48′ : 38,5′
" y : Y = 12,2′ : 30,8′
Höhe z : Z = 3,6′ : 17,4′

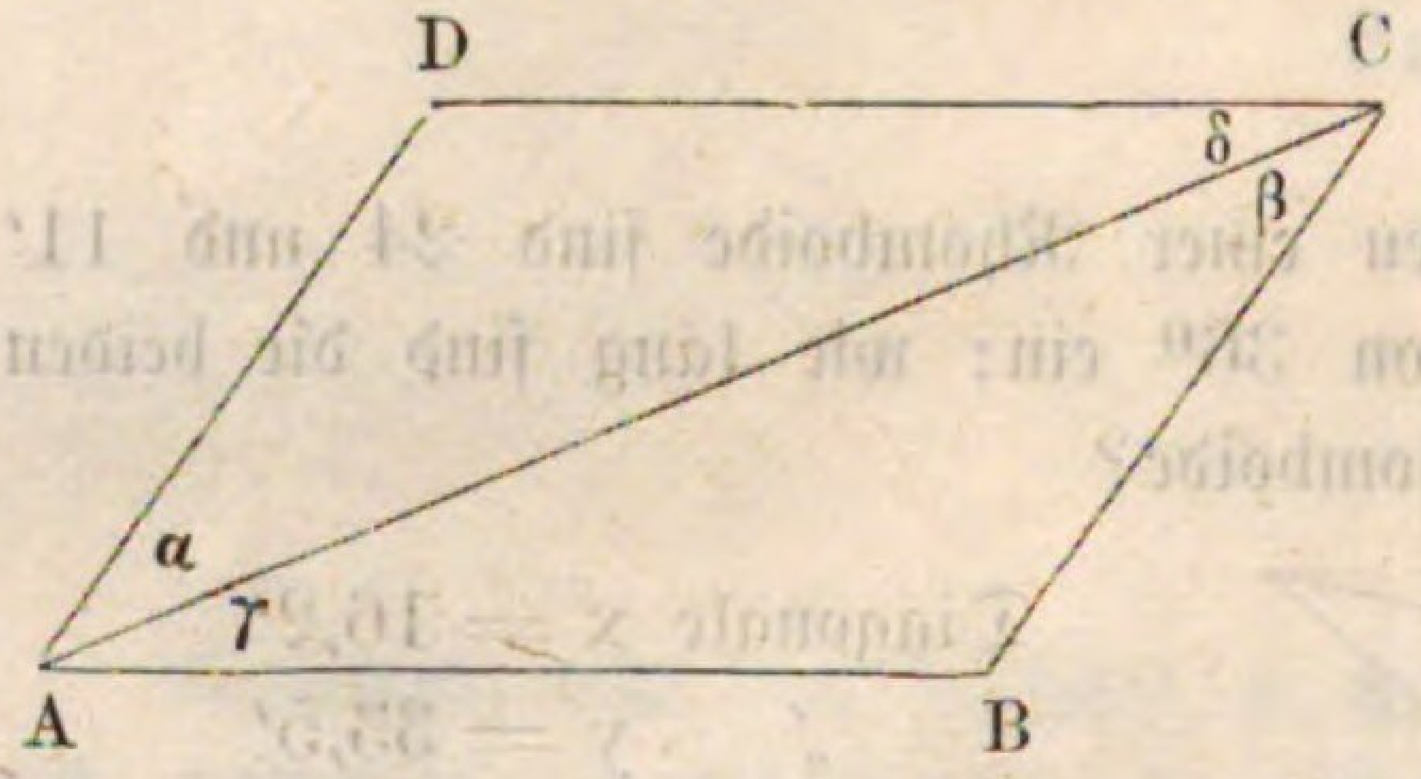
Die vier eben behandelten vierseitigen Figuren, nämlich das Quadrat, der Rhombus, das Rechteck und die Rhomboide haben zwei gemeinschaftliche Eigenschaften; es laufen nämlich

1) ihre gegenüberstehenden Seiten einander parallel und

2) sind ihre gegenüberstehenden Winkel gleich groß. Wegen der ersten Eigenschaft hat man sie Parallelogramme genannt. Jede von den genannten vierseitigen Figuren ist also ein Parallelogramm, und jedes Parallelogramm ist irgend eine von den genannten vierseitigen Figuren. Da aber der Begriff Parallelogramm der weiteste ist, so kann er nur als Prädicat gebraucht werden, während eine der genannten Figuren stets Subject im Satze ist. Alle Eigenschaften, welche Parallelogramme haben, haben auch das Quadrat, der Rhombus, das Rechteck und die Rhomboide; außerdem aber hat jede dieser Figuren noch besondere Merkmale, wodurch sie von dem allgemeinen Begriff Parallelogramm unterschieden werden kann.

Nunmehr sind zunächst noch einige Lehrsätze über die allgemeinen Eigenschaften der Parallelogramme beizubringen, und zwar folgende:

1) Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt, was so bewiesen wird:



Seite AD = BC
„ DC = AB
„ AC = AC

$\triangle$ ADC $\cong$ ABC (III).

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich auch so beweisen:

Seite AD = BC
„ DC = AB
$\sphericalangle$ D = $\sphericalangle$ B

$\triangle$ ADC $\cong$ ABC (I).

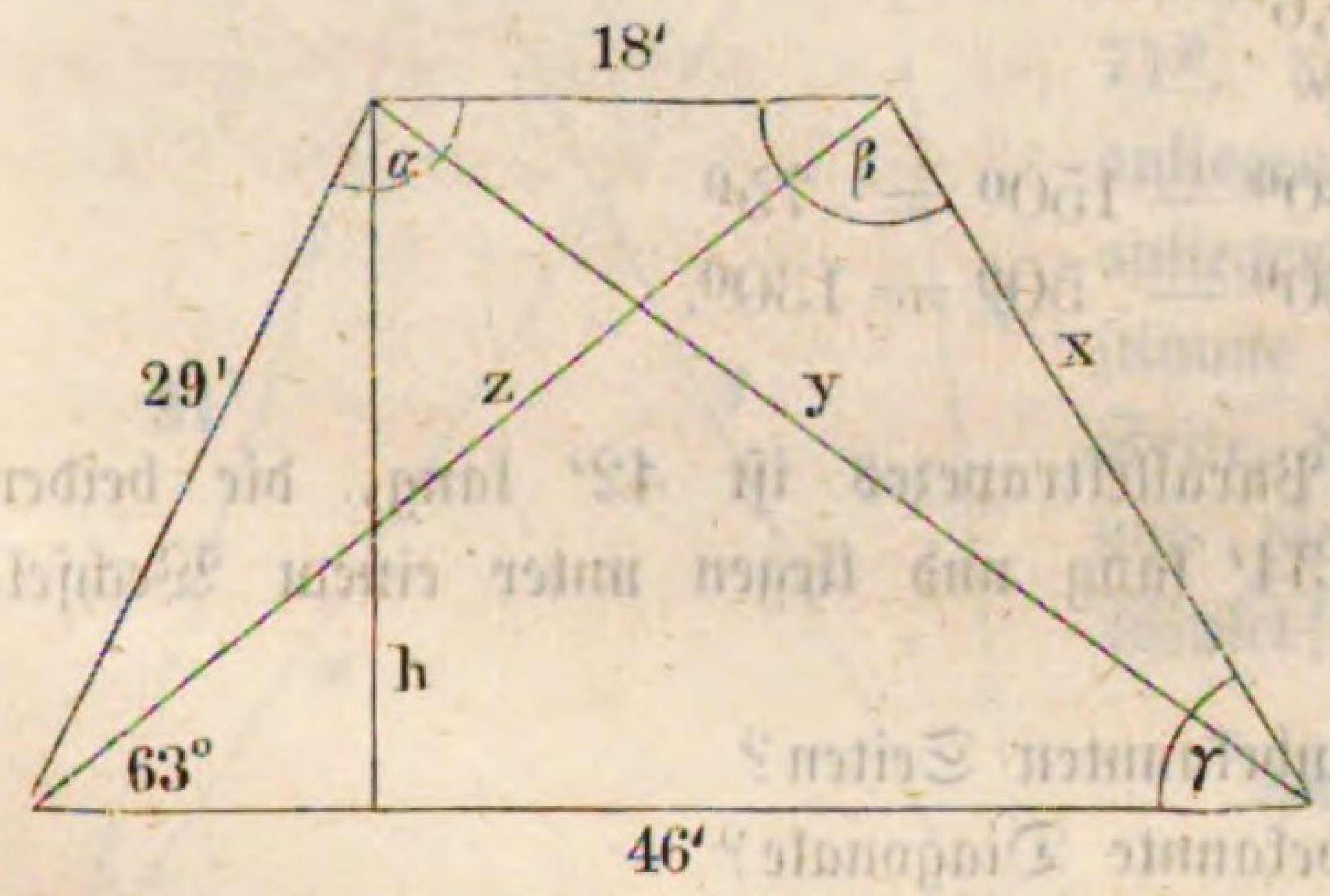
2) In congruenten Dreiecken aber liegen den gleichen Seiten gleiche Winkel und den gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber; nun war aber $\sphericalangle\,\alpha = \beta$ und $\sphericalangle\,\gamma = \delta$, also muß Seite AB = DC, und Seite AD = BC sein, d. h. in Parallelogrammen sind die gegenüberstehenden Seiten gleich lang. Den gleichen Seiten liegen aber auch gleiche Winkel gegenüber, also ist $\sphericalangle$ D = $\sphericalangle$ B, $\sphericalangle$ A = $\sphericalangle$ C, denn $\sphericalangle\,\alpha + \gamma = \sphericalangle\,\delta + \beta$, d. h. in Parallelogrammen sind die gegenüberstehenden Winkel gleich groß. Hieraus folgt

3) daß durch einen einzigen Winkel alle Winkel des Parallelogramms bestimmt sind, weil diese zusammen vier rechte sind, und daß Parallelen zwischen Parallelen einander gleich sind.

Wenn in einer vierseitigen Figur zwei Seiten einander parallel laufen,

die beiden andern aber nicht parallel sind, so erhält die Figur den Namen Paralleltrapez; eine solche vierseitige Figur ist durch drei Seiten und einen Winkel, oder durch zwei Seiten und zwei Winkel vollständig bestimmt.

Aufgaben:

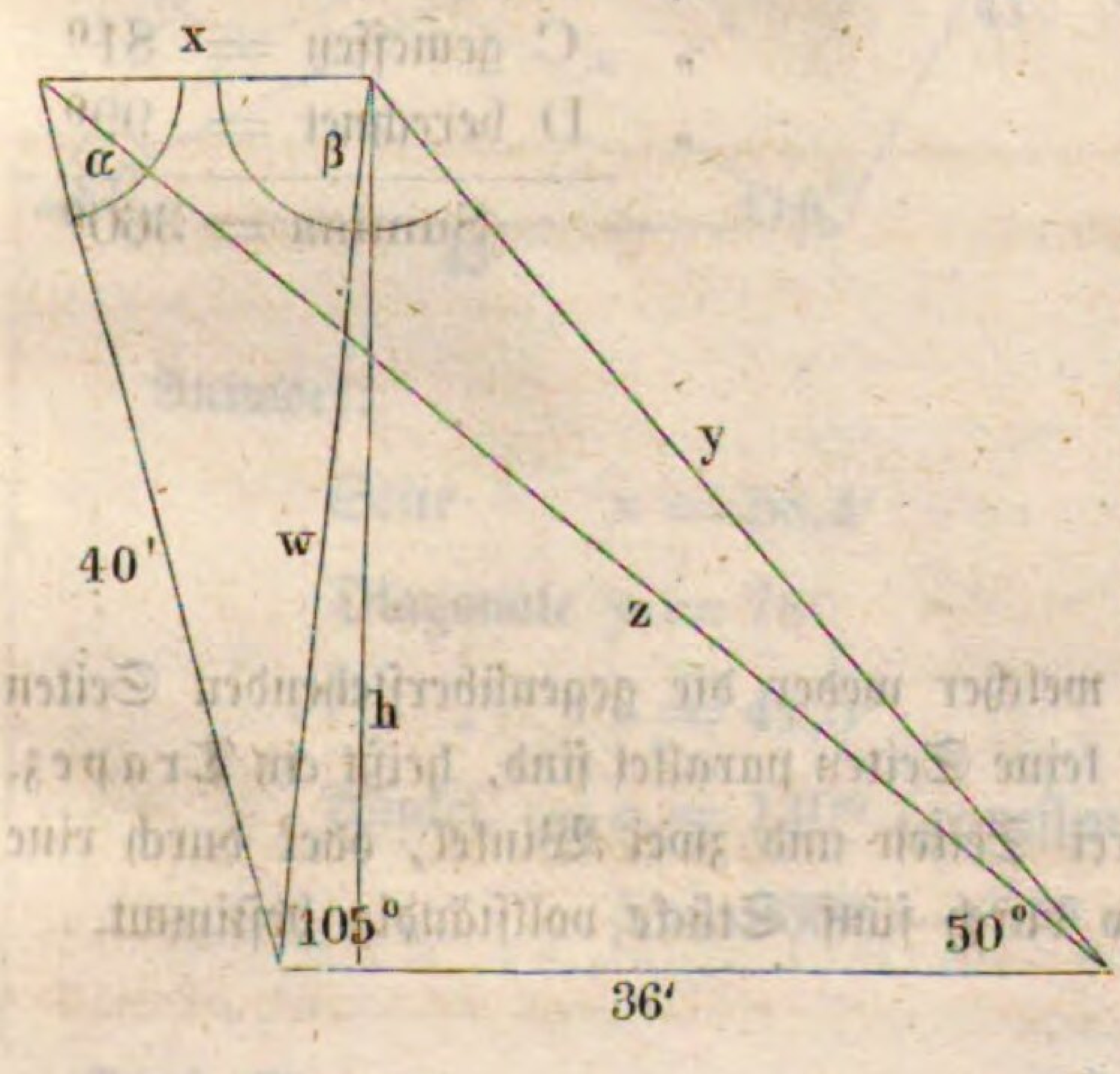


1) Construire ein Paralleltrapez, in welchem die Grundlinie 46′, die anliegende Seite 29′ lang und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel 63° groß ist, die gegenüberstehende parallele Seite ist 18′ lang; es wird gefragt:

1) Wie lang ist die vierte unbekannte Seite?
2) Wie lang sind die beiden Diagonalen?
3) Wie lang ist das Loth zwischen den parallelen Seiten?
4) Wie groß sind die drei unbekannten Winkel?

Antwort:

Die vierte unbekannte Seite		$x = 30'$
Diagonale		$y = 42'$
"		$z = 40{,}2'$
Höhe		$h = 26'$
Winkel	$\alpha = 180^0 - 63^0$	$= 117^0$
"	$\beta =$ (gemessen)	$= 120^0$
"	$\gamma = 180^0 - 120^0$	$= 60^0$.



2) Die eine parallele Seite eines Paralleltrapezes von 36′ lang schließt mit der anliegenden, nicht parallelen Seite von 40′ lang einen Winkel von 105° ein; der andere, der parallelen Seite anliegende Winkel ist 50° groß; wie lang sind die beiden unbekannten Seiten, wie lang sind die beiden Diagonalen, wie lang ist das Perpendikel und wie groß sind die zwei unbekannten Winkel?

Antwort:

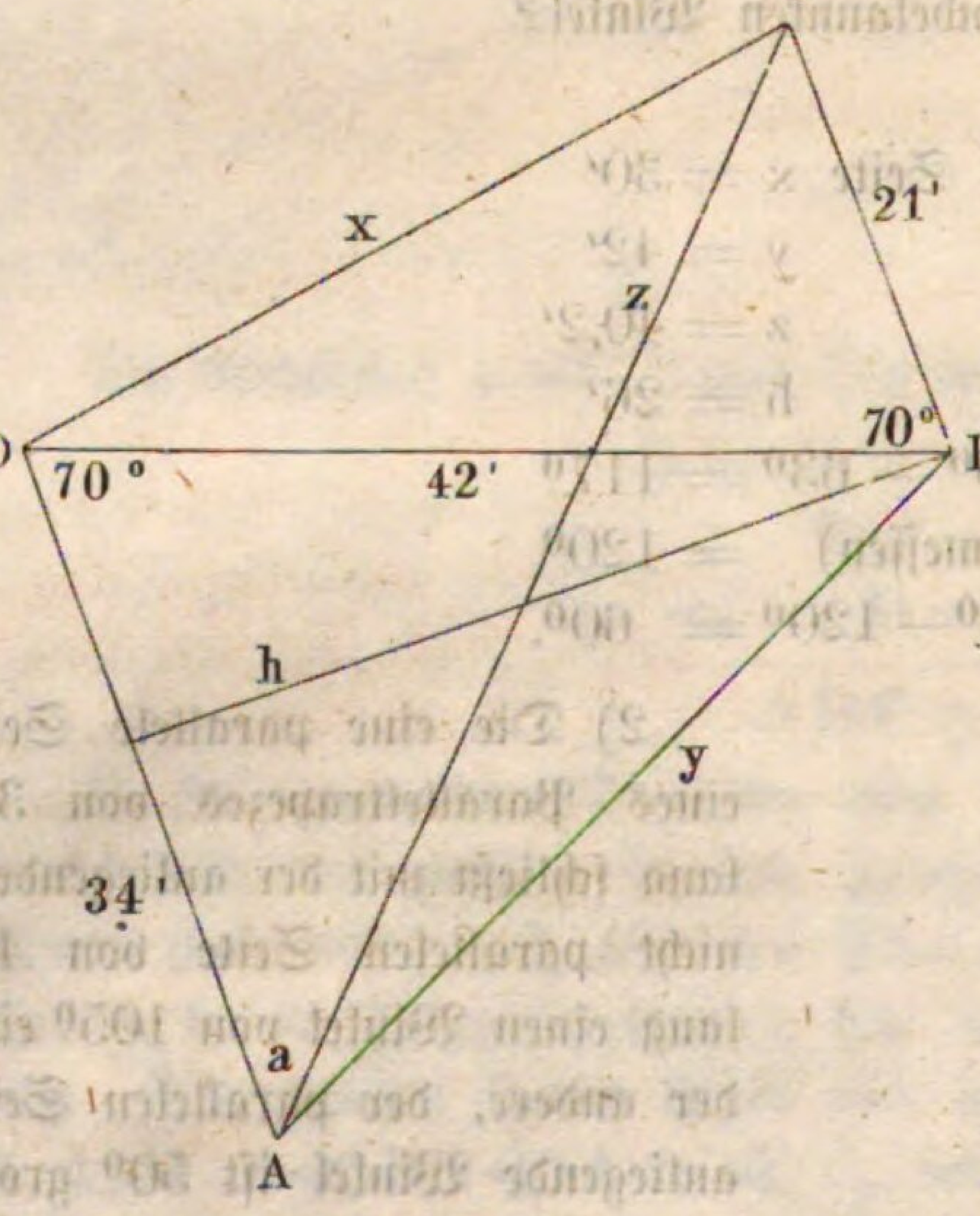
Seite $x = 14'$
" $y = 50'$
Diagonale $z = 61'$
" $w = 38{,}6'$
Höhe $h = 38'$
∢ $\alpha = 180^0 - 150^0 = 75^0$
∢ $\beta = 180^0 - 50^0 = 130^0$.

3) Die Diagonale eines Paralleltrapezes ist 42′ lang, die beiden parallelen Seiten sind 21′ und 34′ lang und liegen unter einem Wechselwinkel von 70° an.

Wie lang sind die beiden unbekannten Seiten?

Wie lang ist die zweite unbekannte Diagonale?

Wie lang ist das Perpendikel zwischen den Parallelen und wie groß sind die unbekannten Winkel?



Antwort:

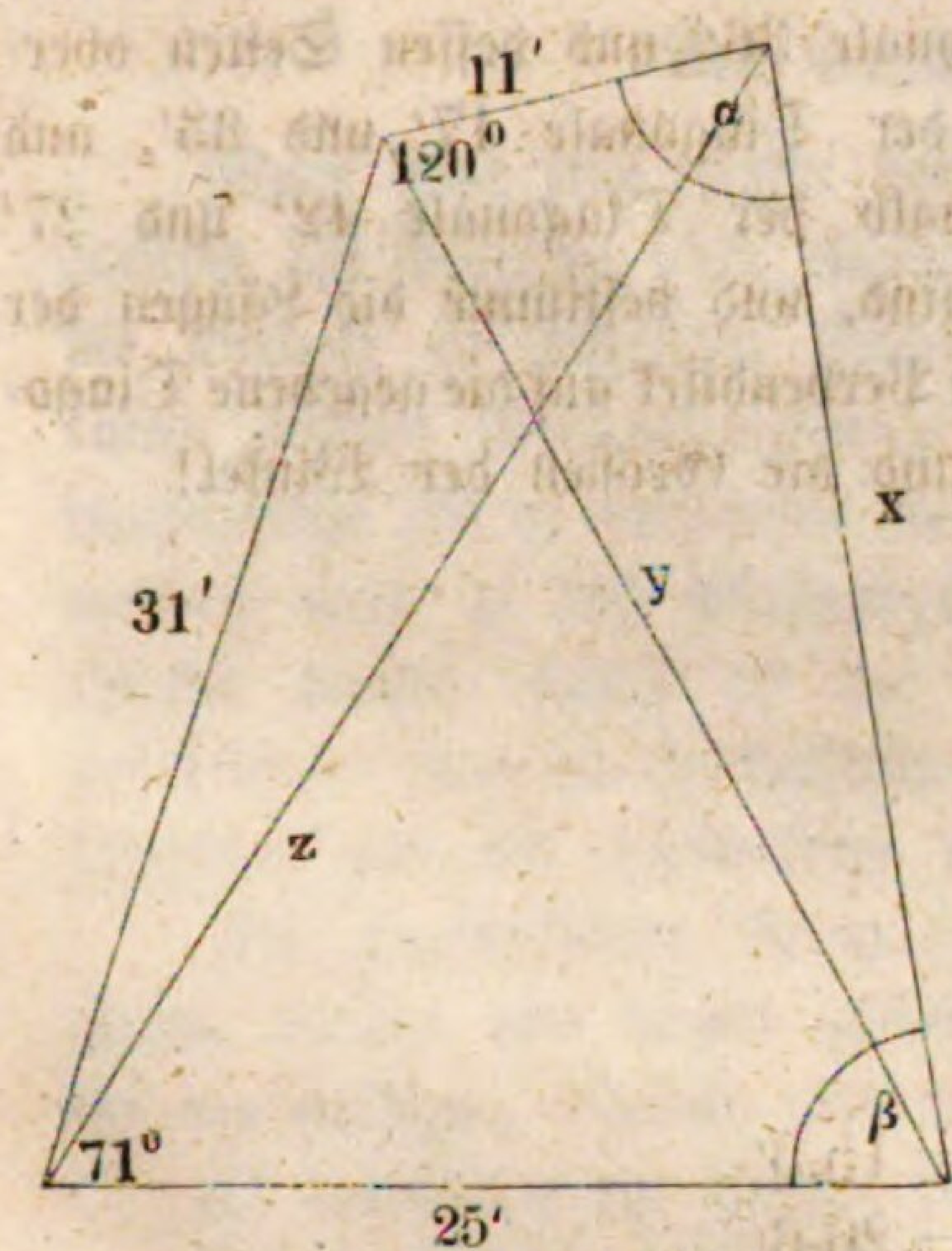
Seite $x = 39{,}6'$
" $y = 44'$
Diagonale $z = 56{,}4'$
Höhe $h = 39{,}8'$

Winkel A gemessen $= 64^0$
" B berechnet $= 116^0$
" C gemessen $= 81^0$
" D berechnet $= 99^0$

Summa $= 360^0$

Eine vierseitige Figur, in welcher weder die gegenüberstehenden Seiten noch Winkel einander gleich und keine Seiten parallel sind, heißt ein **Trapez**. Eine solche Figur wird durch drei Seiten und zwei Winkel, oder durch eine Diagonale und vier Seiten, also durch fünf Stücke vollständig bestimmt.

Aufgaben:



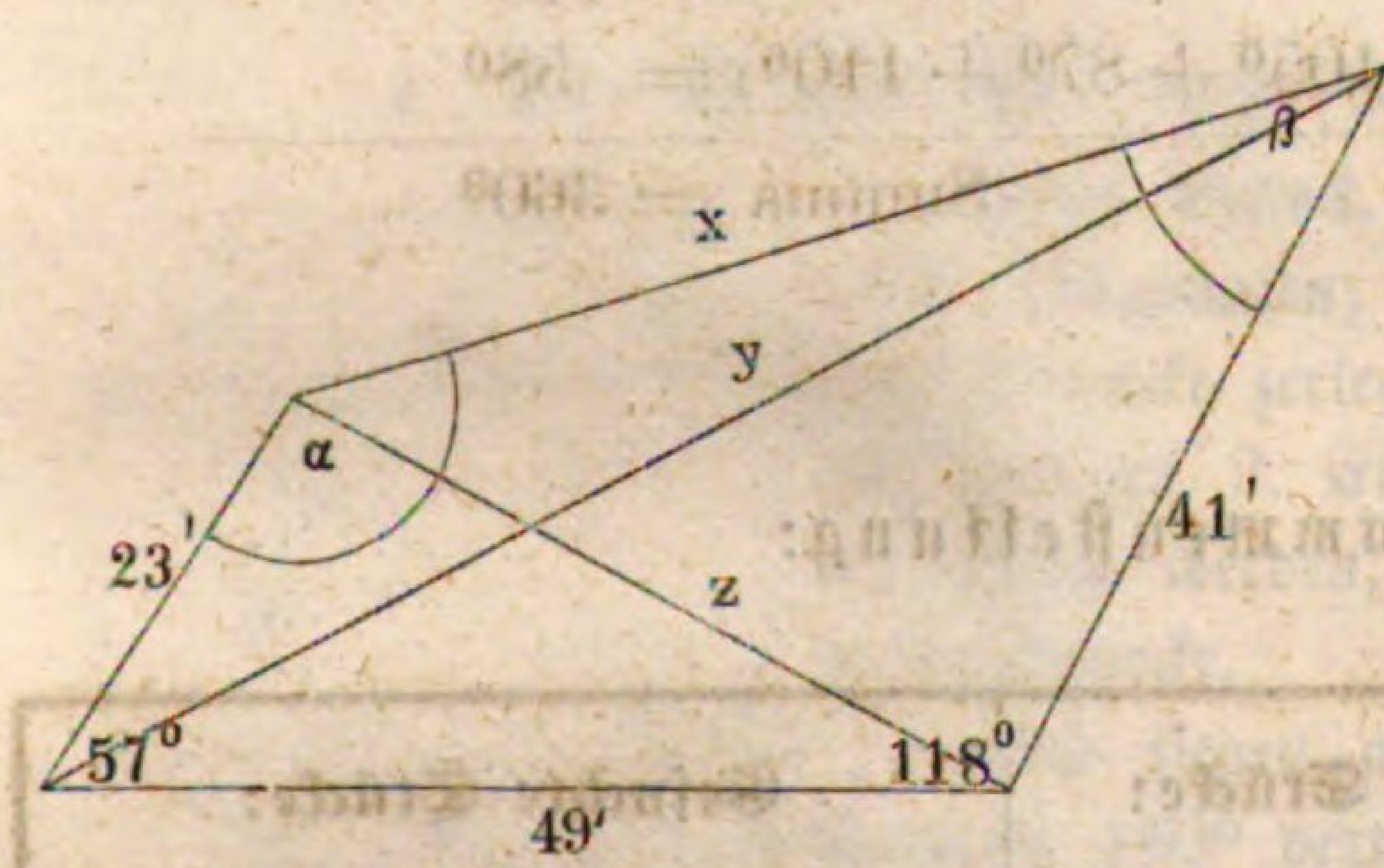
1) Construire ein Trapez, dessen Grundlinie 25', der anliegende Winkel 71°, der zweite Schenkel 31', der ihm anliegende Winkel 120° und die dritte, ihm anliegende Seite 11' lang ist, und bestimme die Länge der vierten unbekannten Seite, die Längen der beiden Diagonalen und die Größe der beiden unbekannten Winkel!

Antwort:

Seite	$x = 32'$
Diagonale	$y = 33{,}2'$
"	$z = 37{,}6'$

$\sphericalangle\, \alpha$ gemessen $= 86^0$

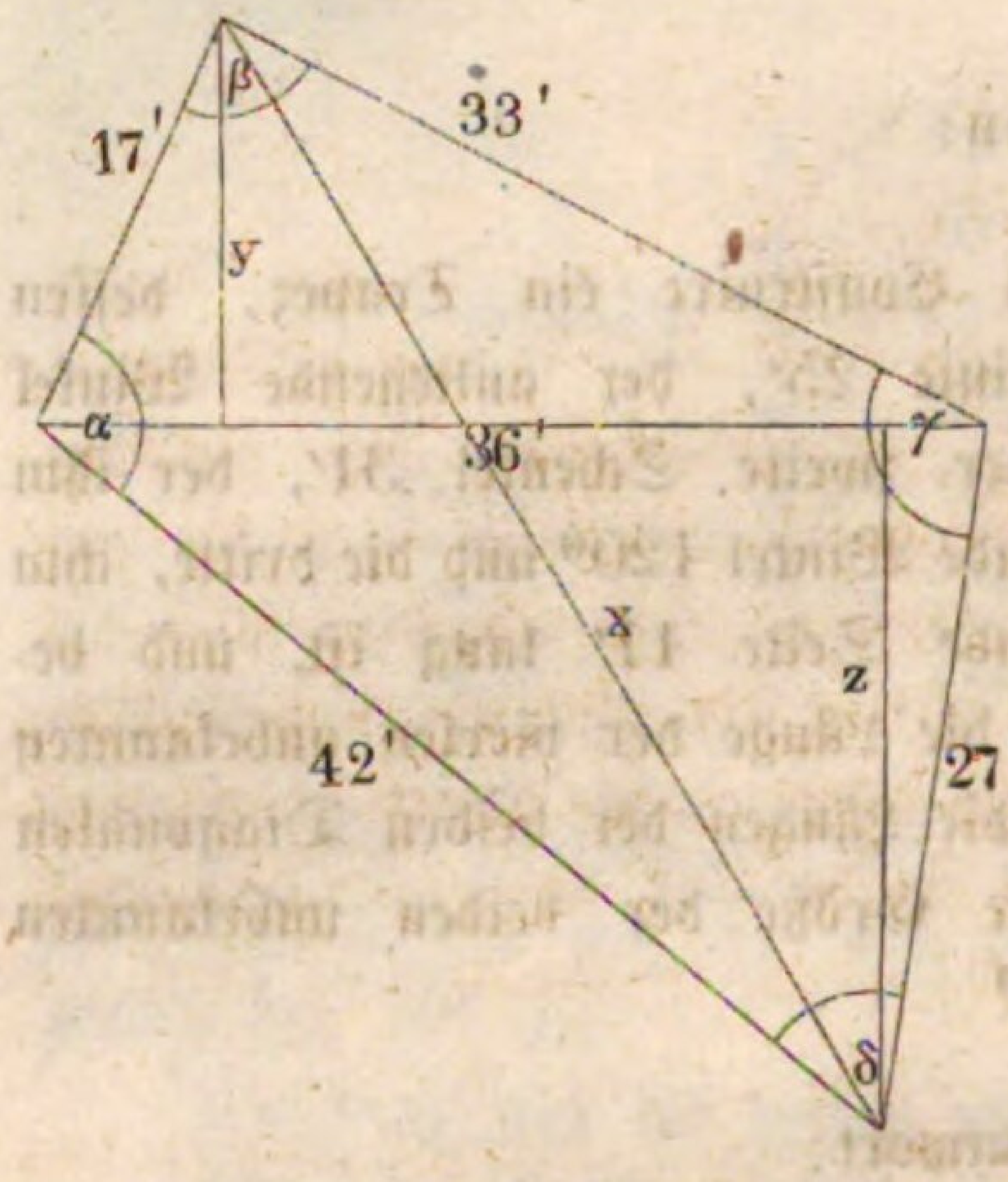
$\sphericalangle\, \beta = 360^0 - (71^0 + 120^0 + 86^0) = 83^0.$



2) Die Grundlinie eines Trapezes ist 49' lang, ihr liegt ein Winkel von 57° mit einem Schenkel von 23', und ein Winkel von 118° mit einem Schenkel von 41' lang an; wie lang ist die vierte unbekannte Seite, wie lang sind die beiden Diagonalen und wie groß sind die beiden unbekannten Winkel?

Antwort:

Seite	$x = 58{,}4'$
Diagonale	$y = 78'$
"	$z = 41{,}5'$
Winkel	$\alpha = 140^0$ (gemessen)
"	$\beta = 360^0 - (57^0 + 118^0 + 140^0) = 45^0.$



3) Construire ein Trapez, dessen Diagonale 36′ und dessen Seiten oberhalb der Diagonale 17′ und 33′, und unterhalb der Diagonale 42′ und 27′ lang sind, und bestimme die Längen der beiden Perpendikel auf die gegebene Diagonale und die Größen der Winkel!

Antwort:

Perpendikel y = 15,5′
" z = 26,6′
Diagonale x = 49,2′

$\sphericalangle$ α gemessen = 105°
$\sphericalangle$ β " = 87°
$\sphericalangle$ γ " = 110°
$\sphericalangle$ δ = 360° — (105° + 87° + 110°) = 58°

Summa = 360°

Zusammenstellung:

	Gegebene Stücke:	Gesuchte Stücke:
I. **Quadrat**	1 S. 1 D. D — S.	3 S., 4 W., 1 Diagonale
II. **Rhombus**	1 S. und 1 W.	3 S., 3 W., 2 Diagonalen
III. **Rechteck**	S. und s.	2 S., 4 W., Diagonale
IV. **Rhomboide**	S. und s. und 1 W.	2 S., 3 W., 2 Diagonalen
V. **Paralleltrapez**	3 S. und 1 W. oder 2 S. und 2 W.	1 S. 3 W. 2 D., oder 2 S. 2 W. und 1 D.
VI. **Trapez**	3 S. und 2 W. oder 4 S. und 1 D.	1 S. 2 W. 2 D., oder 4 W. und 1 D.

§. 6.

Von der Congruenz der Vielecke.

Wenn man eine Fläche durch mehr als vier gerade Linien begrenzt, so entsteht ein Polygon oder Vieleck. Nach der Anzahl der Seiten theilt man die Vielecke in Fünfecke, Sechsecke, Siebenecke, Zwölfecke u. s. w. Nach einem andern Eintheilungsgrunde theilt man die Vielecke in reguläre oder regelmäßige und in irreguläre oder unregelmäßige ein. Unter regulären Figuren versteht man in der Planimetrie solche, welche gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, sodaß in der ganzen Planimetrie nur drei regelmäßige geradlinige Figuren vorkommen, nämlich: Das gleichseitige Dreieck, das Quadrat und das regelmäßige Vieleck.

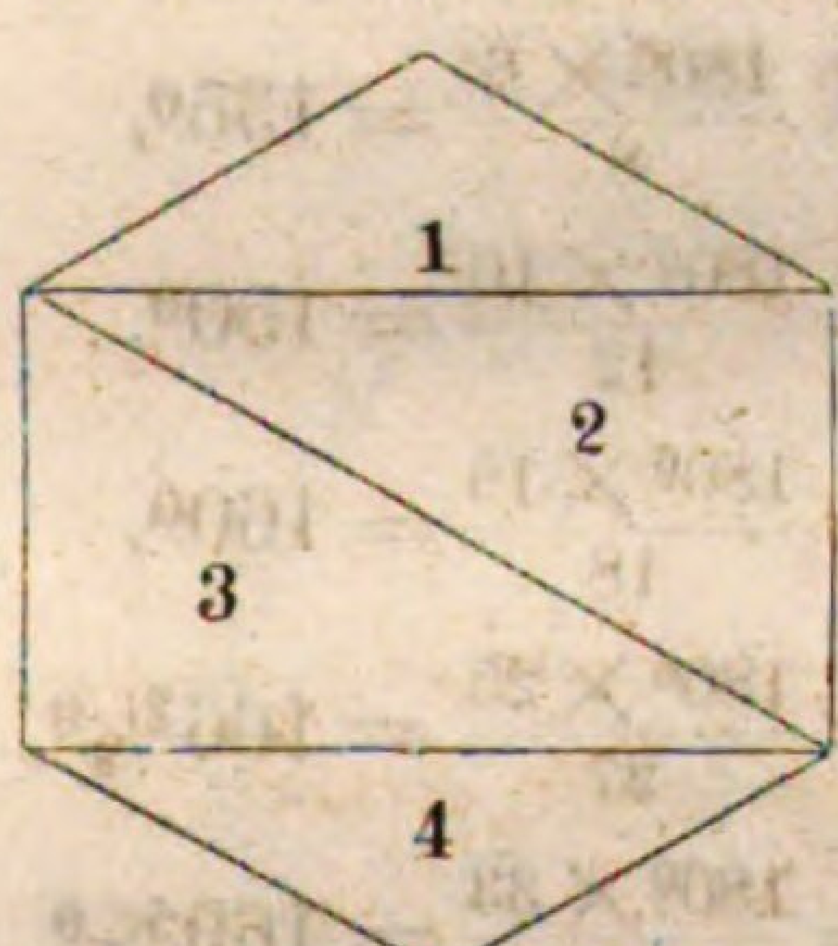
Ein regelmäßiges Polygon ist also ein solches Vieleck, welches lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel hat. Wir untersuchen also zuerst die regelmäßigen Vielecke und wollen

1) betrachten die Winkel derselben,

2) die Seiten derselben,

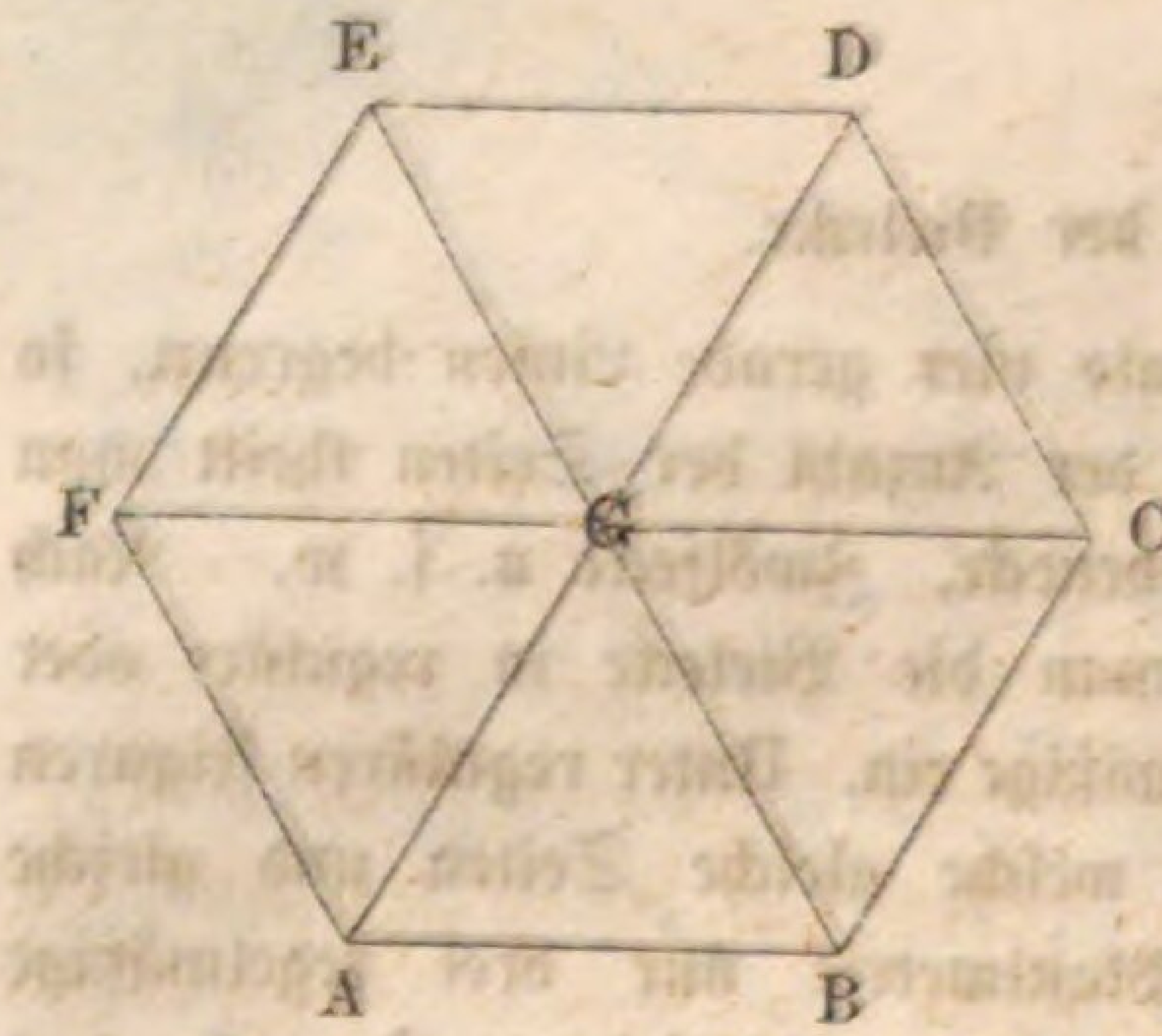
3) das Verhältniß der regelmäßigen Vielecke zum Kreise, woraus sich ganz von selbst ergeben wird, durch wie viele und durch welche Stücke ein reguläres Vieleck vollständig bestimmt ist.

I. Die Winkel der regelmäßigen Polygone.



Jedes Vieleck, also auch das regelmäßige, kann durch Diagonalen, welche sich nicht schneiden, in so viele Dreiecke zerlegt werden, wie die Figur Seiten hat, weniger 2. Ein n eck kann also in n — 2 Dreiecke zerlegt werden, z. B. das nebenstehende Sechseck in 4 Dreiecke.

Nun liegen aber in den Winkeln eines jeden Dreiecks 180⁰ vertheilt; also liegen in einem jeden n eck immer $180^0 \times (n - 2)$ vertheilt; man kann also jedesmal berechnen, wie viele Grade in den Winkeln eines Vielecks vertheilt liegen. Da nun aber in einem regulären Polygon alle Winkel gleich groß sind, so kann man nicht allein die Summe der Grade aller Winkel berechnen, sondern auch durch Rechnung finden, wie groß der einzelne Polygonwinkel jedes regelmäßigen Vielecks ist. Der Polygonwinkel eines regelmäßigen n ecks ist also $= \frac{180^0 \times (n-2)}{n}$, d. h., der Polygonwinkel des regelmäßigen Vielecks ist gleich 180⁰ mal die Anzahl der Seiten, weniger 2, dividirt durch die Anzahl der Seiten, was wir so beweisen wollen:



Jedes reguläre Vieleck kann von seinem Centrum aus in so viele congruente Dreiecke getheilt werden, wie die Figur Seiten hat. Ein Sechseck wird also auf diese Weise in sechs congruente Dreiecke getheilt, welche zusammen $6 \times 180^0 = 1080^0$ enthalten. Von diesen 1080 Graden aber liegen 360^0 um das Centrum G herum und nicht in den Polygonwinkeln A, B, C, D, E, F; diese 360^0 müssen also von 1080^0 abgezogen werden, sodaß wir erhalten $1080^0 - 360^0 = 720^0$, und da die sechs Polygonwinkel gleich groß sind, so ist jeder $= \frac{720^0}{6} = 120^0$ groß.

Uebungsaufgaben:

1) Wie groß ist der Polygonwinkel eines regelmäßigen Acht-, Zwölf-, Achtzehn-, Siebenundzwanzig-, Fünfunddreißig-, Sechsundvierzig-, Sechsundachtzig- und Neunundneunzigecks?

Antwort:

1) Der Polygonwinkel eines regulären 8ecks ist $= \frac{180^0 \times 6}{8} = 135^0$,

2) " " " " 12 " " $= \frac{180^0 \times 10}{12} = 150^0$,

3) " " " " 18 " " $= \frac{180^0 \times 16}{18} = 160^0$,

4) " " " " 27 " " $= \frac{180^0 \times 25}{27} = 166^2/_3{}^0$,

5) " " " " 35 " " $= \frac{180^0 \times 33}{35} = 169^5/_7{}^0$,

6) " " " " 46 " " $= \frac{180^0 \times 44}{46} = 172^4/_{23}{}^0$,

7) " " " " 86 " " $= \frac{180^0 \times 84}{86} = 175^{35}/_{43}{}^0$,

8) " " " " 99 " " $= \frac{180^0 \times 97}{99} = 176^4/_{11}{}^0$.

2) Wie groß ist der Centriwinkel eines regelmäßigen Neun-, Zwölf- und Achtzehnecks?

Antwort:

1) Der Centriwinkel des Neunecks ist $= \frac{360^0}{9} = 40^0$,

2) " " " Zwölfecks " $= \frac{360^0}{12} = 30^0$,

3) " " " Achtzehnecks " $= \frac{360^0}{18} = 20^0$.

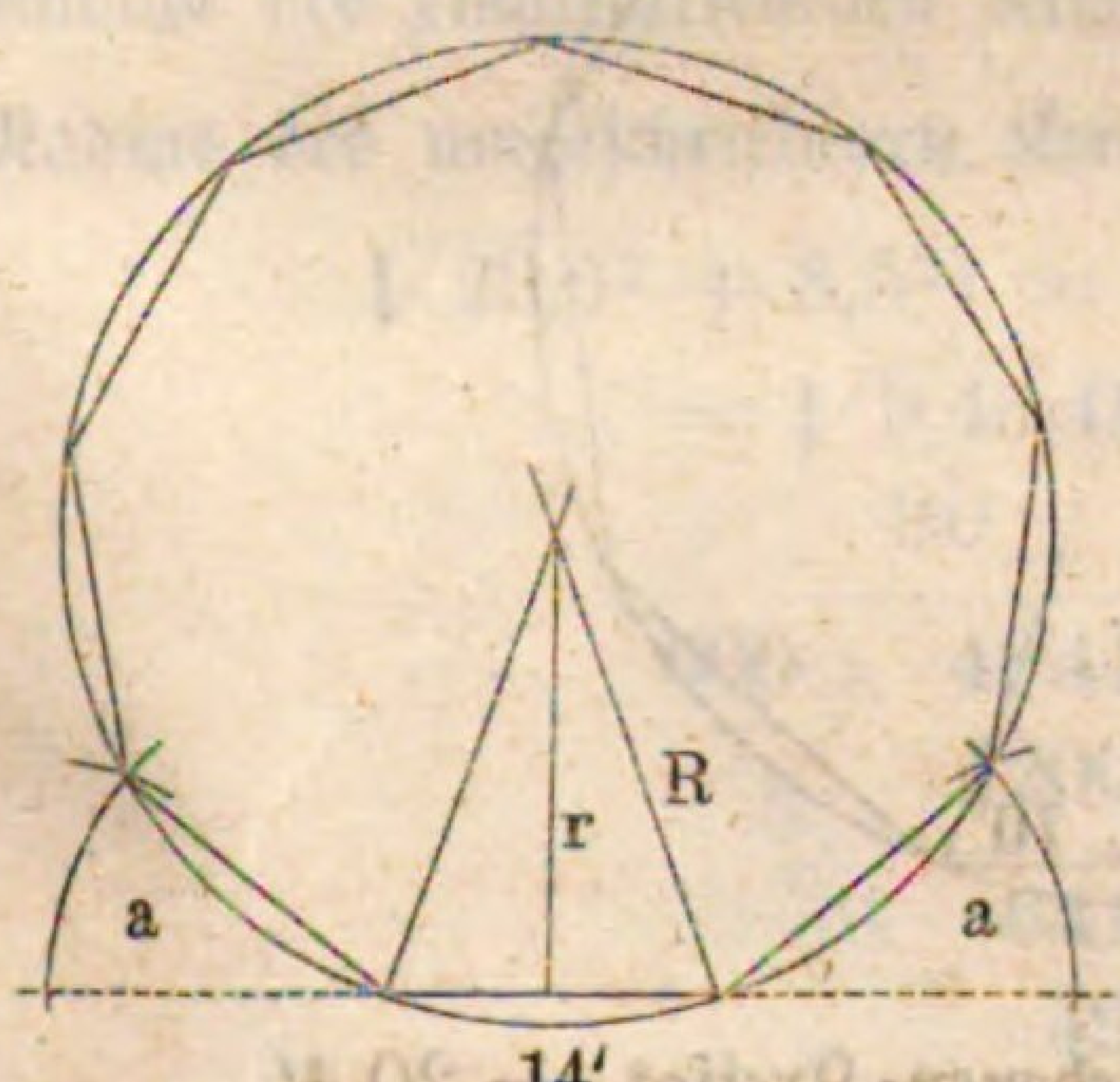
II. Die Seiten der regelmäßigen Polygone.

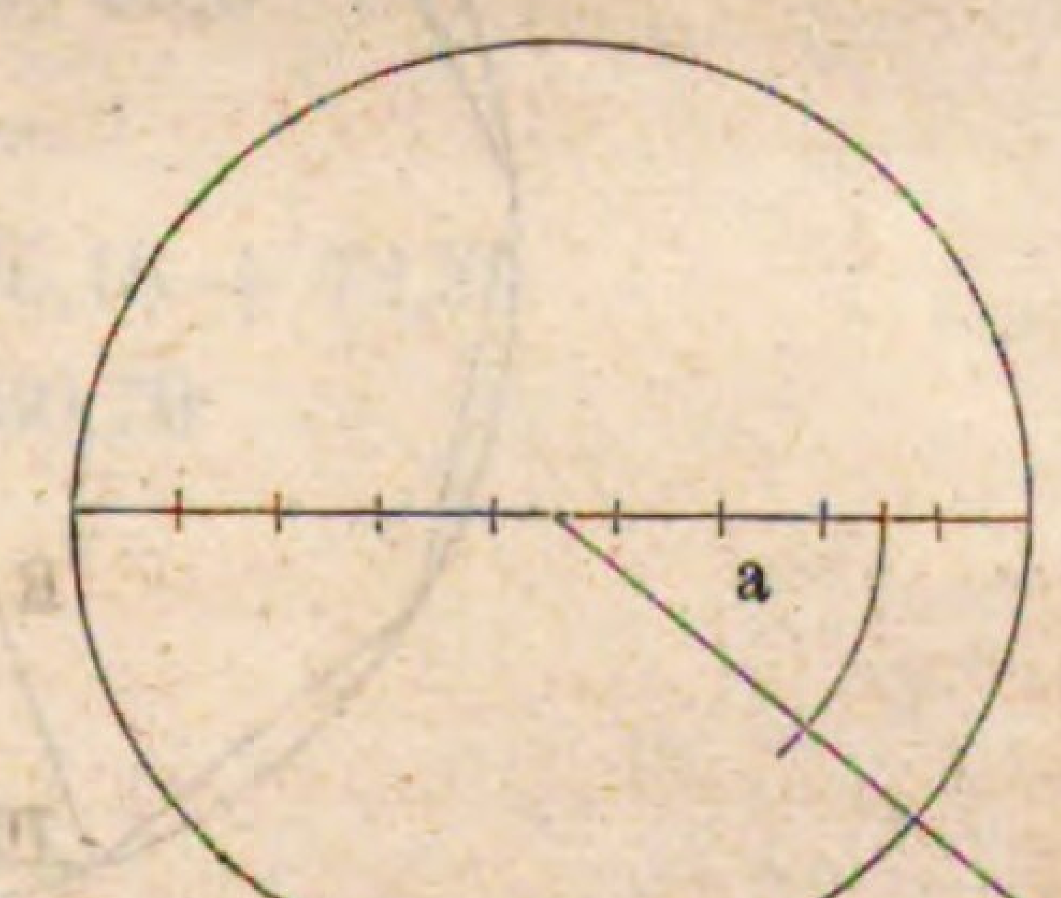
So wie die Winkel der regelmäßigen Vielecke alle gleich groß sind, so sind die Seiten derselben alle gleich lang. Kennt man also die Länge einer Seite, so kennt man die Länge aller Seiten, und da der Polygonwinkel stets durch Rechnung gefunden werden kann, so ist jedes reguläre Vieleck durch eine einzige Seite vollständig bestimmt. Die regelmäßigen Vielecke haben aber auch die Eigenschaft, daß sich jedesmal in und um dieselben ein Kreis beschreiben läßt, und daher können wir behaupten, daß jedes regelmäßige Vieleck auch durch den Radius des ein- oder umgeschriebenen Kreises vollständig bestimmt ist.

Aufgaben:

1) Die Seite eines regelmäßen Neunecks ist 14′ lang; wie lang ist der Radius des ein- und umgeschriebenen Kreises?

A. Erste Methode:





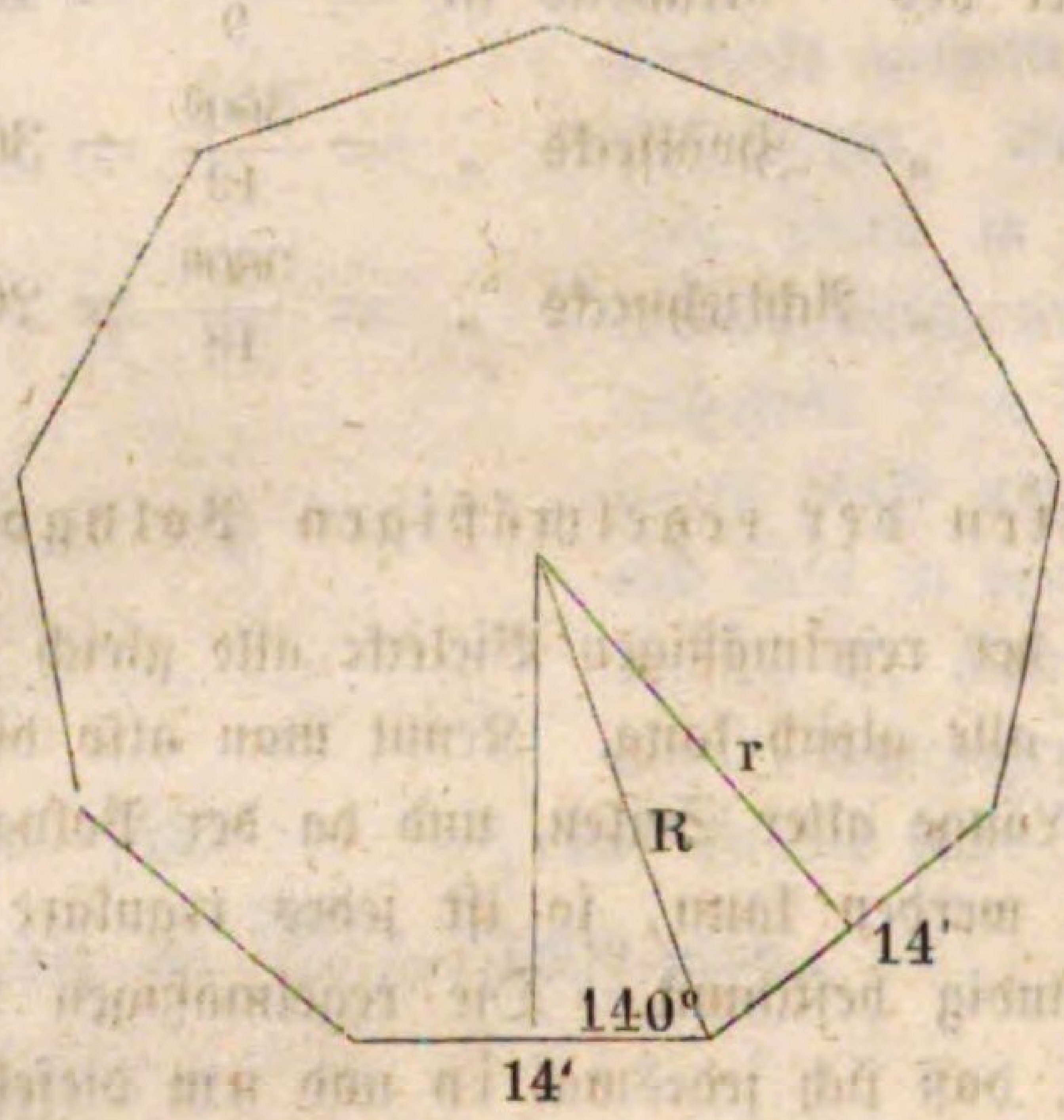
R = 20,4′

r = 19,1′

B. Zweite Methode:

Berechnung des Polygonwinkels.

$$\text{Polygonwinkel} = \frac{180^0 \times 7}{9} = 140^0.$$

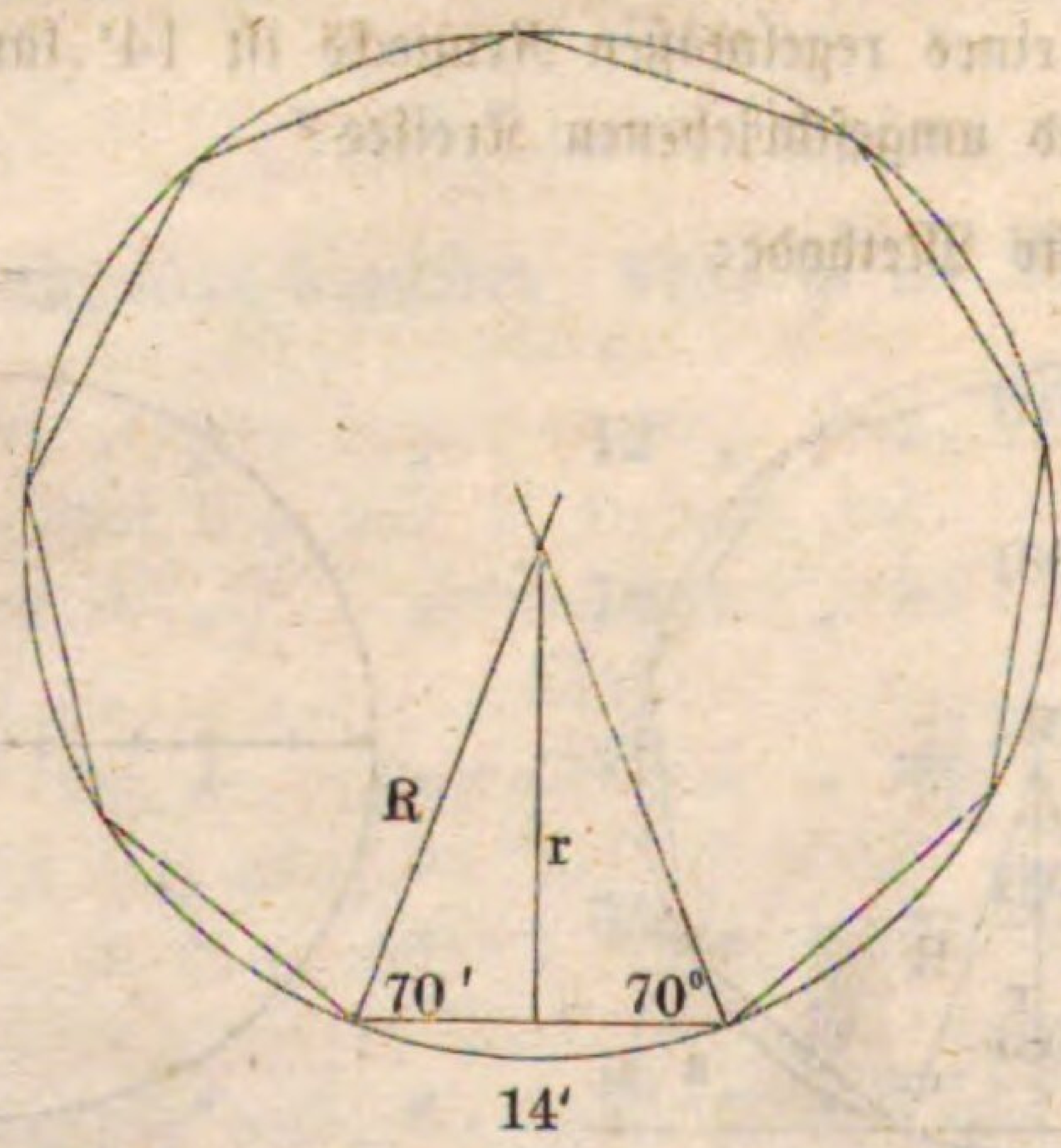


R = 20,4'
r = 19,1'.

C) Dritte Methode:

Mit Hülfe des halben Polygonwinkels.

$$\tfrac{1}{2}\ \text{Polygonwinkel} = \frac{180^0 \times 7}{2 \times 9} = 70^0.$$



Der Radius des umgeschriebenen Kreises = 20,4'
" " " eingeschriebenen " = 19,1'.

Hier kommt nun noch hinzu, das von den zwei gesuchten Stücken jedesmal das eine Stück mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes durch Rechnung gefunden werden kann; hat man also den Radius des umgeschriebenen Kreises durch Construction gefunden, so sucht man den Radius

des eingeschriebenen Kreises durch Rechnung, und umgekehrt. Ist nun in diesem Falle der Radius des eingeschriebenen Kreises $= \sqrt{(20{,}4^2 - 7^2)}$

$$= \sqrt{416{,}16 - 49} = \sqrt{3{,}67{,}16} = 19{,}1'$$

```
            1
      ─────────
200 : 26716
      18000
      ─────────
       8716
       8100
      ─────────
380 :   616
        380
      ─────────
        236
          1
      ─────────
        235 = Rest.
```

2) Die Seite eines regulären Elfecks ist 17′ lang; es wird gefragt:

1) Wie lang ist der Radius des eingeschriebenen Kreises, durch Zeichnung gefunden?

2) Wie lang ist der Radius des umgeschriebenen Kreises, durch Rechnung gefunden?

3) Wie groß ist der Polygonwinkel?

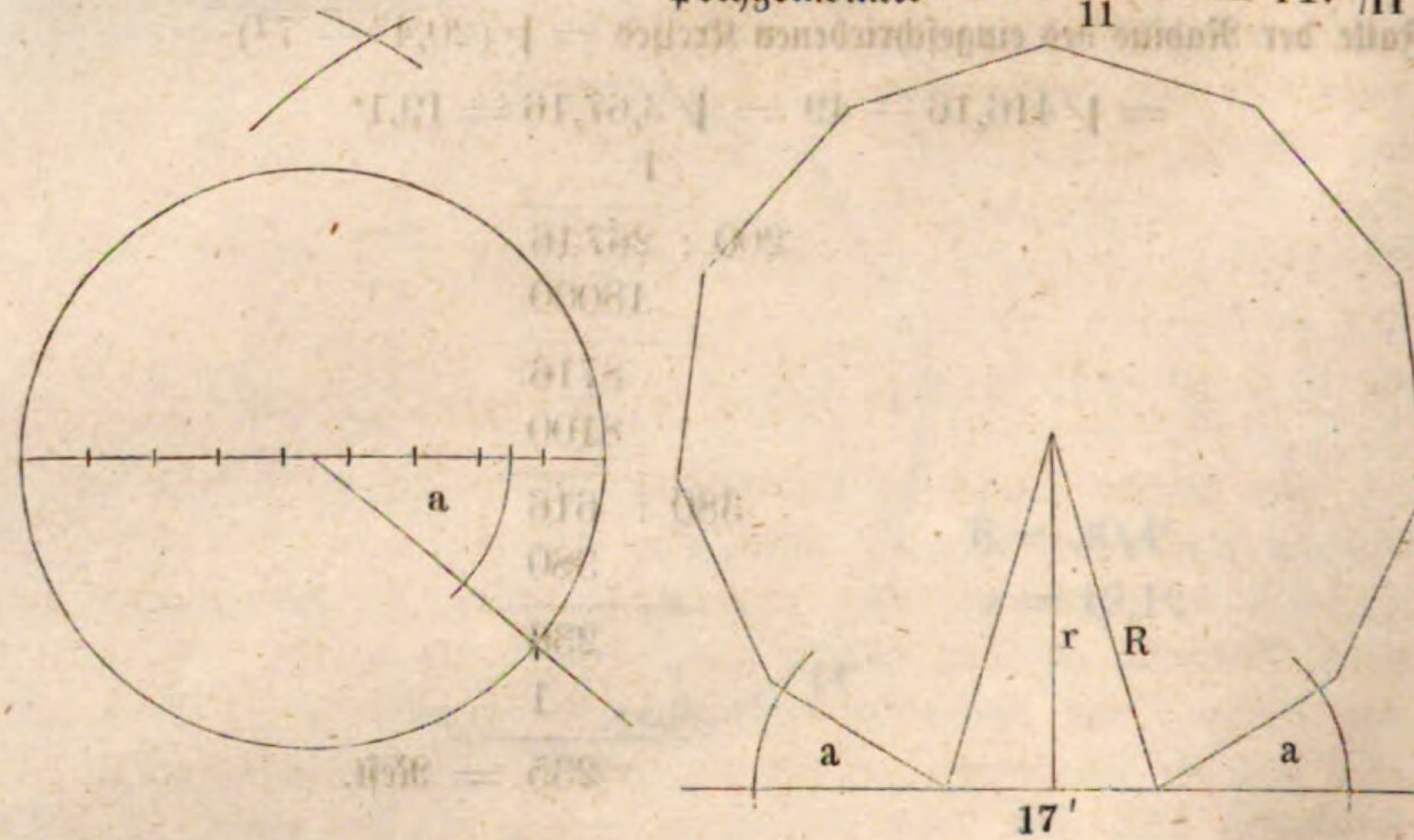
Radius des eingeschriebenen Kreises = 29,6′

Radius des umgeschriebenen Kreises =

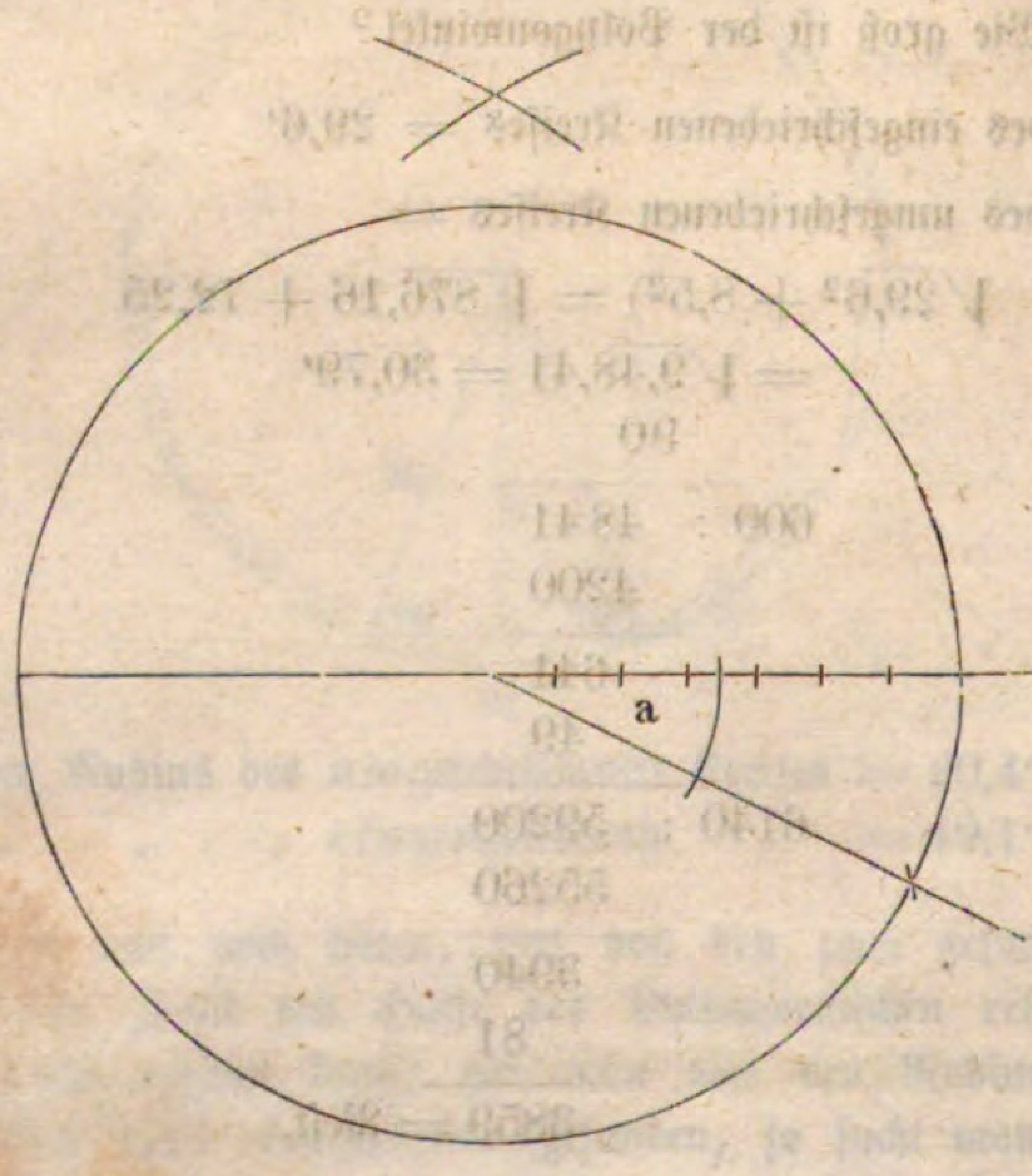
$$\sqrt{29{,}6^2 + 8{,}5^2)} = \sqrt{876{,}16 + 72{,}25}$$
$$= \sqrt{9{,}48{,}41} = 30{,}79'$$

```
          90
      ──────────
600 :   4841
        4200
      ──────────
         641
          49
      ──────────
6140 :  59200
        55260
      ──────────
         3940
           81
      ──────────
         3859 = Rest.
```

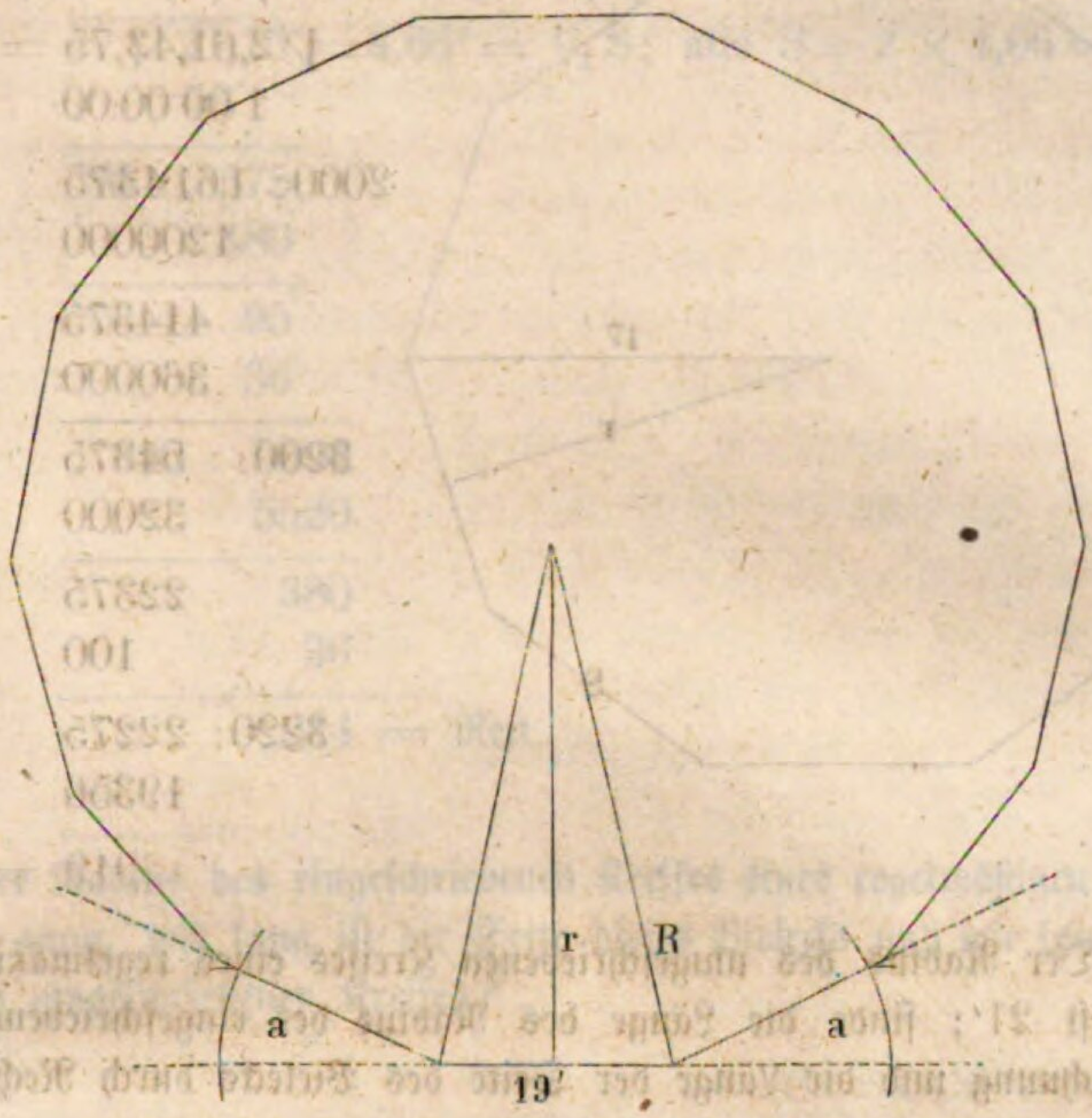
$$\text{Polygonwinkel} = \frac{180^0 \times 9}{11} = 147\,{}^3/_{11}{}^0$$



3) Die Seite eines regelmäßigen Vierzehnecks ist 19′ lang; wie lang ist der Radius des umgeschriebenen Kreises durch Zeichnung gefunden, wie lang ist der Radius des eingeschriebenen Kreises durch Rechnung bestimmt, und wie groß ist der Polygonwinkel?



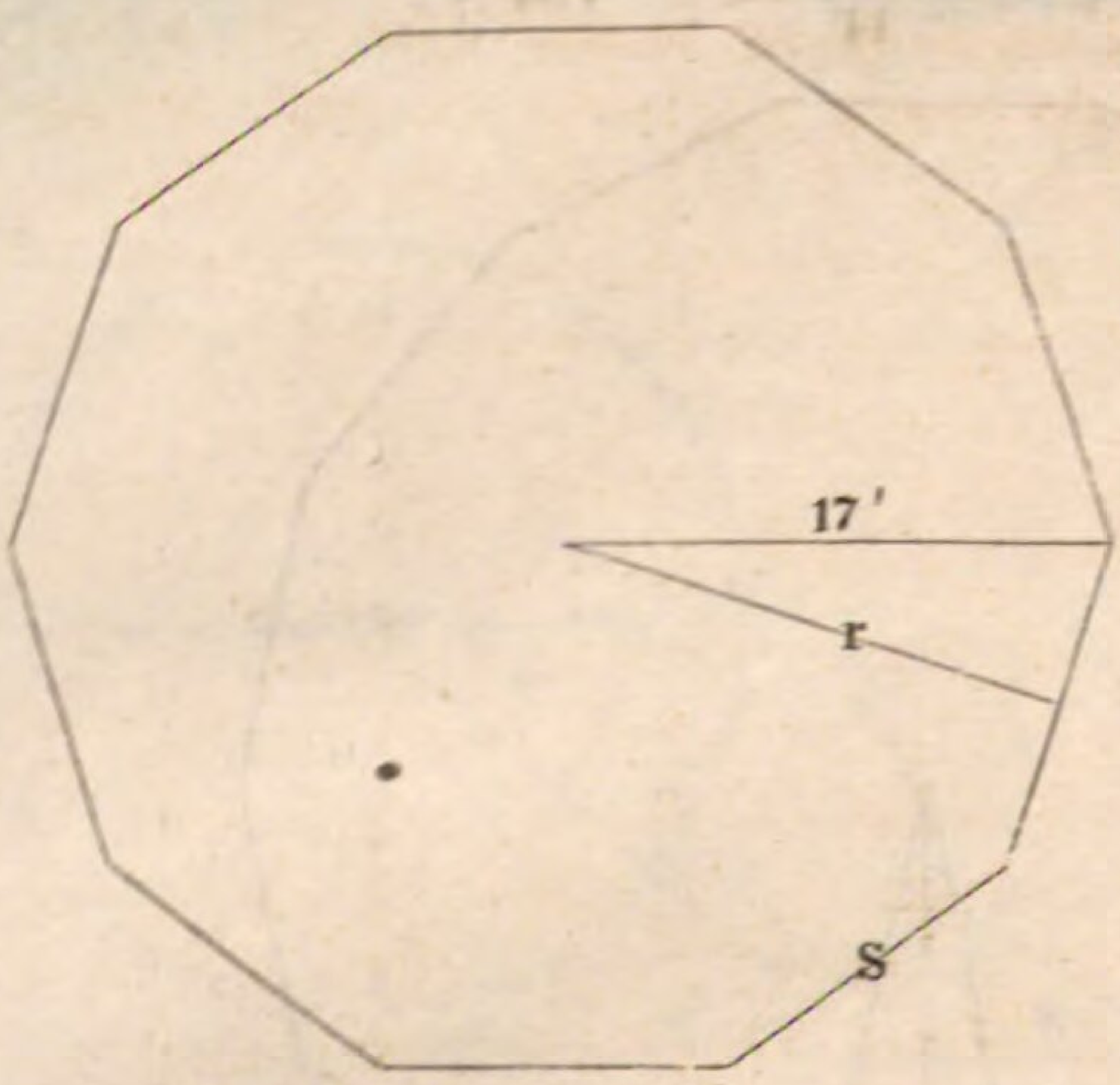
$$\text{Polygonwinkel} = \frac{180^0 \times 12}{14} = 154^2/_7{}^0.$$



$$R = 42{,}4'$$
$$r = \sqrt{(42{,}4^2 - 9{,}5^2)} = \sqrt{(1797{,}76 - 90{,}25)}$$
$$= \sqrt{17{,}07{,}51} = 41{,}3'$$

16
800 : 10751
8000
2751
100
820 : 2651
2460
191
9
182 = Rest.

4) Der Radius des umgeschriebenen Kreises eines regulären Zehnecks ist 17′ lang; finde durch Zeichnung die Länge der Seite dieses Zehnecks, und durch Rechnung die Länge des Radius des eingeschriebenen Kreises.



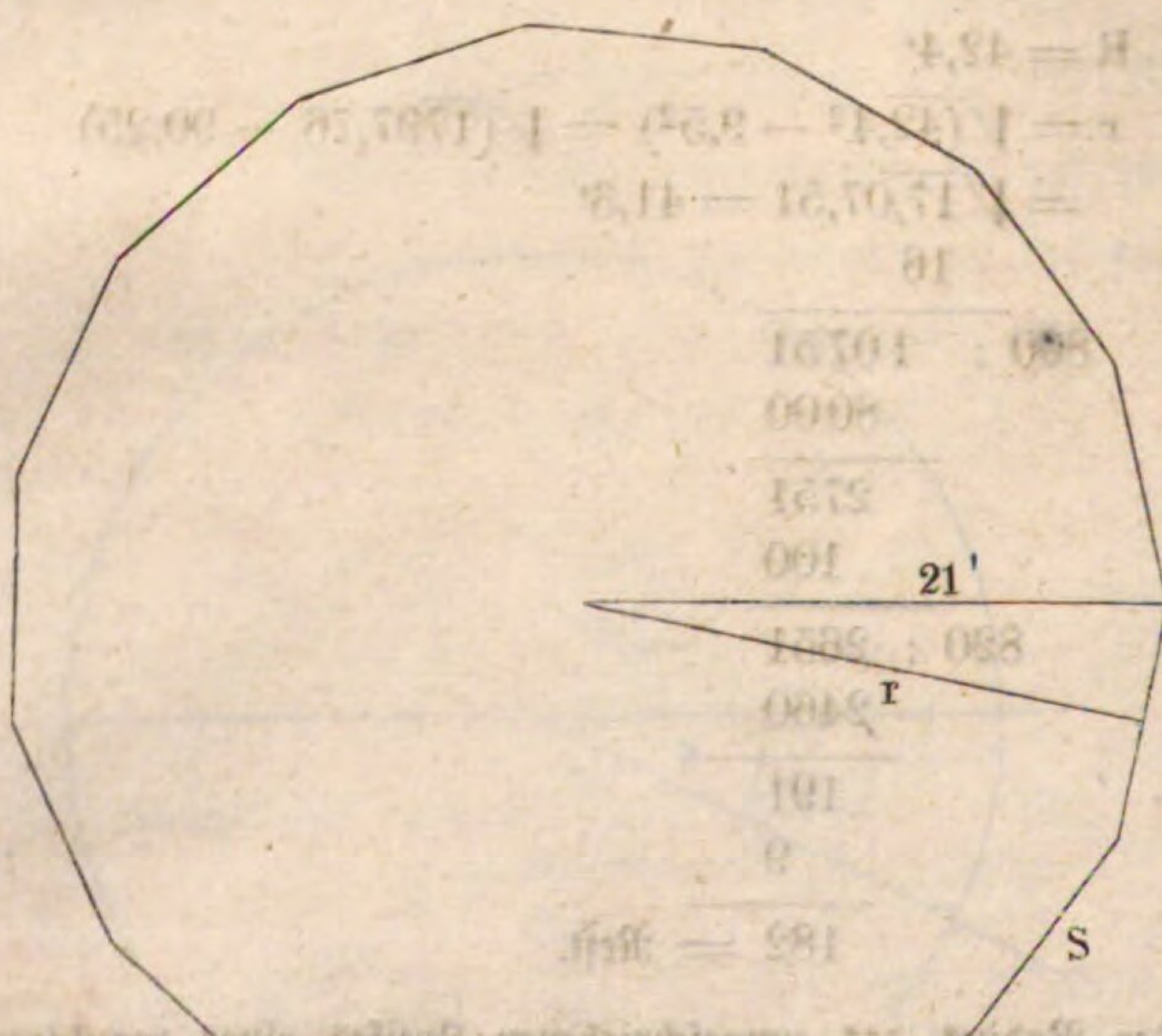
$S = 10{,}5'$

$r = \sqrt{(17^2 - 5{,}25^2)}$

$= \sqrt{2{,}61{,}43{,}75} = 16{,}16'$

```
        1000000
2000:  1614375
       1200000
        414375
        360000
3200:    54375
         32000
         22375
           100
3220:    22275
         19356
          2919 = Rest.
```

5) Der Radius des umgeschriebenen Kreises eines regelmäßigen Fünfzehnecks ist 21′; finde die Länge des Radius des eingeschriebenen Kreises durch Zeichnung und die Länge der Seite des Vielecks durch Rechnung!



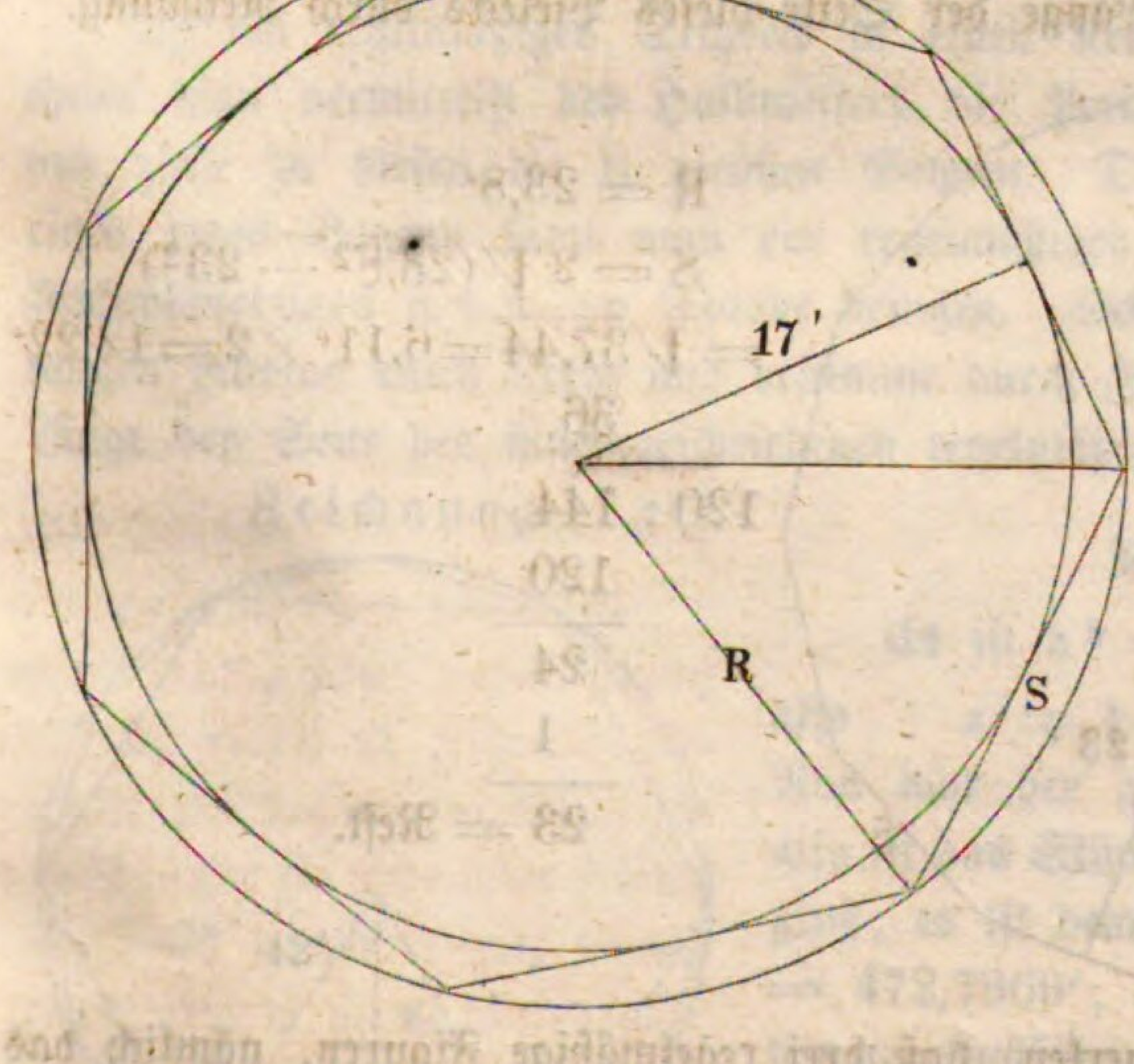
$$r = 20{,}5'$$

$$S = 2\sqrt{(21^2 - 20{,}5^2)} = \sqrt{(441 - 420{,}25)}$$

$$= \sqrt{21{,}75} = 4{,}66' = \tfrac{1}{2}\,S;\ \text{alſo}\ S = 2 \times 4{,}66 = 9{,}32'$$

```
      16
80 :  575
      480
       95
       36
920 : 5900
      5520
       380
        36
       344 = Reſt.
```

6) Der Radius des eingeſchriebenen Kreiſes eines regelmäßigen Siebenecks iſt 17′ lang, wie lang iſt die Seite dieſes Vielecks und wie lang iſt der Radius des umgeſchriebenen Kreiſes?



$$S = 16{,}8'$$

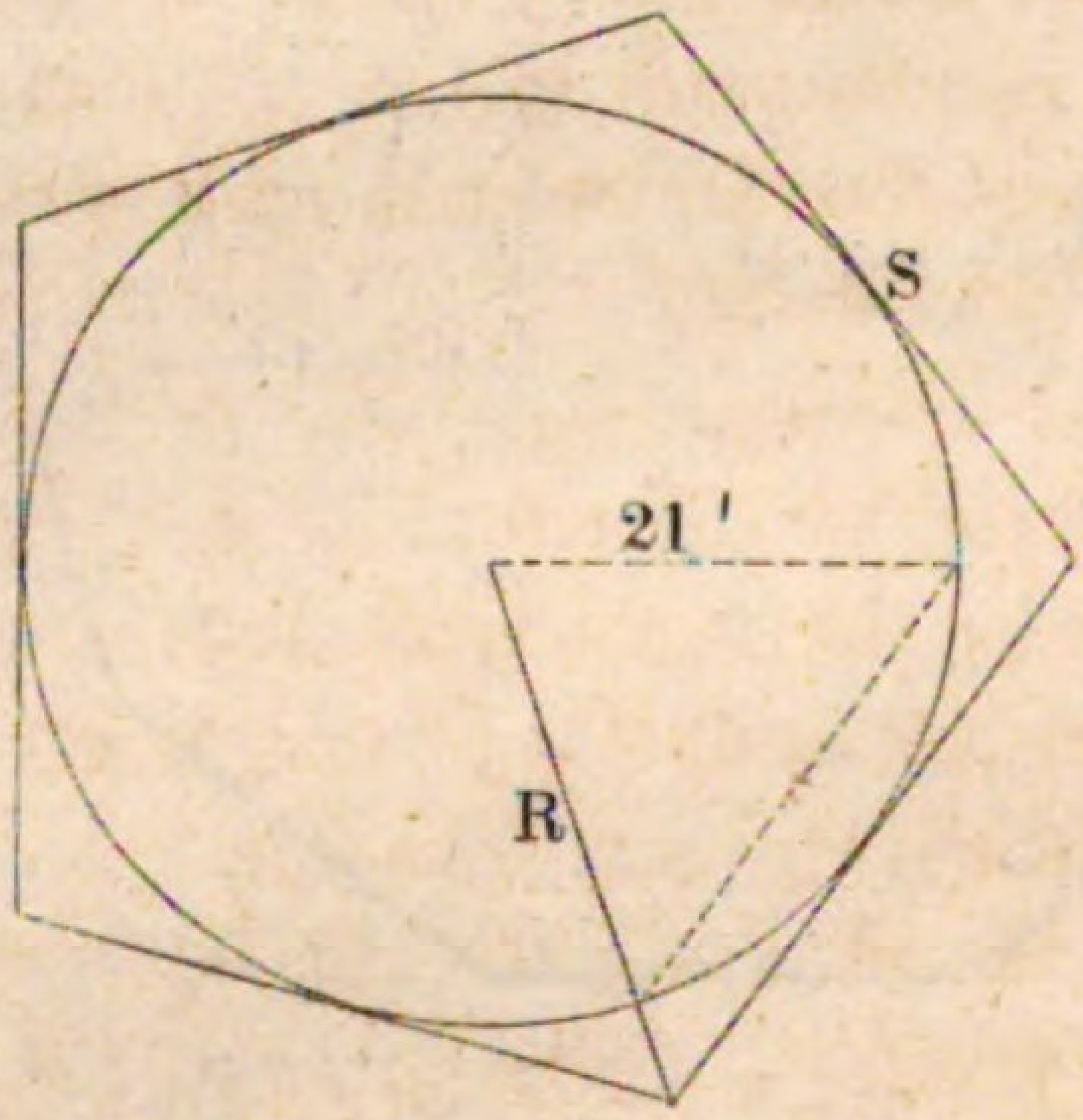
$$R = \sqrt{(17^2 + 16{,}8^2)}$$

$$= \sqrt{359{,}56} = 18{,}96'$$

```
        10
200 :  25956
        160
        9956
        6400
360 :  3556
       3240
        316
         81
3780 : 23500
       22680
         810
          36
         784 = Reſt.
```

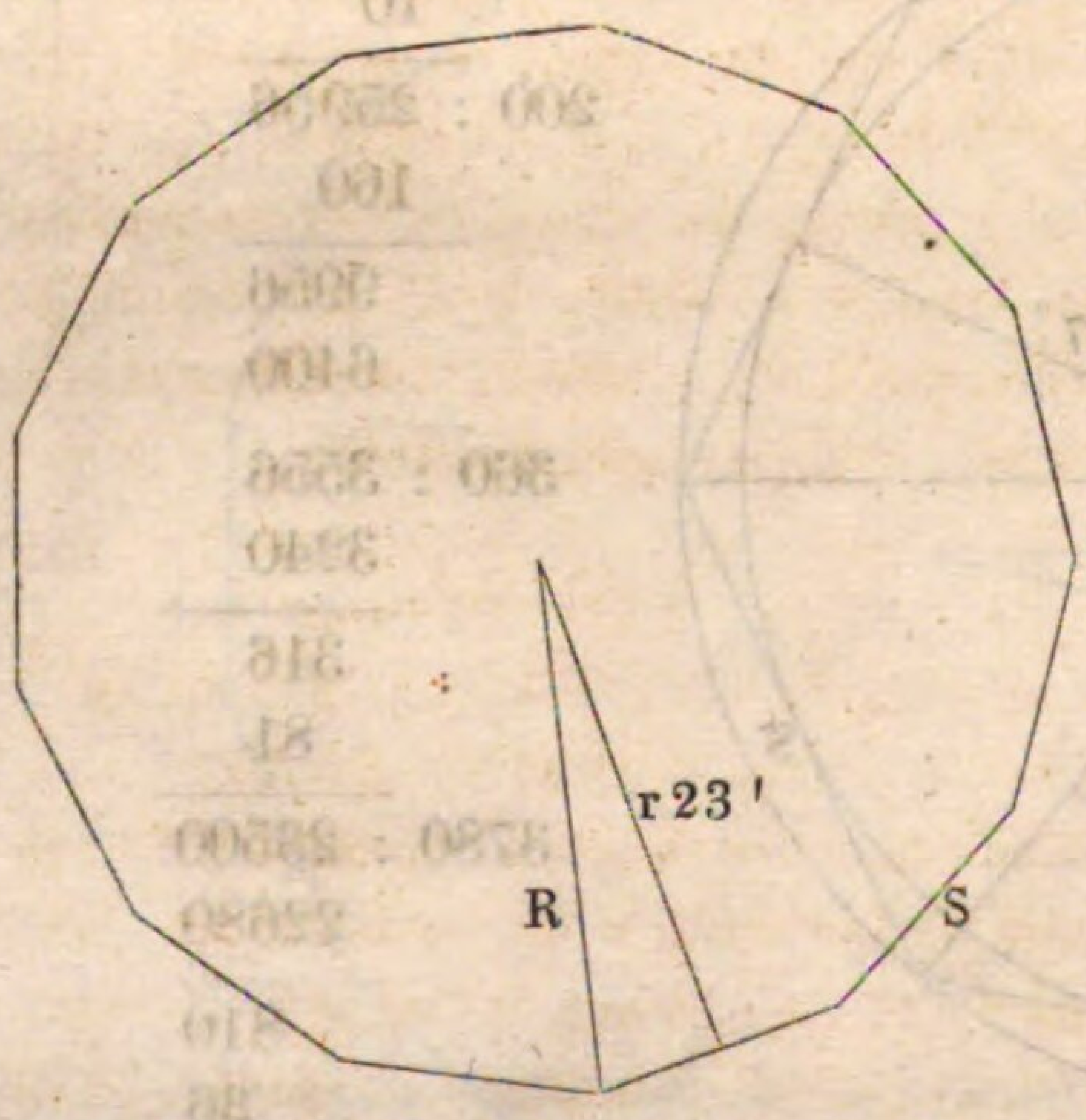
7) Der Radius des eingeschriebenen Kreises eines regelmäßigen Fünfecks ist 21′ lang; finde die Länge der Seite dieses Vielecks durch Zeichnung und die Länge des Radius des umgeschriebenen Kreises durch Rechnung.

$$S = 30{,}3'$$
$$R = \sqrt{(21^2 + 15{,}15^2)}$$
$$= \sqrt{670{,}5225} = 2589'$$



$$4$$
$$40 : 270$$
$$200$$
$$705$$
$$25$$
$$500 : 4552$$
$$4000$$
$$552$$
$$64$$
$$5160 : 48825$$
$$46521$$
$$2304 = \text{Rest.}$$

8) Der Radius des eingeschriebenen Kreises eines regelmäßigen Dreizehnecks ist 23′ lang; finde die Länge des Radius des umgeschriebenen Kreises durch Zeichnung und die Länge der Seite dieses Vielecks durch Rechnung.



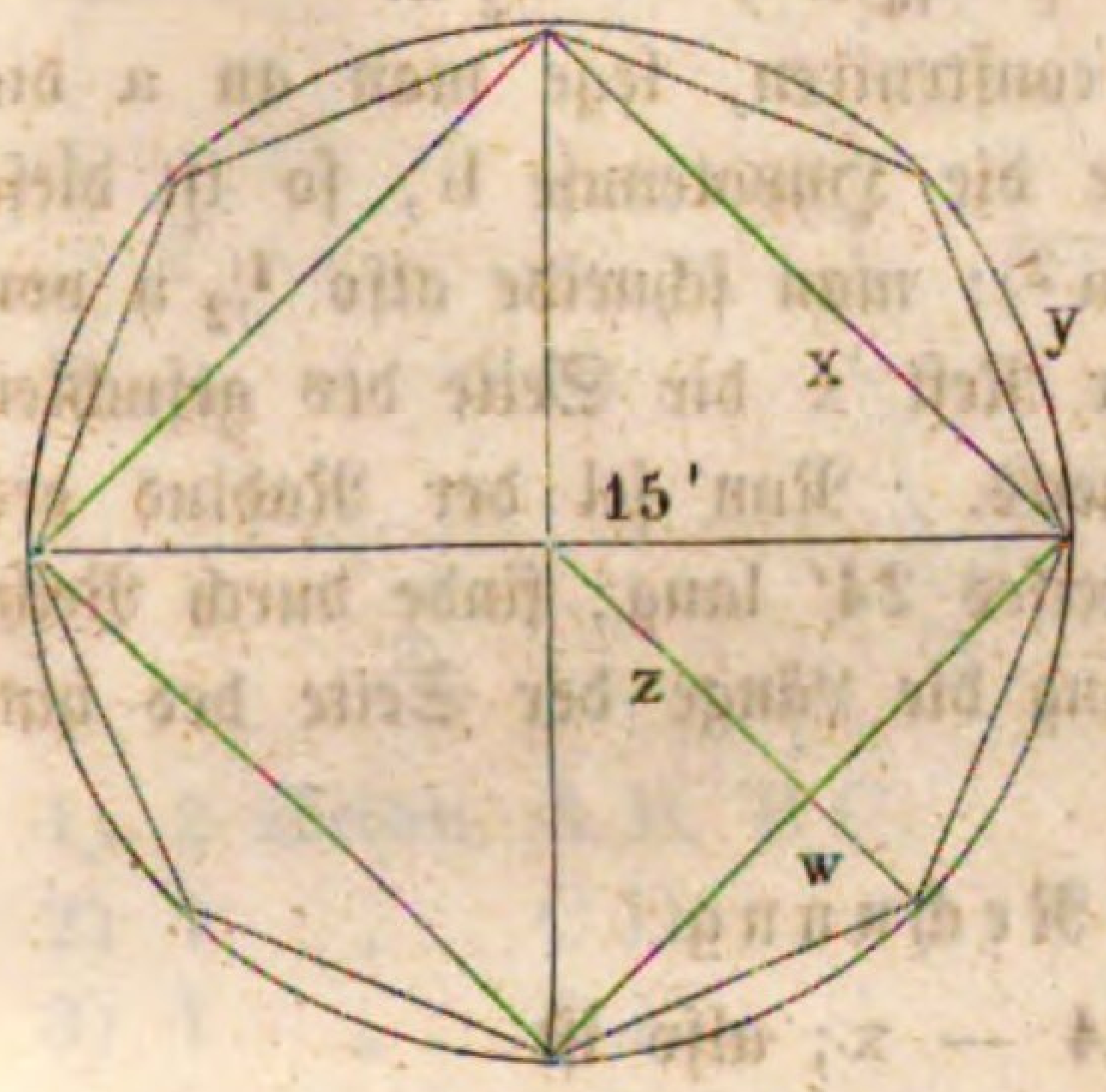
$$R = 23{,}8'$$
$$S = 2\sqrt{(23{,}8^2 - 23^2)}$$
$$= \sqrt{37{,}44} = 6{,}11' \times 2 = 12{,}22'$$
$$36$$
$$120 : 144$$
$$120$$
$$24$$
$$1$$
$$23 = \text{Rest.}$$

Hier ist noch zu bemerken, daß drei regelmäßige Figuren, nämlich das Quadrat, das Sechseck und das Zehneck auf eine eigenthümliche Weise durch

den Radius des umgeschriebenen Kreises bestimmt sind, und daher auf eine besondere Weise construirt und berechnet werden können. Soll

1) ein regelmäßiges Viereck in einen Kreis beschrieben werden; so theile man den Kreis durch einen Durchmesser in zwei Halbkreise, halbire jeden Halbkreis und ziehe die dazu gehörigen Sehnen. Durch fortgesetzte Halbirung eines jeden Bogens kann man ein regelmäßiges Vieleck von 8, 16, 32 u. s. w. Seiten erhalten. Nun sei der Radius des umgeschriebenen Kreises 15′ lang; finde durch Zeichnung und Rechnung die Länge der Seite des eingeschriebenen Quadrats und des eingeschriebenen regelmäßigen Achtecks.

Zeichnung.



Rechnung.

Die Seite des Quadrats x ist

$= \sqrt{(15^2 + 15^2)} = \sqrt{450} = 21{,}21'$;

$^1/_2$ x ist also $= 10{,}6'$; wir erhalten mithin den Radius des dem Quadrate eingeschriebenen Kreises z

$= \sqrt{(15^2 - 10{,}6^2)}$

$= \sqrt{112{,}64} = 10{,}61'$.

Hieraus folgt weiter, daß die Linie w

$= 15' - 11{,}60' = 4{,}39'$ lang ist; folglich ist die Seite des regelmäßigen Achtecks

$y = \sqrt{(10{,}6^2 + 4{,}39^2)}$

$= \sqrt{131{,}6321} = 11{,}47'$. Soll

2) ein regelmäßiges Sechseck in einen Kreis beschrieben werden; so theile man vermittelst des Halbmessers die Peripherie in 6 gleiche Theile und ziehe zu diesen die 6 gleichen Sehnen. Durch fortgesetztes Halbiren eines jeden Bogens kann man ein regelmäßiges Zwölf-, Vierundzwanzig-, Achtundvierzigeck u. s. w. zu Stande bringen. Schlage z. B. mit einem 42′ langen Radius einen Kreis und bestimme durch Zeichnung und Rechnung die Länge der Seite des hineingeschriebenen regelmäßigen Zwölfecks.

Zeichnung.



Rechnung.

Es ist $z^2 = 42^2 - 21^2 = 1323$;

also $z = \sqrt{1323} = 36{,}37'$.

Nun war der gegebene Radius 42′ lang; also ist das Stück y $42' - 36{,}37' = 5{,}63'$ groß; es ist demnach $x^2 = 21^2 + 5{,}63^2$ $= 472{,}7969'$; mithin die gesuchte Seite des regelmäßigen Zwölfecks

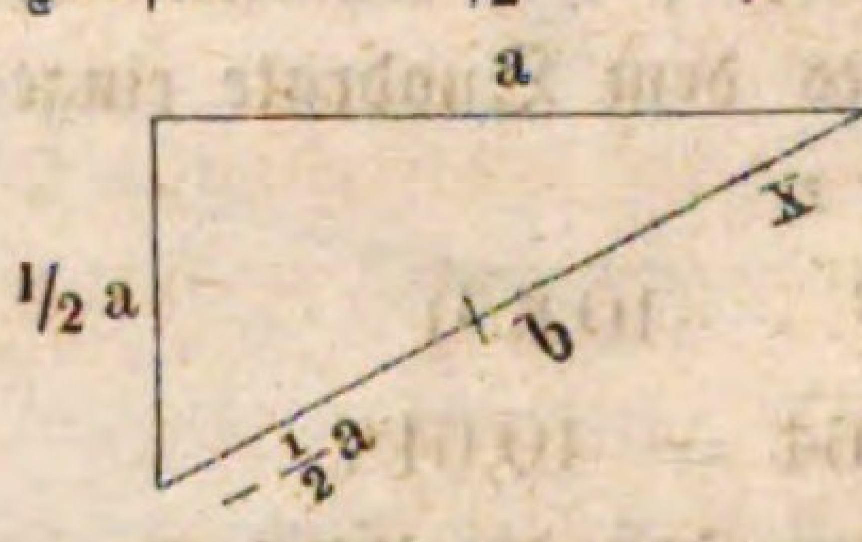
$x = \sqrt{472{,}6969} = 21{,}74'$ lang.

Endlich kann man

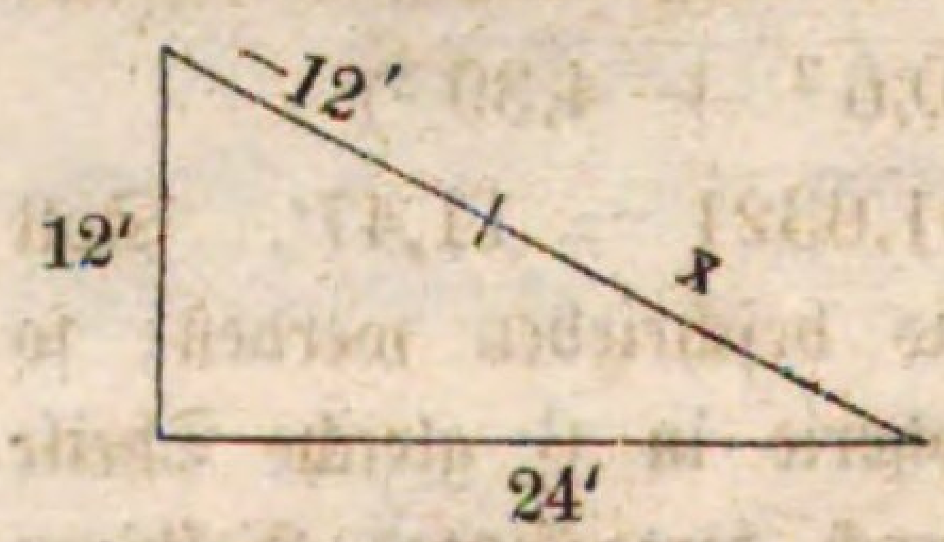
3) aus dem Radius des umgeschriebenen Kreises die Länge der Seite des hineingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks durch Rechnung und durch Zeichnung finden. Es sei z. B. der Radius des umgeschriebenen Kreises $= a$, und die gesuchte Seite des regelmäßigen Zehnecks $= x$; so verhält sich:

$$a : x = x : a - x; \text{ also ist}$$
$$x^2 = a^2 - ax$$
$$x^2 + ax = a^2; \text{ ergänzt}$$
$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4} a^2 = a^2 + \tfrac{1}{4} a^2$$
$$x + \tfrac{1}{2} a = \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4} a^2)}$$
$$x = \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4} a^2)} - \tfrac{1}{2} a.$$

Um diesen Ausdruck geometrisch zu construiren, lege man an a die Hälfte $= \frac{1}{2} a$ rechtwinklig an und ziehe die Hypotenuse b, so ist diese $= \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4} a^2)}$; man schneide also $\frac{1}{2} a$ von ihr ab, so ist der Rest x die Seite des gesuchten regelmäßigen Zehnecks. Nun sei der Radius des umgeschriebenen Kreises 24′ lang; finde durch Rechnung und Zeichnung die Länge der Seite des hineingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks.

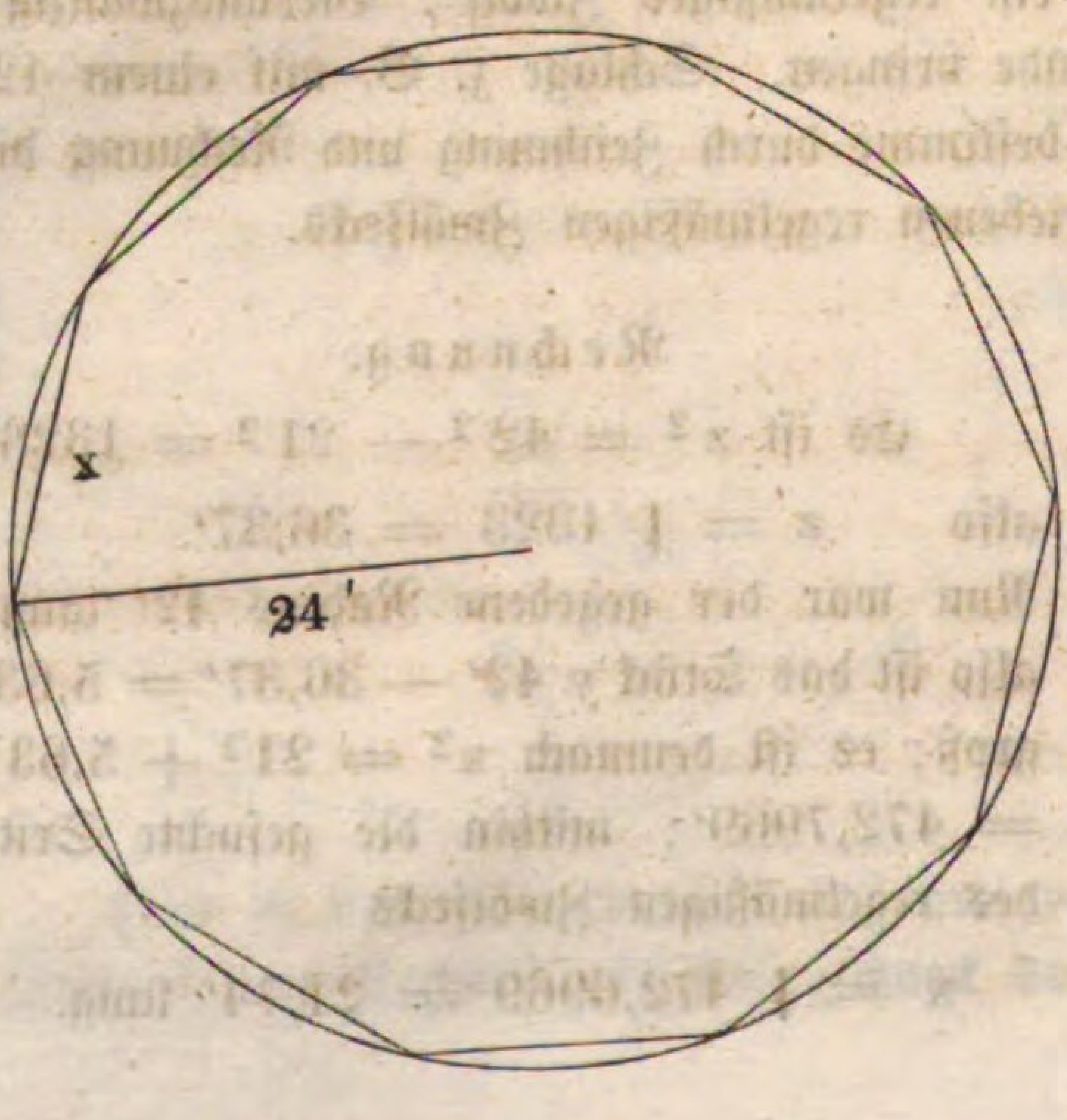


Zeichnung.



Rechnung.

$$24 : x = x : 24 - x; \text{ also ist}$$
$$x^2 = 576 - 24x$$
$$x^2 + 24x = 576; \text{ ergänzt}$$
$$x^2 + 24x + 12^2 = 576 + 12^2$$
$$x + 12 = \sqrt{(576 + 144)}$$
$$x = \sqrt{(576 + 144)} - 12.$$

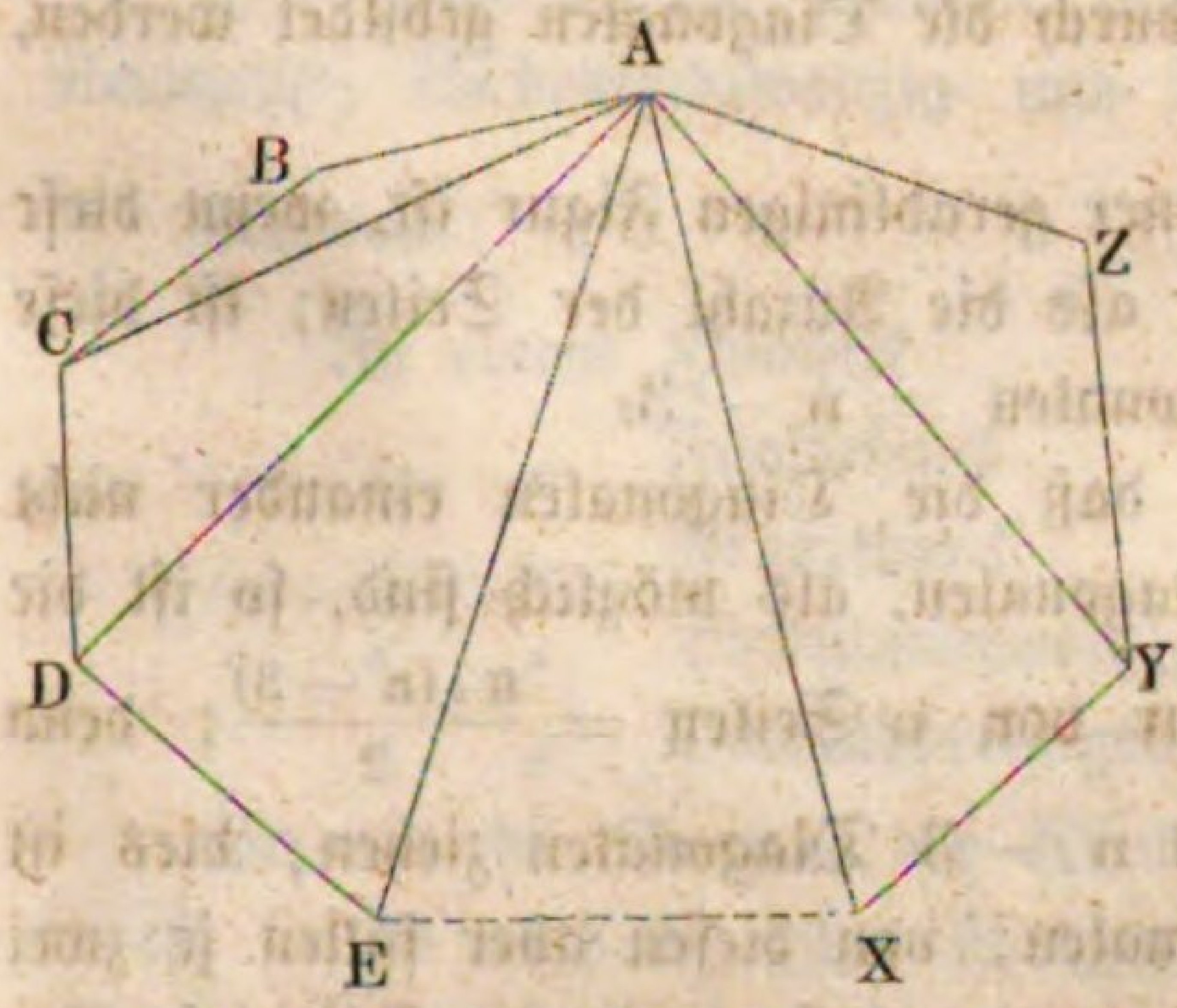


Nun ist $\sqrt{720} = 26{,}83$; mithin die gesuchte Seite des regelmäßigen Zehnecks

$x = 26{,}83' - 12' = 14{,}83'$ lang.

Verbindet man die Endpunkte zweier Bogen durch gerade Linien mit einander, so erhält man ein regelmäßiges Fünfeck im Kreise; halbirt man aber die zehn gleichen Bogen und verbindet die Halbirungspunkte durch gerade Linien, so erhält man ein regelmäßiges Zwanzigeck.

Ein **unregelmäßiges** Vieleck ist eine solche geradlinige Figur, welche mehr als vier Seiten hat, und in welcher die Seiten und Winkel eine verschiedene Größe haben. Um die Frage zu beantworten: durch wie viele und durch welche Stücke ein unregelmäßiges Vieleck bestimmt ist, wollen wir zuerst die Eigenschaften der Winkel der unregelmäßigen Vielecke und hiermit aller geradlinigen Figuren genau untersuchen, und zu diesem Zweck von folgendem Satze ausgehen:



Eine jede geradlinige Figur kann durch Diagonalen, welche einander nicht schneiden, in so viele Dreiecke zertheilt werden, als die Figur Seiten hat, weniger 2.

Beweis.

Es sei ABCDE.......XYZ eine Figur von einer unbestimmten Anzahl von Seiten, und darin werden gezogen die Diagonalen A C, A D, A E u. s. w., so machen:

1)	2	Seiten,	A B, B C	und 1	Diagonale	A C	= 1	Dreieck,	
2)	1	"	C D	" 1	"	A D	= 1	"	
3)	1	"	D E	" 1	"	A E	= 1	"	
⋮									
4)	1	"	. . . X	" 1	"	A X	= 1	"	endlich
5)	3	"	X Y, Y Z, Z A	" 1	"	A Y	= 2	"	
	p + 3			p			p + 1		

So viele Glieder nun in diesen Reihen noch zwischen dem dritten und vorletzten Gliede angenommen werden, so ist jedes Glied der ersten Reihe eine Seite, jedes Glied der zweiten Reihe eine Diagonale, jedes Glied der dritten Reihe ein Dreieck. Alle diese Zwischenglieder haben also auf die Differenzen der Summen dieser drei Reihen keinen Einfluß.

Betrachtet man nun zuerst die mittlere Reihe, die der Diagonalen nämlich, so ist jedes Glied derselben = 1. Man setze die Summe der ganzen Reihe = p.

Ferner enthält die dritte Reihe, die der Dreiecke, in jedem Gliede ebenfalls 1, und nur das letzte Glied ist = 2; also die Summe der ganzen Reihe um 1 größer, als die Summe der Diagonalen; folglich ist die Summe der Dreiecke = p + 1.

Endlich vergleiche man die erste Reihe, die der Seiten, mit der dritten, so ist sowohl das erste, als das letzte Glied von jener um 1 größer, als die

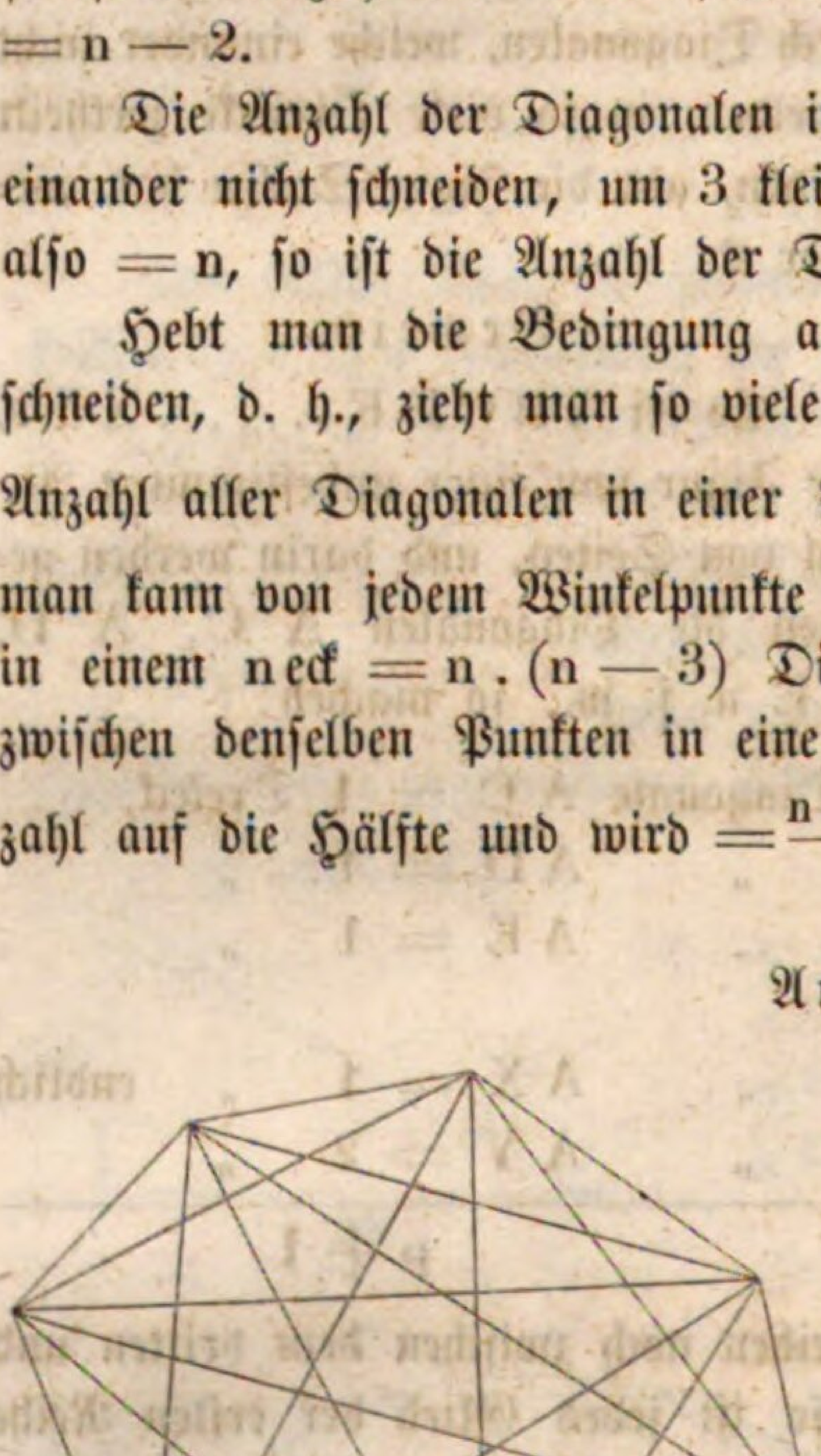
gleichen Glieder von dieser. Alle übrigen Glieder aber sind in beiden einander gleich; folglich ist die Summe aller Glieder der ersten Reihe um 2 größer, als die Summe der dritten Reihe; mithin ist die Summe der Seiten $= p + 3$. Die Summe der Dreiecke, welche durch die Diagonalen, die sich nicht schneiden, gebildet werden, ist also um 2 kleiner, als die Anzahl der Seiten der Figur; denn $(p + 3) - (p + 1) = 2$.

Bezeichnet man die Anzahl der Seiten einer geradlinigen Figur durch n, so ist die Anzahl der Dreiecke, welche durch die Diagonalen gebildet werden, $= n - 2$.

Die Anzahl der Diagonalen in einer geradlinigen Figur ist, wenn diese einander nicht schneiden, um 3 kleiner, als die Anzahl der Seiten; ist diese also $= n$, so ist die Anzahl der Diagonalen $= n - 3$.

Hebt man die Bedingung auf, daß die Diagonalen einander nicht schneiden, d. h., zieht man so viele Diagonalen, als möglich sind, so ist die Anzahl aller Diagonalen in einer Figur von n Seiten $= \frac{n.(n-3)}{2}$; denn man kann von jedem Winkelpunkte aus $n - 3$ Diagonalen ziehen; dies ist in einem neck $= n.(n - 3)$ Diagonalen; von diesen aber fallen je zwei zwischen denselben Punkten in eine zusammen; daher reducirt sich diese Anzahl auf die Hälfte und wird $= \frac{n.(n-3)}{2}$.

Aufgabe:



Construire ein Siebeneck und theile dasselbe durch Diagonalen, welche sich schneiden!

Rechnet man zu der Anzahl aller Diagonalen noch die Anzahl der Seiten der Figur selbst hinzu, so erhält man:

$$\frac{n.(n-3)}{2} + n = \frac{n.(n-3) + 2n}{2}$$

$$= \frac{nn - 3n + 2n}{2} = \frac{nn - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

So groß ist also die Anzahl aller geraden Linien, die zwischen n Punkten, von denen nicht mehr als zwei in einer geraden Linie liegen, möglich sind.

Die Summe aller Winkel in einem Vieleck beträgt noch einmal so viele rechte, als die Anzahl der Seiten, weniger 4 R.

Beweis:

Es sei die Anzahl der Seiten $= n$, so ist die Anzahl der Dreiecke, in welche das Vieleck durch Diagonalen, die sich nicht schneiden, zertheilt werden

kann, = n — 2' und die Summe der Winkel in jedem derselben = 2R; folglich die Summe aller = 2(n — 2)R = 2nR — 4R.

Diesen Satz können wir auch so ausdrücken: Die Summe aller Winkel in einem Vieleck ist = der Anzahl der Seiten weniger 2, mal 180°.

Aufgabe:

Wie groß ist die Summe der Winkel in einem Zwölf-, Fünfzehn-, Neunzehn-, Siebenundzwanzig- und Dreiunddreißigeck?

Antwort:

In einem	Zwölfeck	$= 10 \times 180^0 = 1800^0$,
" "	Fünfzehneck	$= 13 \times 180^0 = 2340^0$,
" "	Neunzehneck	$= 17 \times 180^0 = 3060^0$,
" "	Siebenundzwanzigeck	$= 25 \times 180^0 = 4500^0$,
" "	Dreiunddreißigeck	$= 31 \times 180^0 = 5580^0$.

So wie die Summe der Winkel in allen Dreiecken einander gleich ist, so ist sie es auch in allen übrigen geradlinigen Figuren von gleich vielen Seiten, so ungleich auch die Figuren selbst und ihre Winkel einander sein mögen. In einem regelmäßigen Vieleck von n Seiten ist die Größe eines jeden Winkels $= \frac{2nR-4R}{n} = 2R - \frac{4R}{n}$

$$= \frac{2n-4}{n} \times 90^0 = \frac{(n-2) . 180^0}{n}.$$

Aufgabe:

Berechne nach allen drei Formeln die Größe des Polygonwinkels in einem regelmäßigen Zwölf-, Achtzehn-, Vierundzwanzig-, Sechsunddreißig- und Zweiundsiebzigeck!

$$\text{Zwölfeck} = 2 \times 90^0 - \frac{4 \times 90^0}{12} = 150^0,$$

$$= \frac{2 \times 12 - 4}{12} \times 90^0 = 150^0,$$

$$= \frac{(12 - 2) \times 180^0}{12} = 150^0.$$

$$\text{Achtzehneck} = 2 \times 90^0 - \frac{4 \times 90^0}{18} = 160^0,$$

$$= \frac{(2 \times 88) - 4}{18} \times 90^0 = 160^0,$$

$$= \frac{(18 - 2) \times 180^0}{18} = 160^0.$$

Vierundzwanzigeck $= 2 \times 90^0 - \frac{4 \times 90^0}{24} = 165^0,$

$= \frac{2 \times 24 - 4}{24} \times 90^0 = 165^0,$

$= \frac{(24-2) \times 180^0}{24} = 165^0.$

Sechsunddreißigeck $= 2 \times 90^0 - \frac{4 \times 90^0}{36} = 170^0,$

$= \frac{2 \times 36 - 4}{36} \times 90^0 = 170^0,$

$= \frac{(36-2) \times 180^0}{36} = 170^0.$

Zweiundsiebzigeck $= 2 \times 90^0 - \frac{4 \times 90^0}{72} = 175^0,$

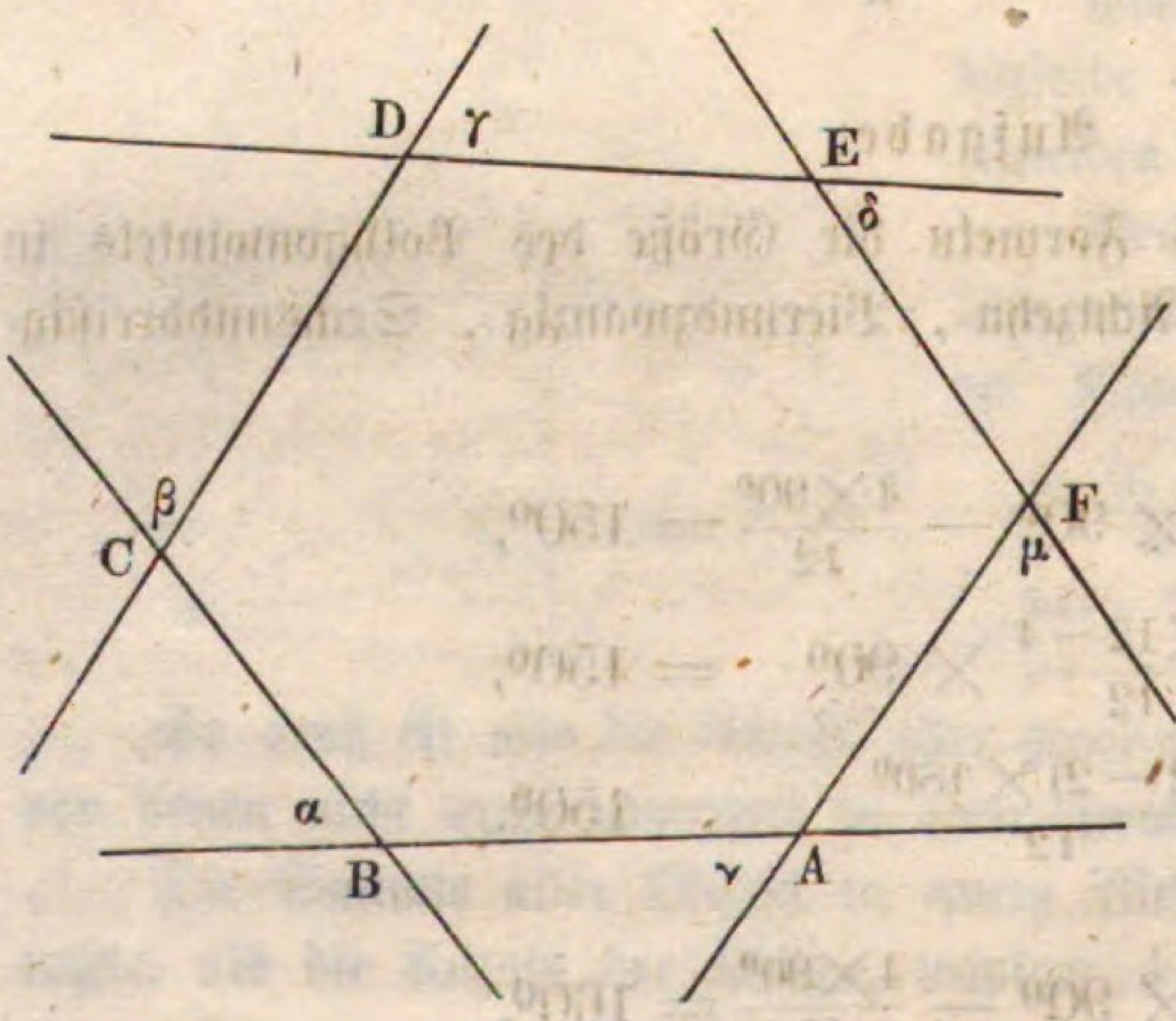
$= \frac{2 \times 72 - 4}{72} \times 90^0 = 175^0,$

$= \frac{(72-2) \times 180^0}{72} = 175^0.$

Es bleibt noch die Frage zu beantworten übrig: Wie groß ist die Summe aller äußern Winkel, welche dadurch entstehen, daß die Seiten nach einerlei Richtung hin verlängert werden, nämlich A B über B hinaus, B C über C hinaus, C D über D hinaus u. s. w.?

Antwort: $= 4$ R.

Beweis:



Nach der nebenstehenden Figur entstehen 6 Paare Nebenwinkel, welche zusammen $6 \times 180^0 = 1080^0$ groß sind. Die Innenwinkel des Sechsecks messen aber zusammen 720^0; mithin messen die äußern Nebenwinkel α, β, γ, δ, μ, ν zusammen $1080^0 - 720^0 = 360^0 = 4$ R. In einem n eck messen also die n Paare Nebenwinkel $=$ n 2 R; die Summe der Winkel eines n ecks aber ist $= (n - 2) \times 2 R = n 2 R - 4 R$. Das letztere Resultat aber von dem erstern subtrahirt, gibt für die n Außenwinkel $= 4$ R.

Da in einem unregelmäßigen Vieleck alle Seiten eine verschiedene Länge und alle Winkel eine verschiedene Größe haben, so kann die Figur nur

construirt werden, wenn man die Längen aller Seiten bis auf eine, und für die Zeichnung die Größe aller Winkel bis auf zwei, und für die Rechnung die Größe der Winkel bis auf einen kennt.

Aufgaben:

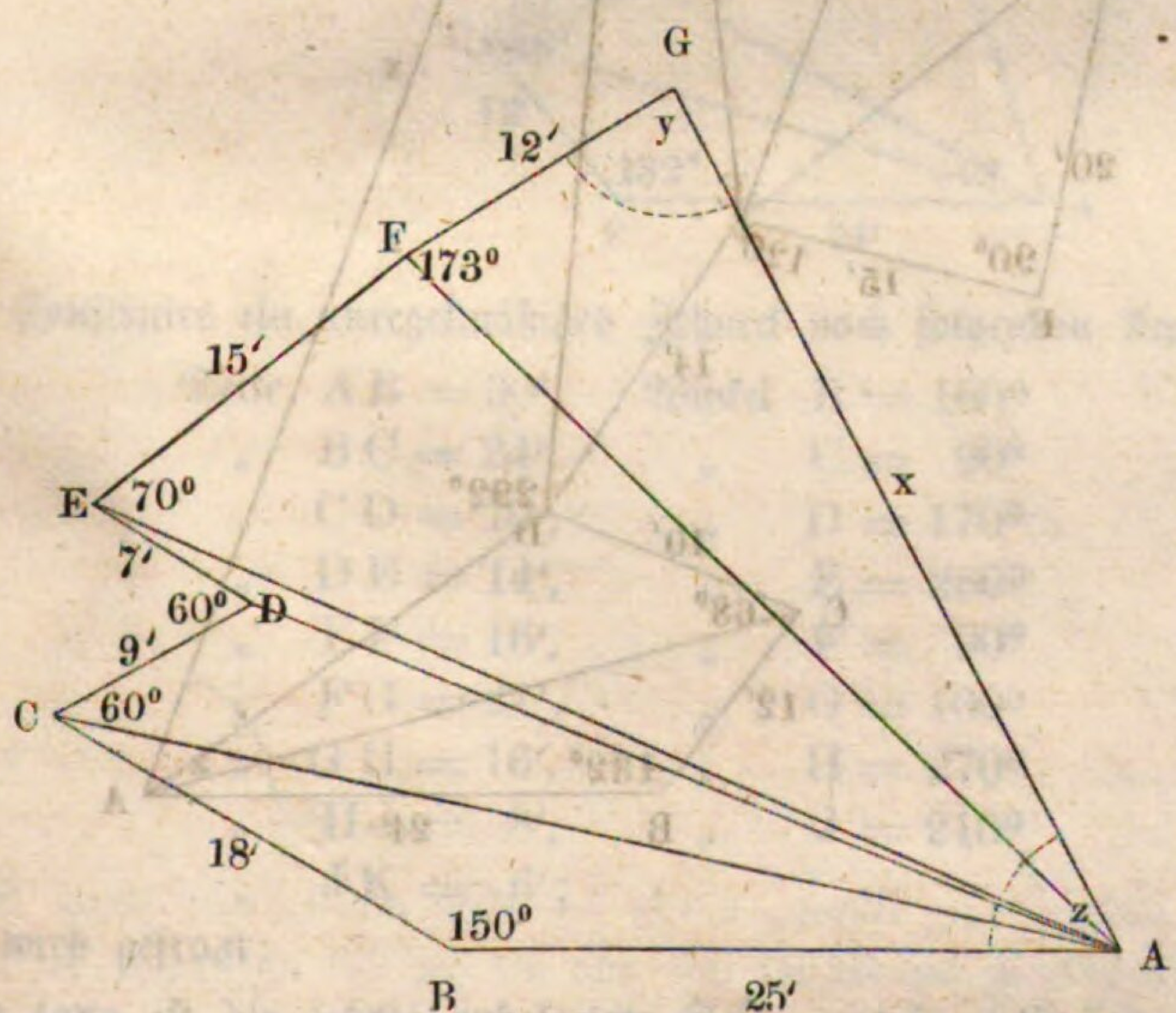
1. Construire ein unregelmäßiges Siebeneck nach folgenden Angaben:

Seite	AB = 25′,	Winkel	B = 150°
„	BC = 18′,	„	C = 60°
„	CD = 9′,	„	D = 300°
„	DE = 7′,	„	E = 70°
„	EF = 15′,	„	F = 173°
„	FG = 12′;		

es wird gefragt:

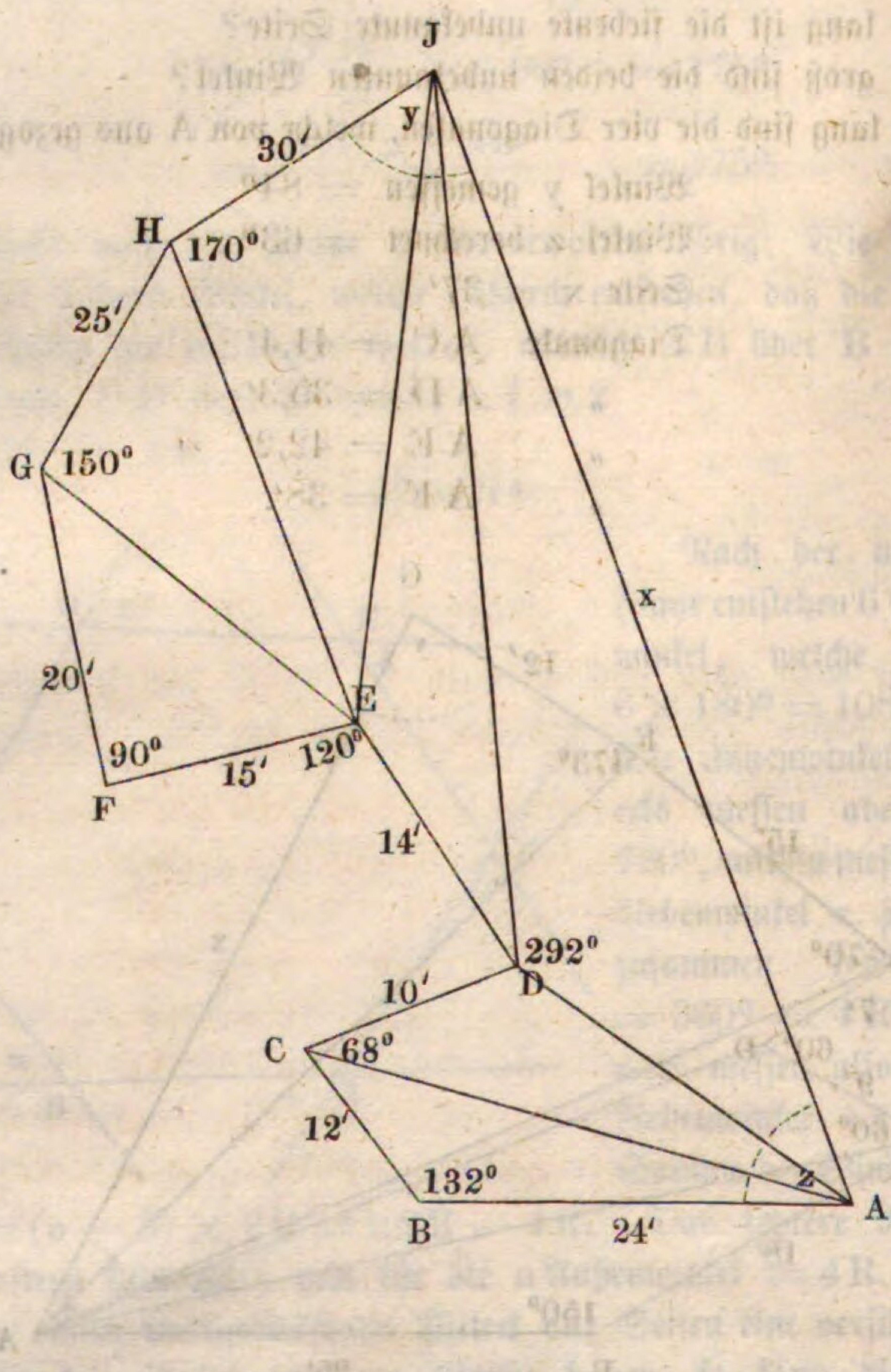
1) Wie lang ist die siebente unbekannte Seite?
2) Wie groß sind die beiden unbekannten Winkel?
3) Wie lang sind die vier Diagonalen, welche von A aus gezogen werden?

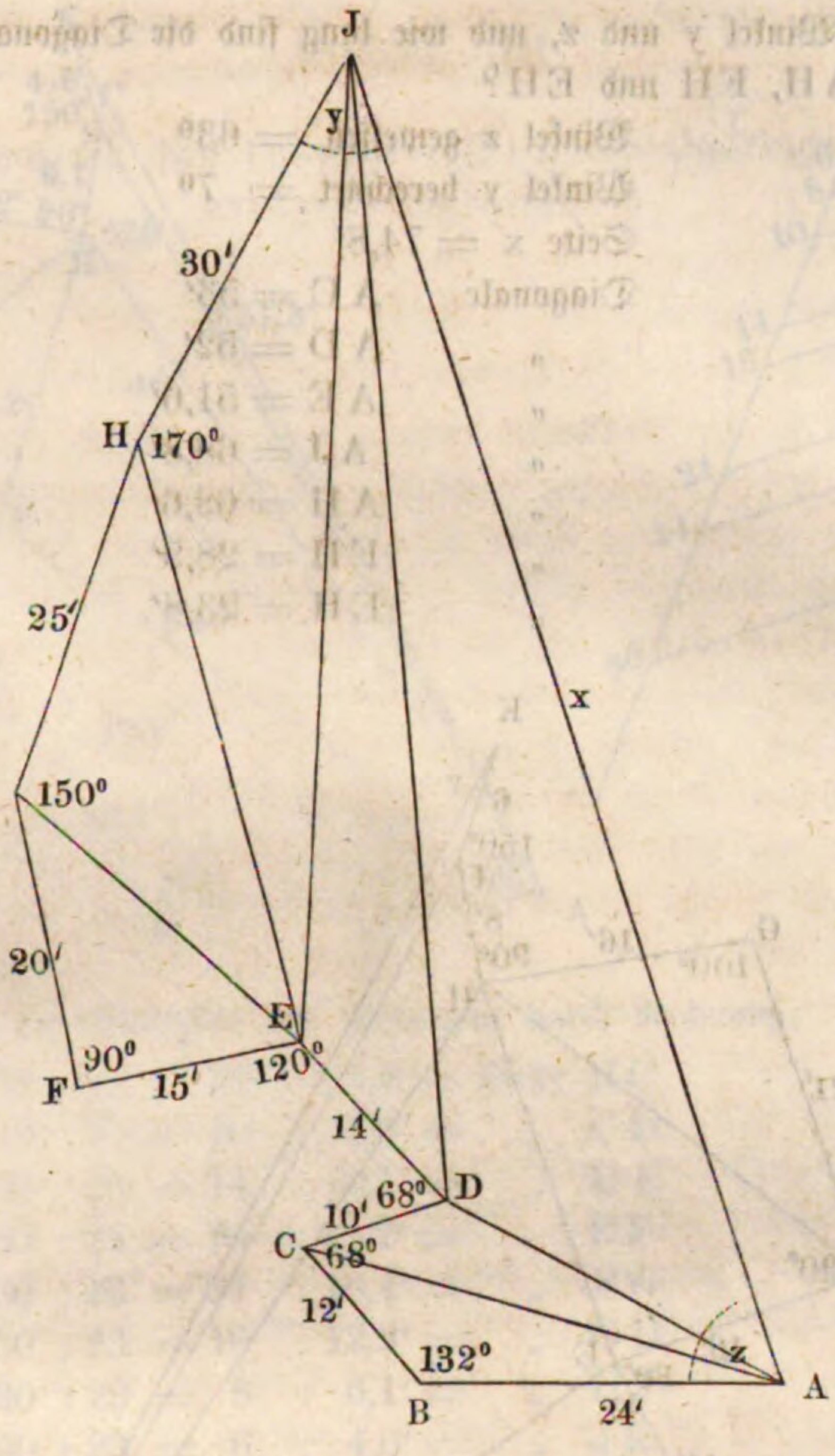
Winkel y gemessen		= 84°
Winkel z berechnet		= 63°
Seite x = 37′		
Diagonale	AC	= 41,4′
„	AD	= 35,3′
„	AE	= 42,2′
„	AF	= 38′.



2. Construire das vorgezeichnete unregelmäßige Vieleck! Es wird gefragt: Wie lang ist die neunte unbekannte Seite x, wie groß sind die beiden unbekannten Winkel und wie lang sind die sechs Diagonalen?

Seite x = 94,2′
Winkel y gemessen = 46°
Winkel z berechnet = 72°
Diagonale AC = 33,2′
" AD = 25,9′
" DJ = 77′
" EJ = 66,8′
" EH = 41,6′
" EG = 25′.





3. Construire ein unregelmäßiges Zehneck nach folgenden Angaben:

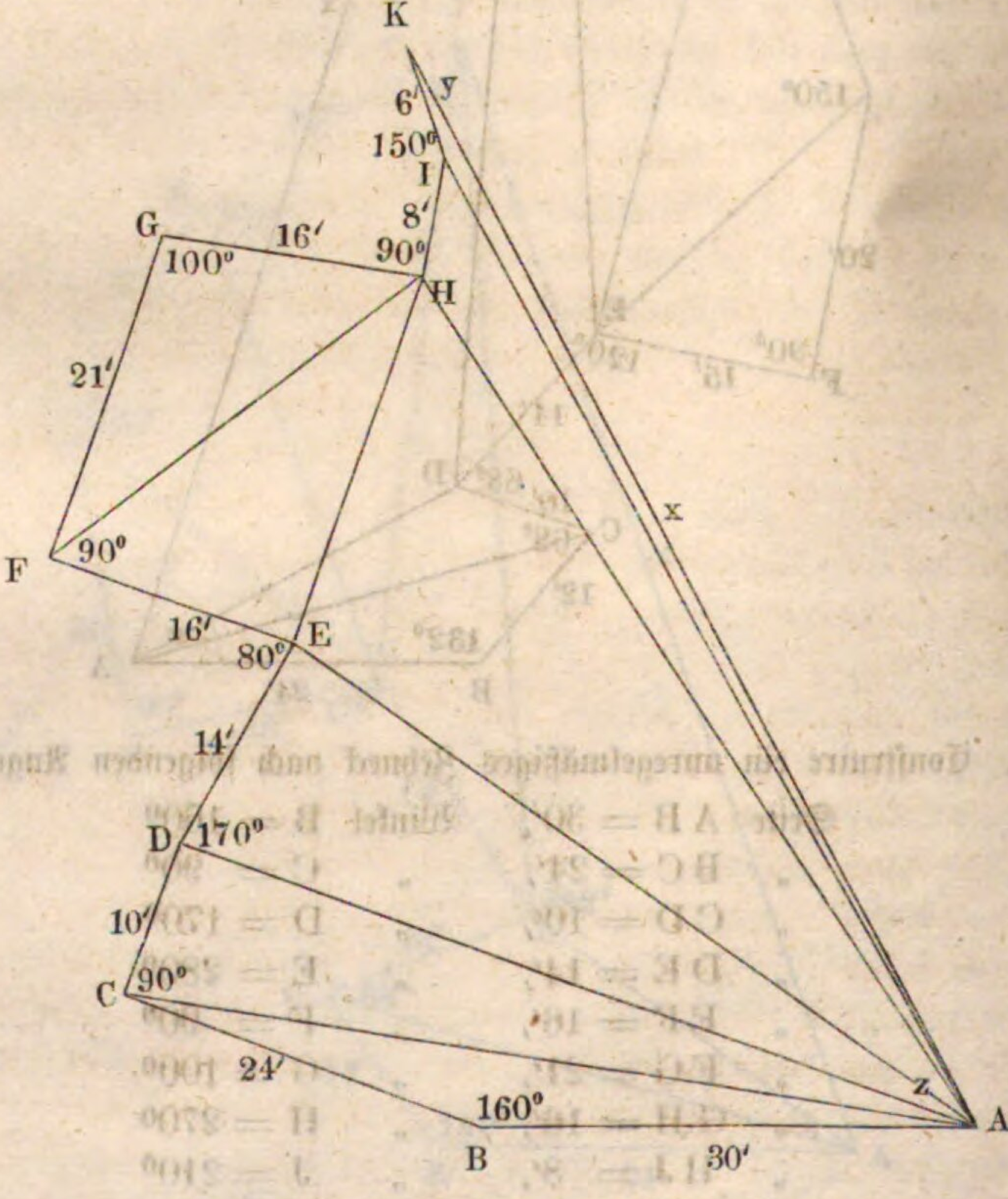
Seite	A B = 30′,	Winkel	B = 160°
„	B C = 24′,	„	C = 90°
„	C D = 10′,	„	D = 170°
„	D E = 14′,	„	E = 280°
„	E F = 16′,	„	F = 90°
„	F G = 21′,	„	G = 100°
„	G H = 16′,	„	H = 270°
„	H J = 8′,	„	J = 210°
„	J K = 6′;		

alsdann wird gefragt:

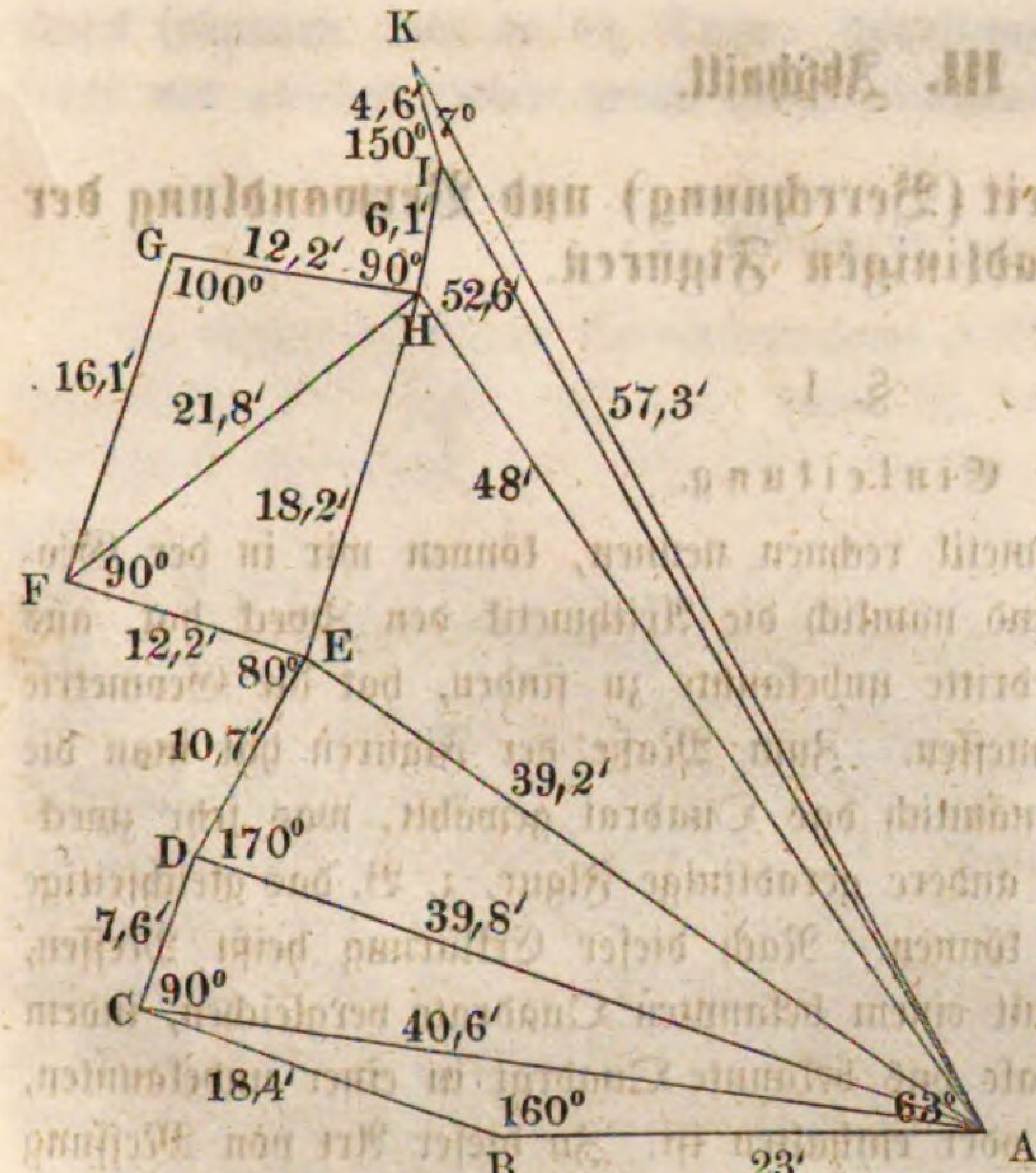
Wie lang ist die zehnte unbekannte Seite x, wie groß sind die beiden

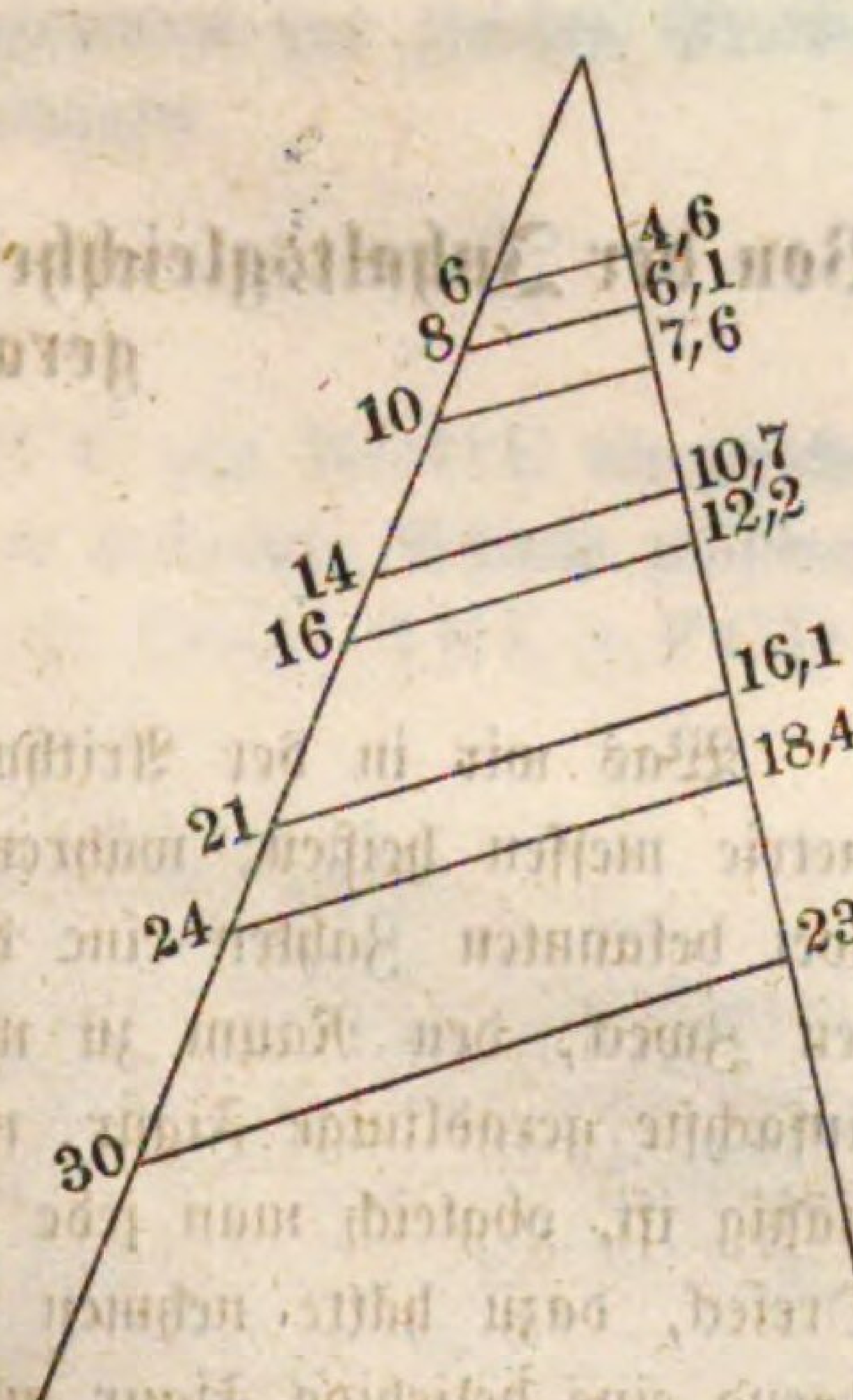
unbekannten Winkel y und z, und wie lang sind die Diagonalen AC, AD, AE, AJ, AH, FH und EH?

Winkel z gemessen = 63°
Winkel y berechnet = 7°
Seite x = 74,8′
Diagonale AC = 53′
" AD = 52′
" AE = 51,6′
" AJ = 68,8′
" AH = 62,6′
" FH = 28,5′
" EH = 23,8′.



4. Zeichne eine Figur, welche der eben construirten genau ähnlich ist, in dem Verhältniß der Grundlinie von 30′ zu 23′ und prüfe die Richtigkeit der Construction durch Zeichnung und Rechnung!





Beweis der Richtigkeit der Zeichnung durch Rechnung:

30' : 23' = 24' : 18,4' = Seite BC
30 : 23 = 10 : 7,6' = „ CD
30 : 23 = 14 : 10,7' = „ DE
30 : 23 = 16 : 12,2' = „ EF
30 : 23 = 21 : 16,1' = „ FG
30 : 23 = 16 : 12,2' = „ GH
30 : 23 = 8 : 6,1' = „ HJ
30 : 23 = 6 : 4,6' = „ JK
30 : 23 = 74,8 : 57,3' = „ KA = x
30 : 23 = 53 : 40,6' = Diagonale AC
30 : 23 = 52 : 39,8' = „ AD
30 : 23 = 51,6 : 39,2' = „ AE
30 : 23 = 68,8 : 52,7' = „ AJ
30 : 23 = 62,6 : 48' = „ AH
30 : 23 = 28,5 : 21,8' = „ FH
30 : 23 = 23,8 : 18,2' = „ EH.

III. Abschnitt.

Von der Inhaltsgleichheit (Berechnung) und Verwandlung der geradlinigen Figuren.

§. 1.

Einleitung.

Was wir in der Arithmetik rechnen nennen, können wir in der Geometrie messen heißen; während nämlich die Arithmetik den Zweck hat, aus zwei bekannten Zahlen eine dritte unbekannte zu finden, hat die Geometrie den Zweck, den Raum zu messen. Zum Maße der Figuren hat man die einfachste geradlinige Figur, nämlich das Quadrat gewählt, was sehr zweckmäßig ist, obgleich man jede andere geradlinige Figur, z. B. das gleichseitige Dreieck, dazu hätte nehmen können. Nach dieser Erklärung heißt Messen, irgend eine beliebige Figur mit einem bekannten Quadrate vergleichen, indem man untersucht, wie viele Male das bekannte Quadrat in einer unbekannten, begrenzten Fläche Raum hat oder enthalten ist. Zu dieser Art von Messung gebraucht man nicht das Quadrat selbst, welches das eigentliche Maß der Figuren ist, sondern nur die Seite desselben; man findet aber auch durch diese nicht den Inhalt der Figur selbst, sondern nur die Data zur Berechnung derselben. Das ganze Verfahren ist also keine unmittelbare, sondern eine mittelbare Messung; eine unmittelbare würde große Schwierigkeiten haben, ja, in vielen Fällen gar nicht auszuführen sein. Es ist daher auch gar nicht üblich, die Quadratmaße selbst zu verfertigen, sondern man begnügt sich mit den Seiten derselben, welche die gewöhnlichen Längenmaße sind.

Ist die auszumessende Figur selbst ein Quadrat, so ist ihre Höhe der Grundlinie gleich; ist also die Seite des Quadrats $= m$, so ist der Flächeninhalt $= m^2$. Ist die auszumessende Figur ein Parallelogramm, so können der Rhombus und die Rhomboide als ein Rechteck dargestellt werden. Ein Rechteck läßt sich aber sehr leicht mit einem Quadrat vergleichen und noch leichter mit der Seite desselben, so daß man nur die Längen der beiden ungleichen Seiten des Rechtecks mit einander zu multipliciren braucht, um den Flächeninhalt desselben zu erhalten. Da nun der Rhombus und die Rhomboide immer gleich Rechtecken sind, deren Grundlinien gleich den Grundlinien, und deren Höhen gleich den Höhen des Rhombus und der Rhomboide sind; so folgt hieraus, daß der Flächeninhalt eines Parallelogramms gefunden wird, wenn man seine Grundlinie mit der Höhe multiplicirt. Aus diesem wichten Satz können wir die Lehrsätze und Formeln für die Berechnung aller geradlinigen Figuren sehr leicht herleiten und stellen zu diesem

Zweck folgenden Satz an die Spitze: Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen haben gleiche Flächeninhalte.

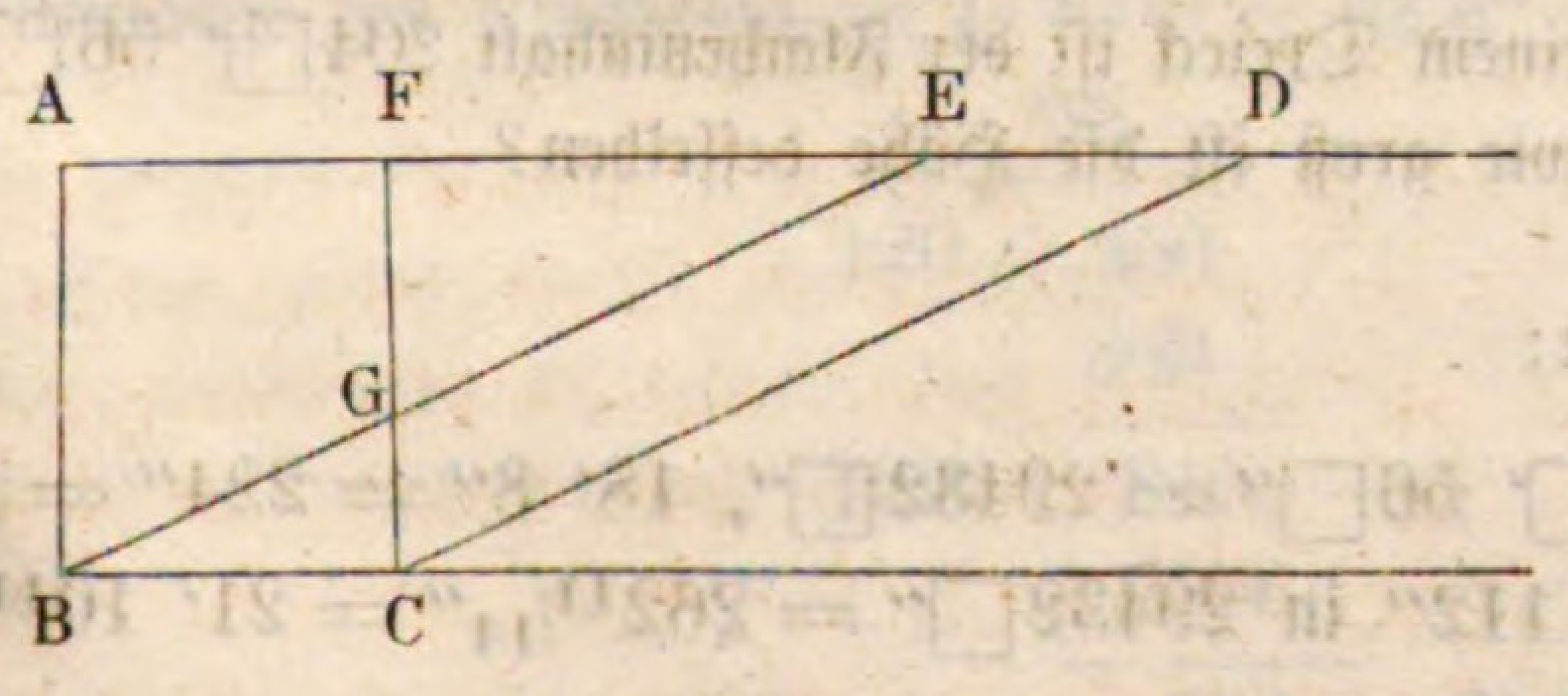
Beweis:

Es mögen die beiden Parallelogramme ABCF und BCDE die gleiche Grundlinie BC haben, und ihre Höhe sei der senkrechte Abstand zwischen den beiden Parallelen AD und BC; alsdann ist Dreieck ABE $\cong$ FCD; denn

$\left.\begin{array}{l} AB = FC \\ BE = CD \end{array}\right\}$ gegenüberstehende Seiten in Parallelogrammen

AE = FD; denn Gleiches, FE, zu Gleichem, AF und ED, gibt Gleiches. Subtrahiren wir von dem Dreieck ABE das $\triangle$ FGE, so bleibt Rest: das Trapez ABGF; subtrahiren wir ebenso vom $\triangle$ FCD das $\triangle$ FGE, so bleibt übrig das Trapez GCDE. Gleiches von Gleichem subtrahirt aber läßt gleiche Reste, also ist das Trapez ABGF = CDEG; addiren wir zu diesen beiden gleichen Trapezen dasselbe Dreieck BCG, so erhalten wir: Parallelogramm ABCF = BCDE, was zu beweisen war.

Im vorigen Abschnitt haben wir bewiesen, daß Parallelogramme durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt werden; soeben aber haben wir bewiesen, daß der Flächeninhalt eines Parallelogramms gefunden wird, wenn man seine Grundlinie mit der Höhe multiplicirt. Da demnach jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms ist, und der Flächeninhalt des Parallelogramms $= g \times h$ ist, so muß der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks $= \frac{g \times h}{2} = \frac{1}{2}\, g \, . \, h = g \times \frac{1}{2}\, h$ sein.



§. 2.

Berechnung der Dreiecke.

1) Die Grundlinie eines Dreiecks ist 21° 7′ 6″, die Höhe 12° 11′ 9″; wie groß ist sein Flächeninhalt?

Antwort:

$g = 259{,}5'$
$h = 155{,}75'$

12975
18165
12975
12975
2595

$2 \mid 40417{,}125 = 20208{,}5625' = 140\square^{0}\ 48\square'\ 81\square''$.

2) Ein dreieckiges Feld hat zur Grundlinie $19^{0}\ 8'$ und zur Höhe $14^{0}\ 11'$; wie viel ist für dieses Stück Land zu bezahlen, wenn die Quadratruthe 18 ₰ 25 *gr* kostet?

Antwort:

$h = 179'$
$\frac{1}{2}g = 118'$

1432
179
179

$21122\square'$.

$144\square' : 18\frac{5}{6} = 21122\square' : x$

144	113	113
6		63366
864		21122
		21122

$864 \mid 2386786$
$= 2762$ ₰ 14 *gr* $6\frac{1}{6}$ ₰.

3) Von einem Dreieck ist der Flächeninhalt $204\square'\ 56\square''$, die Grundlinie $18'\ 8''$; wie groß ist die Höhe desselben?

Antwort:

$204\square'\ 56\square'' = 29432\square''$, $18'\ 8'' = 224'' = g$;

$\frac{1}{2}g = 112''$ in $29432\square'' = 262\frac{11}{14}'' = 21'\ 10\frac{11}{14}''$.

4) Von einem Dreieck ist eine Seite $14'$, eine andere $9'$ lang; die zu jener Seite gehörende Höhe ist $3'\ 9''$ lang; wie groß ist die zu der letztern Seite gehörende Höhe und wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks?

Antwort:

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{14' \times 3'9''}{2} = 7' \times 3'9'' = 7' \times 3{,}75' = 26{,}25\square'.$$

Die gesuchte Höhe = 4,5′ in 26,25□′ = 5,833′ = 5′ 10″

```
225
---
 375
 360
 ---
  150
  135
  ---
  150.
```

5. Wie groß ist die Höhe eines Rechtecks von 9′ 5″ Grundlinie, wenn dasselbe an Flächeninhalt gleich ist einem Dreieck von 16′ Grundlinie und 7′ 10″ Höhe?

$$\frac{16' \times 7'\,10''}{2} = 8' \times 7'\,10'' = 96'' \times 94'' = 9024\square''$$

= dem Flächeninhalt des Dreiecks und ebenfalls des Rechtecks.

Die Höhe des Rechtecks ist = 113 in 9024□″ = $79^{97}/_{113}$″.

6) Wie lang ist die Seite eines Quadrats, welches denselben Flächeninhalt hat, wie ein Dreieck von 18′ 9″ Grundlinie und 3′ Höhe?

Flächeninhalt des Dreiecks = $^1/_2\,h \times g$.

$$^1/_2\,h = 18''$$

$$g = 225''$$

$$18'' \times 225'' = 4050\square'' = 28\square'\ 18\square''.$$

Die Seitenlänge des Quadrats = $\sqrt{4050}$ = 63,6″ = 5′ 3,6″.

```
          36
     ---------
   120 : 450
         369
     ---------
  1260 : 8100
         7596
        ------
         504 = Rest.
```

7) Von einem rechtwinkeligen Dreieck haben die beiden Katheten eine Länge von 16′ 8″ und 9′ 4″; wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks und wie lang ist die dritte unbekannte Seite?

Flächeninhalt = 100″ × 112″ = 11200□″.

$$x^2 = (200^2 + 112^2)$$

$$x = \sqrt{5|25|44} = 229{,}22'' = 19'\ 1{,}22''$$

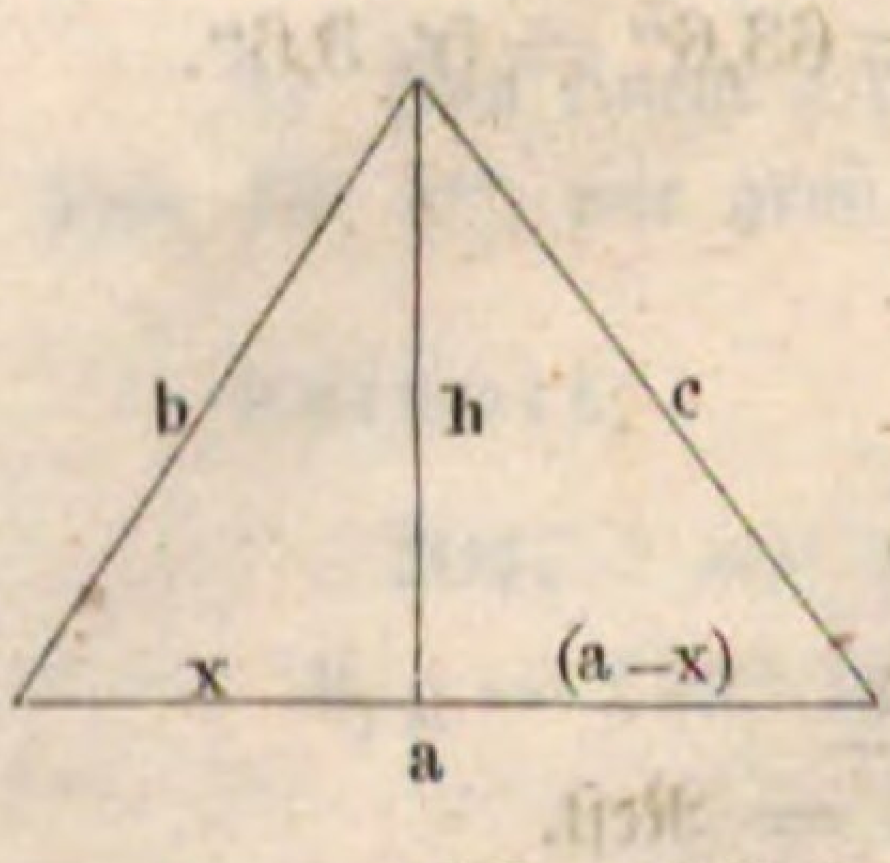
```
          4
   400 : 12544
          8000
          4544
           400
   440 : 4144
         3960
           184
            81
  4580 : 10300
          9164
 45840 | 113600
          91680
          21920 = Rest.
```

8) Die drei Seiten eines Dreiecks haben eine Länge von 13′ 4″, 10′ 6″ und 6′ 8″; die zu der ersten Seite gehörende Höhe ist 3′ lang; wie lang sind die beiden andern Höhen?

Flächeninhalt des Dreiecks $= 160'' \times 18'' = 2880\square''$.

Die Höhe auf 10′ 6″ $= 63$ in $2880'' = 45\frac{5}{7}''$.

Die Höhe auf 6′ 8″ $= 40$ in $2880'' = 72'' = 6'$.

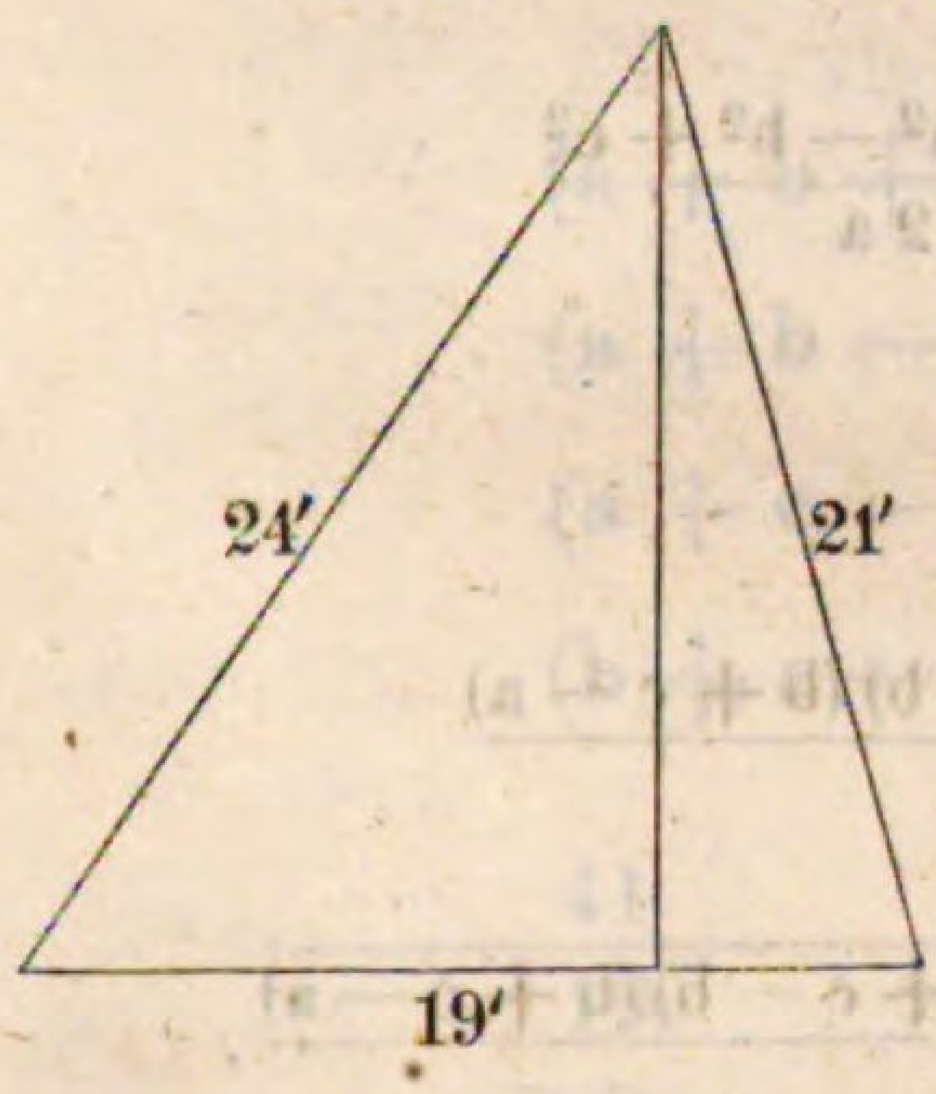


Man ist aber auch im Stande, ohne die Höhe zu kennen, den Flächeninhalt eines Dreiecks aus seinen drei Seiten zu berechnen. Eine vollgültige Formel liefert uns folgende Betrachtung:

$$b^2 = h^2 + x^2$$
$$c^2 = h^2 + (a - x)^2 = h^2 + a^2 - 2ax + x^2$$
$$b^2 - c^2 = -a^2 + 2ax$$
$$+ a^2 \qquad + a^2$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ax$$
$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Aufgaben:

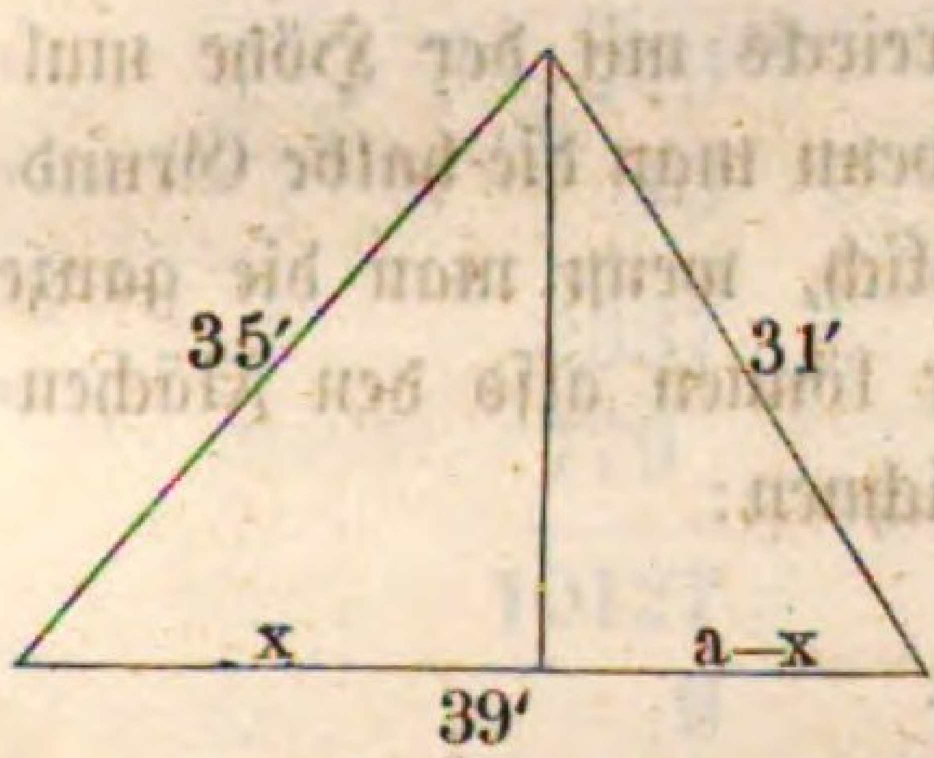
1) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 19, 21 und 24′ lang, die Grundlinie soll 19′ sein; man berechne die Länge des durch ein Perpendikel abgeschnittenen Stücks!



$$a^2 = 19' \times 19' = 361 \square'$$
$$b^2 = 24' \times 24' = 576 \text{ „}$$
$$\overline{\quad 937 \text{ „}}$$
$$c^2 = 21' \times 21' = 441 \text{ „}$$
$$2a = 38 \mid 496 \square' = 13{,}05'$$

38
116
114
200
190
10 = Rest.

2) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 31, 35 und 39′ lang, auf die Seite von 39′ wird ein Perpendikel gefällt. Es wird gefragt: Wie lang sind die beiden durch das Perpendikel getheilten Stücke der Grundlinie?



$$a^2 = 39' \times 39' = 1521 \square'$$
$$b^2 = 35' \times 35' = 1225 \text{ „}$$
$$\overline{\quad 2746 \text{ „}}$$
$$c^2 = 31' \times 31' = 961 \text{ „}$$
$$2a = 2 \times 39' = 78' \mid 1785 \square' = 22{,}88' = x$$

156
225
156
690
624
660
624
36 = Rest.

$$39' - 22{,}88' = 16{,}12' = a - x.$$

Weitere Entwickelung der Formel für die Berechnung der Dreiecke aus ihren drei Seiten:

$$h^2 = b^2 - x^2 = (b + x)(b - x)$$

$$h^2 = \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) \cdot \left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)$$

$$h^2 = \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a} \times \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$h^2 = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2a} \times \frac{c^2 - (a-b)^2}{2a}$$

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2a}$$

$$h = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2a}}.$$

Wir haben eben gesehen, daß der Flächeninhalt eines Dreiecks gefunden wird, wenn man entweder die Grundlinie des Dreiecks mit der Höhe multiplicirt und das Product durch 2 dividirt, oder wenn man die halbe Grundlinie mit der ganzen Höhe multiplicirt, oder endlich, wenn man die ganze Grundlinie mit der halben Höhe multiplicirt. Wir können also den Flächeninhalt eines Dreiecks nach dieser Methode so bezeichnen:

$$\frac{a \times h}{2} = \frac{a}{2} \times h = a \times \frac{h}{2}.$$

Da nun $h =$ ist: $\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2a}}$,

so ist der Flächeninhalt des Dreiecks

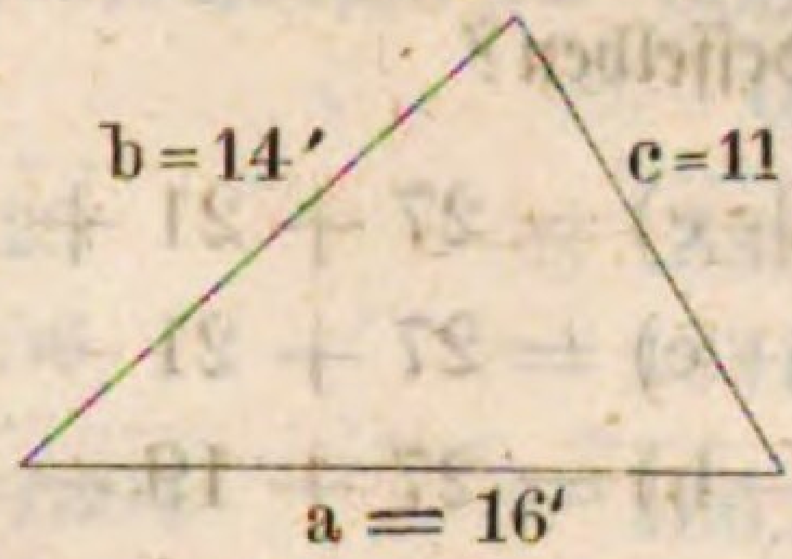
$$= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{2a}}.$$

Nun ist aber $\frac{a}{2} \times \frac{1}{2a} = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}$; mithin ist der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks

$$= 1/4 \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Aufgaben:

1) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen drei Seiten 16, 14 und 11′ lang sind?



(a + b + c) = 16 + 14 + 11 = 41′

(a + b — c) = 16 + 14 — 11 = 19

(a + c — b) = 16 + 11 — 14 = 13

(b + c — a) = 14 + 11 — 16 = 9

```
     41
     19
    ---
    369
     41
    ---
    779
     13
    ----
   2337
    779
   -----
  10127
      9
```

√9,11,43 = 301,899 □′ × 0,25 = 75,7474 □′ Flächeninhalt.

```
       9
600 :  1143
        601
6020 : 54200
       48224
60360 : 597600
        543240
603780 : 5427900
         5434100
            6201  Rest.
```

2) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 27, 21 und 19′ lang; wie groß ist der Flächeninhalt desselben?

$$(a + b + c) = 27 + 21 + 19 = 67$$
$$(a + b - c) = 27 + 21 - 19 = 29$$
$$(a + c - b) = 27 + 19 - 21 = 25$$
$$(b + c - a) = 21 + 19 - 27 = 13$$

67
29
———
603
134
———
1943
25
———
9715
3886
———
48575
13
———
145725
48575

$\sqrt{63,14,75} = 794,6\,\square'$
49
———
140 : 1414
1341
———
1580 : 7375
6336
———
15880 : 103900
95316
———
8584 = Rest.

794,6
0,25
———
39730
15892
———
198,650 □′ = Inhalt.

3) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 15,7′, 21,5′ und 24,4′ lang; wie groß ist der Flächeninhalt?

$$(a + b + c) = 15,7 + 21,5 + 24,4 = 61,6$$
$$(a + b - c) = 15,7 + 21,5 - 24,4 = 12,8$$
$$(a + c - b) = 15,7 + 24,4 - 21,5 = 18,6$$
$$(b + c - a) = 21,5 + 24,4 - 15,7 = 30,2$$

61,6	$\sqrt{44,29,04,98,56} =$	665,51
12,8	36	0,25
4928	120 : 829	332755
1232	756	133102
616	1320 : 7304	166,3775 □′ Flächeninhalt.
78848	6625	
18,6	13311 : 67998	
473088	66525	
630784		
78848	133100 : 147356	
	133101	
14665728		
	14255 = Rest.	
30,2		
29331456		
43997184		
442904,9856		

Setzt man nun für die halbe Summe der drei Seitenlängen des Dreiecks, also $\frac{1}{2}(a + b + c) = S$, so läßt sich diese wichtige Formel noch bequemer auf folgende Weise ausdrücken:

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist

$$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}.$$

Aufgaben:

1) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 21, 17 und 26′ lang; wie groß ist der Flächeninhalt dieser Figur?

a. Nach der ersten Methode, also

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

$$(a + b + c) = 21 + 17 + 26 = 64$$

$$(a + b - c) = 21 + 17 - 26 = 12$$

$$(a + c - b) = 21 + 26 - 17 = 30$$

$$(b + c - a) = 17 + 26 - 21 = 22$$

64	$\sqrt{50,68,80} =$	711,9 □′
12	49	0,25
128	140 : 168	35595
64	141	14238
768	1420 : 2780	177,975 □′
30	1421	
23040	14220 : 135900	
22	128061	
46080	7839 = Rest.	
46080		
506880		

b. Nach der zweiten Methode:

$$\sqrt{S.(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$S = \frac{21+17+26}{2} = 32$$

$$S - a = 32 - 21 = 11$$

$$S - b = 32 - 17 = 15$$

$$S - c = 32 - 26 = 6$$

32	$\sqrt{3,16,80} =$ 177,98 □′
11	1
32	20 : 216
32	189
352	340 : 2780
15	2429
1760	3540 : 35100
352	31941
5280	35580 : 315900
6	284704
31680	31196 = Rest.

2) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 46, 37 und 40′ lang; wie groß ist der Flächeninhalt desselben?

$$(a + b + c) = 46 + 37 + 40 = 123$$

$$(a + b - c) = 46 + 37 - 40 = 43$$

$$(a + c - b) = 46 + 40 - 37 = 49$$

$$(b + c - a) = 37 + 40 - 46 = 31$$

123	$\sqrt{8,03,39,91}$ =	2834,4
43	4	0,25
369	40 : 403	141720
492	384	56688
5289	560 : 1939	708,6 □'.
49	1689	
47601	5660 : 25091	
21156	22656	
259161	56680 : 243500	
31	226736	
259161	16764 = Rest.	
777483		
8033991		

3) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 33, 19 und 27' lang; wie lang sind die drei Senkrechten in demselben?

a. Nach der entwickelten Formel berechnet ist

$$h = \sqrt{\frac{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}{2\,a}}$$

$$(a + b + c) = 33 + 19 + 27 = 79$$

$$(a + b - c) = 33 + 19 - 27 = 25$$

$$(a + c - b) = 33 + 27 - 19 = 41$$

$$(b + c - a) = 19 + 27 - 33 = 13$$

$$2\,a = 2 \times 33 = 66$$

$$2\,b = 2 \times 19 = 38$$

$$2c = 2 \times 27 = 54.$$

79
25

394
158

1974
41

1974
7896

80934
13

242802
80934

1052142

$\sqrt{1,05,21,42} = 1025,7$
1
---
200 : 521
404

2040 : 11742
10200

1542
25

20500 : 151700
143549

8151 = Rest; also ist

die Senkrechte auf a = 66 : 1025,7 = 15,54′
66

365
330

357
330
---
27 = Rest;

die Senkrechte auf b = 38 : 1025,7 = 26,99′
76

265
228

377
342

350;

die Senkrechte auf c = 54 : 1025,7 = 18,99′
54

485
432

537
486

510.

b. Indirect aus dem Flächeninhalte:

$$S = \frac{33 + 19 + 27}{2} = 39{,}5$$

$$(S - a) = 39{,}5 - 33 = 6{,}5$$

$$(S - b) = 39{,}5 - 19 = 20{,}5$$

$$(S - c) = 39{,}5 - 27 = 12{,}5$$

39,5	$\sqrt{6,57,92,18,75} = 256{,}499 \square'$
6,5	4
1975	40 : 257
2370	225
25675	500 : 3292
20,5	3036
128375	5120 : 25618
51350	20496
5263375	51280 : 512275
12,5	461601
26316875	512980 : 5067400
10526750	4616901
5263375	450499 = Rest; also ist
65792,1875	

die Senkrechte $x = 16{,}5 : 256{,}499 = 15{,}54'$

" $y = 9{,}5 : 256{,}499 = 26{,}99'$

" $z = 13{,}5 : 256{,}499 = 18{,}99'$.

4) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 42, 36 und 27′ lang; wie lang sind die drei Senkrechten in demselben?

$$(a + b + c) = 42 + 36 + 27 = 105$$

$$(a + b - c) = 42 + 36 - 27 = 51$$

$$(a + c - b) = 42 + 27 - 36 = 33$$

$$(b + c - a) = 36 + 27 - 42 = 21$$

105	$\sqrt{3,71,10,15} = 1926,399$ □′
51	1
105	20 : 271
525	261
5355	380 : 1010
33	764
16065	3840 : 24615
16065	23076
176715	38520 : 153900
21	115569
176715	385260 : 3833100
353430	3467421
3741015	3852780 : 36567900
	34675101
	1892799 = Rest; daher

Senkrechte auf a = 84 : 1926,399 = 22,933′

" " b = 72 : 1926,399 = 26,755′

" " c = 54 : 1926,399 = 35,674′.

5) Ein dreieckiges Feld wird von drei Zäunen, welche 17⁰ 5′, 21⁰ 9′ und 25⁰ lang sind, begrenzt; die Quadratruthe wird für 42 ℔ 17 Sgr. verkauft; wie viel hat der Käufer zu bezahlen?

$17^0\ 5' = 209'$

$21^0\ 9' = 261'$

$25^0 \quad = 300'$

$$S = \frac{209 + 261 + 300}{2} = 385$$

$(S - a) = 385 - 209 = 176$

$(S - b) = 385 - 261 = 124$

$(S - c) = 385 - 300 = 85$

385
176
2310
2695
385
67760
124
271040
135520
67760
8402240
85
42015200
67217920
714190400

$\sqrt{7,14,19,04,00} = 26724,34$ □′
4
40 : 314
276
520 : 3819
3689
5340 : 13004
10684
53440 : 232000
213776
534480 : 1822400
1603449
5344860 : 21895100
21379456
515644 = Rest.

144 □′ : 42 Thlr. 17 Sgr. = 26724,34 □′ : x
30 1277
1277 18707038
18707038
5344868
2672434
144 : 34126982,18 = 236992,93 Sgr.
= 7899 Thlr. 22 Sgr. 11 Pf. = Kaufpreis.

§. 3.

Berechnung der Vierecke.

I. Berechnung des Quadrats.

Formel: $J = S \times S = S^2$.

1) Die Seite eines Quadrats ist $3^0\ 7'\ 8''$ lang; wie groß ist der Flächeninhalt desselben?

$3^0\ 7'\ 8'' = 524''$
× 524
2096
1084
2620
274936 □″ = 23 □⁰ 34 □′ 112 □″.

2) Die drei Seiten eines Dreiecks sind $5\frac{3}{4}'$, $3'\ 8''$ und $4{,}078'$ lang; wie groß ist die Summe der drei Quadrate, die man über diese Seiten construiren kann?

$$5\tfrac{3}{4}^2 = 5{,}75' \times 5{,}75' = 33{,}0625\square'$$
$$3'\ 8''^2 = 3{,}66' \times 3{,}66' = 13{,}3956\square'$$
$$4{,}078' \times 4{,}078' = 16{,}630084\square'$$
$$\text{Summa} = 63{,}088184\square'.$$

3) Die Flächeninhalte von sechs Quadraten sind folgende:

a) $100\square'$, c) $0{,}25\square'$, e) $\frac{9}{16}\square$meilen,
b) $1\frac{7}{9}\square^0$, d) $1\square^0\ 25\square'$, f) $2\frac{7}{9}\square$zoll;

wie lang sind die Seiten dieser Quadrate?

Seite $a = \sqrt{100\square'} = 10'$,
" $b = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}^0 = 1^0\ 44'$,
" $c = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5'$,
" $d = \sqrt{169} = 13'$,
" $e = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ Meile,
" $f = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ Zoll $= 1''\ 8'''$.

4) Wie lang ist die Seite eines $11\square^0\ 138\square'\ 36\square''$ großen Quadrats?

$$11\square^0\ 138\square'\ 36\square'' = 248004\square''$$
$$\sqrt{248004} = 498'' = 3^0\ 5'\ 6''.$$

16
80 : 880
801
980 : 7904
7904.

5) Der Inhalt eines Quadrats ist $14\square^0\ 100\square'$, der eines andern $29\square'\ 49\square''$ und der eines dritten $52\square''\ 81\square'''$; wie lang ist die Seite jedes einzelnen Quadrats?

$$\sqrt{29\square'\ 49\square''} = \sqrt{4225\square''} = 65'' = 5'\ 5''$$

36
120 : 625
625

$$\sqrt{14\square^0\ 100\square'} = \sqrt{2116\square'} = 46' = 3^0\ 10'$$

16
80 : 516
516

$$\sqrt{52\square''\ 81\square'''} = \sqrt{7569\square'''} = 87''' = 7''\ 3'''$$

64
160 : 1169
1169

6) Die Flächeninhalte zweier Quadrate sind $4\square'$ und $14\square'\ 100\square''$; um wie viele Zoll sind ihre Seiten von einander verschieden?

Die Seite des ersten Quadrats ist

$$= \sqrt{4\square'} = 2' = 24''.$$

Die Seite des zweiten Quadrats ist

$$= \sqrt{2116\square''} = 46''$$

16 — 24''
80 : 516 22'' = Differenz.
516

7) Die Seite eines Quadrats ist 18' lang; wie lang ist die Diagonale desselben?

$$x = \sqrt{2 \cdot 18^2} = \sqrt{648} = 25{,}455'$$

4
40 : 248
225
500 : 2300
2016
5080 : 28400
25425
50900 : 297500
254525

8) Die Diagonale eines Quadrats ist 46' lang; wie lang ist die Seite des Quadrats?

$$x = \sqrt{\frac{46^2}{2}}$$

$$x = \sqrt{1058} = 32{,}527'$$

9

60 : 158
124

640 : 3400
3225

6500 : 17500
13004

65040 : 449600
455329

5729 Rest.

9) Wie groß muß die Seite eines Quadrats genommen werden, dessen Inhalt $^4/_9$ von dem Inhalte eines andern, 18′ langen Quadrats beträgt?

$$18^2 = 18 \times 18 = 324$$
$$^4/_9$$
$$9\ )\ 1296 = 144$$

$$\sqrt{144} = 12'$$
144

II. Berechnung des Rhombus.

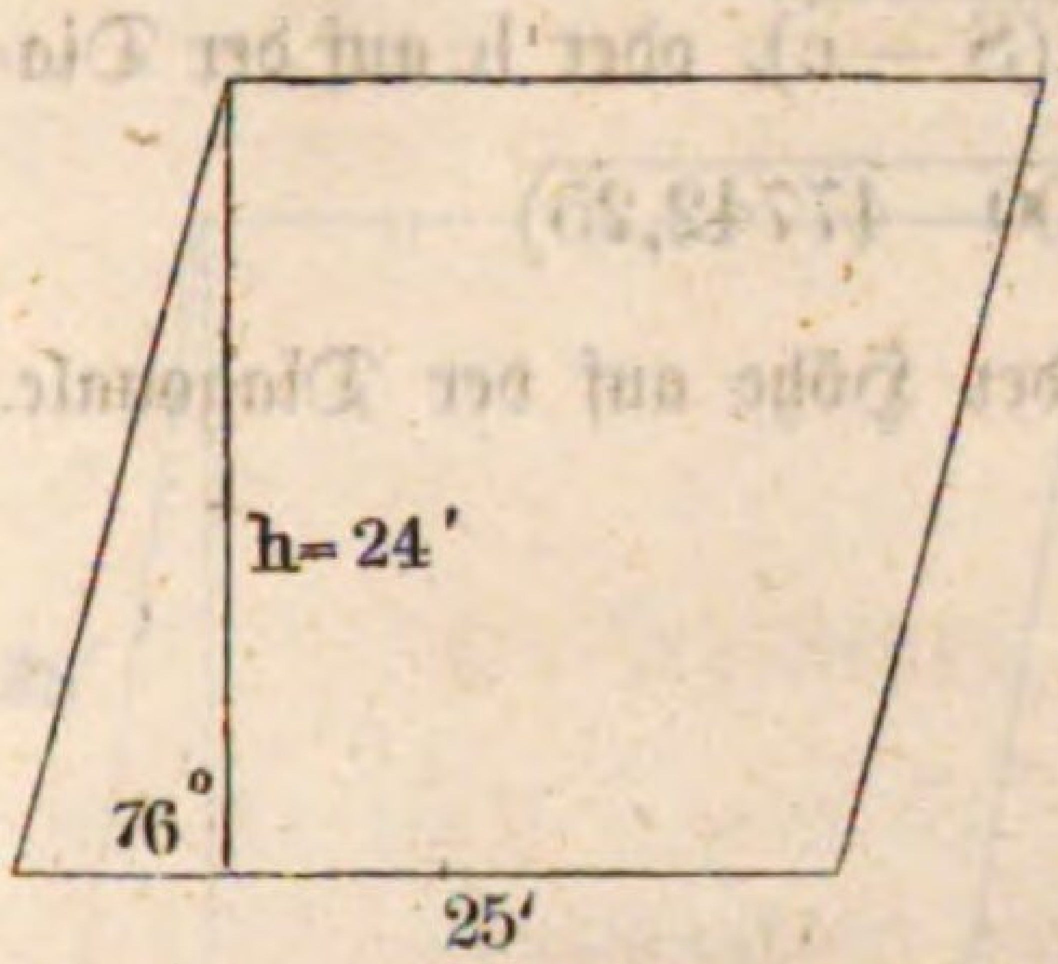
1) Die Grundlinie eines Rhombus ist $9^0\ 7'$ lang, die Höhe beträgt $5^0\ 4'$; wie groß ist der Flächeninhalt?

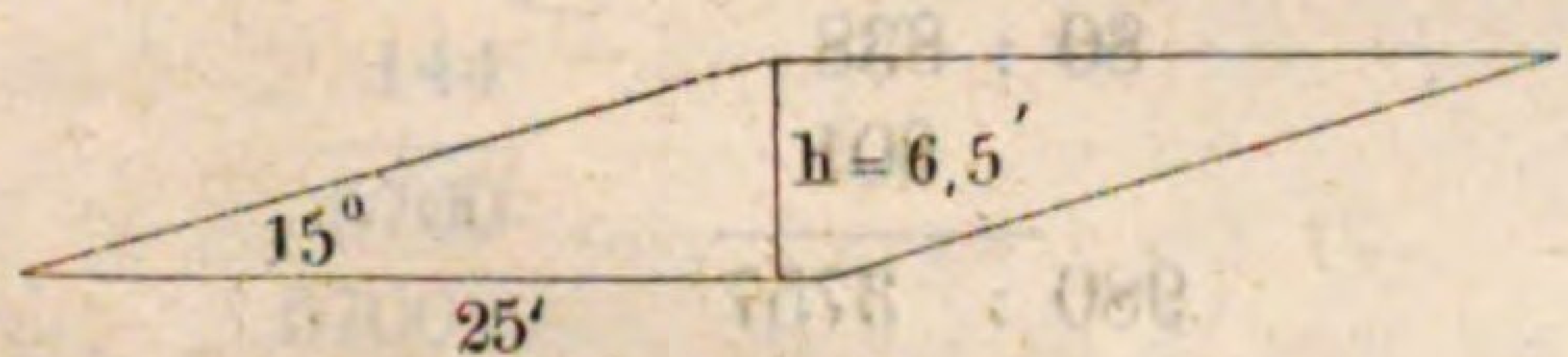
$$9^0\ 7' = 115'$$
$$5^0\ 4' = \ \ 64'$$

460
690

$$144 : 7360\square' = 51\square^0\ 16\square'$$
720
160
144
16.

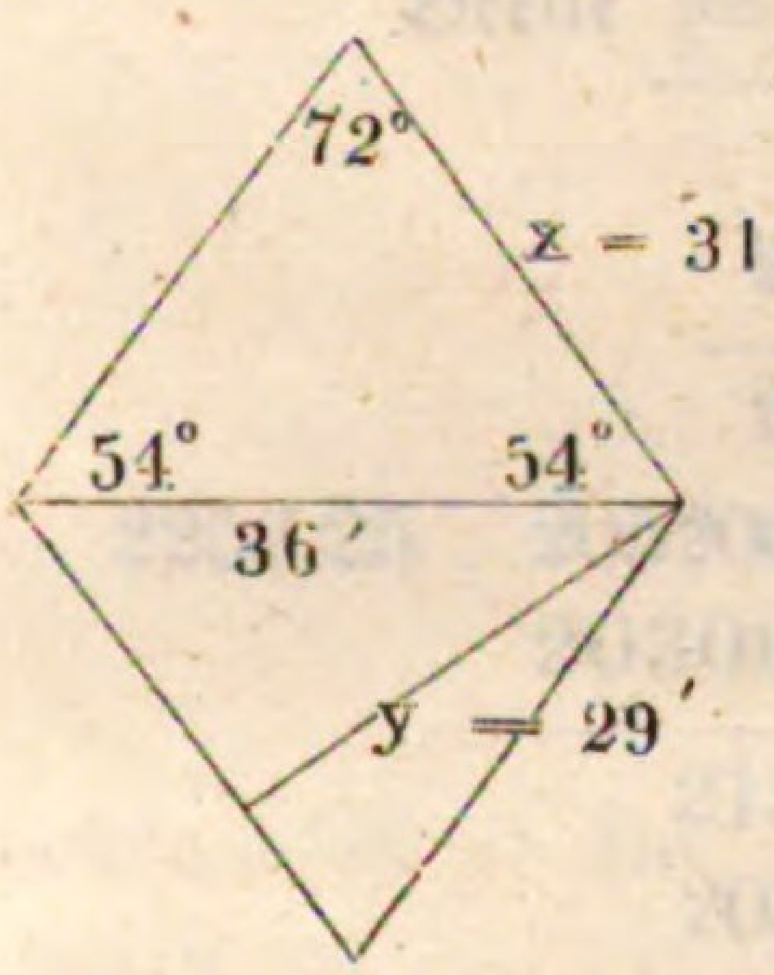
2) Zwei Rhomben haben gleiche Seiten von 25′ Länge; in dem einen schließen die Seiten einen Winkel von 76^0, in dem andern einen Winkel von 15^0 ein; wie verhalten sich die Flächeninhalte beider Figuren zu einander?





$25' \times 24' = 600\square'$,

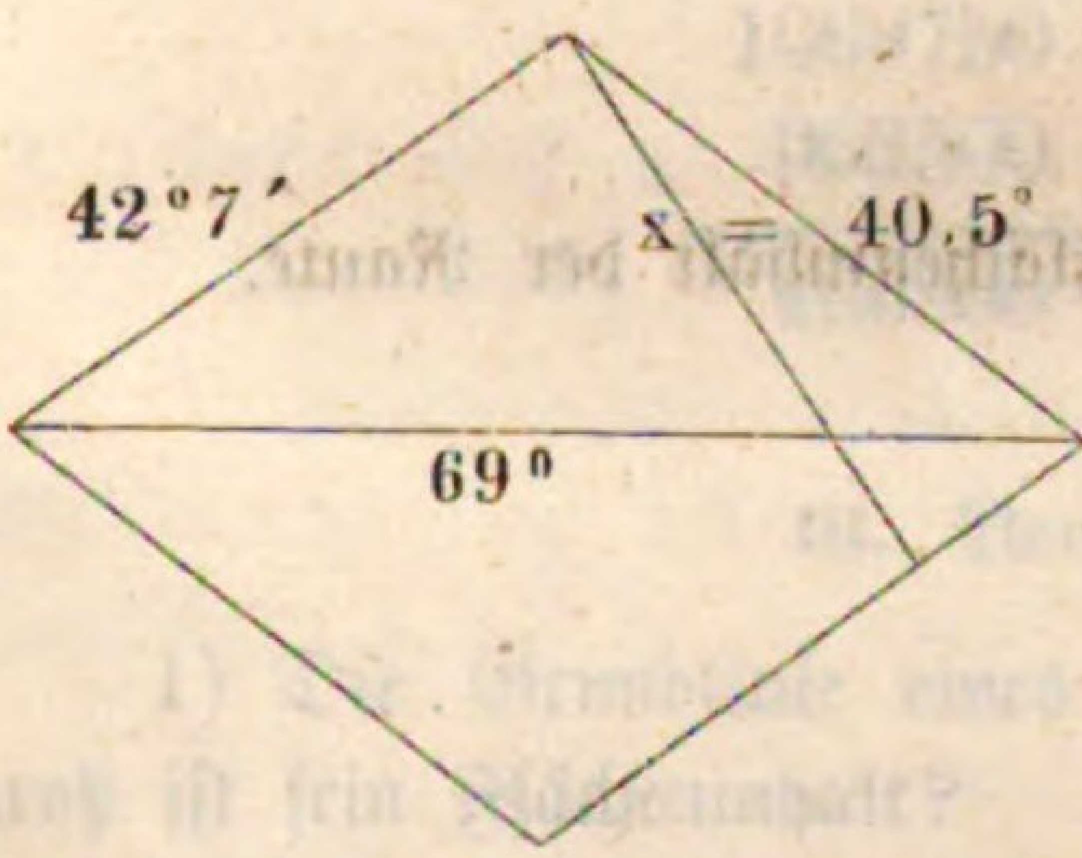
$25' \times 6{,}5' = 162{,}5\square'$; es verhalten sich also die Flächeninhalte dieser beiden Figuren zu einander wie 600 : 162,5, oder wie ihre Höhen 24 : 6,5.



3) Die Diagonale in einem Rhombus ist 36′ lang, der gegenüberstehende Winkel 72⁰ groß; wie lang sind die Seiten der Figur und wie groß ist ihr Flächeninhalt?

Flächeninhalt $= 31' \times 29' = 899\square'$
$= 6\square^0\ 35\square'$.

Seite $x = 31'$.



4) Die Diagonale eines Rhombus ist 69⁰ lang, die Seite 42⁰ 7′; wie groß ist der Fächeninhalt dieser Raute?

Flächeninhalt $= 42{,}583^0 \times 40{,}5^0$
$= 1724{,}6115\square^0$.



5) Ein Bauplatz, der die Form einer Raute, eine Seite von 45 Ruthen und eine Diagonale von 36⁰ 5′ Länge hat, wird pro □fuß mit 22 Sgr. bezahlt; wie groß ist die Kaufsumme?

Flächeninhalt $= 2\sqrt{S.(S-a)(S-b)(S-c)}$, oder h auf der Diagonale ist $= \sqrt{540^2 - \left(\frac{36^0\,5'}{2}\right)^2} = \sqrt{(291600 - 47742{,}25)}$

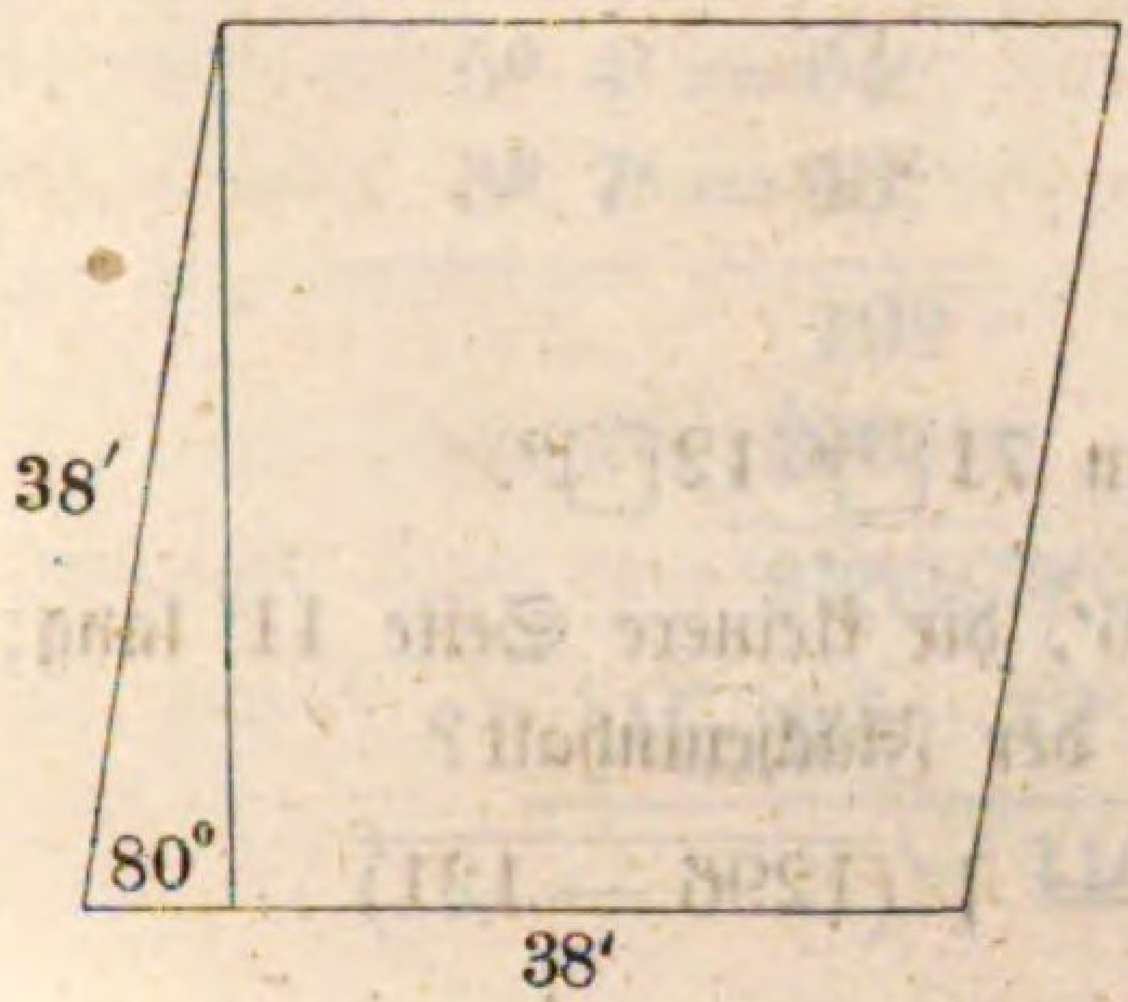
$= \sqrt{24{,}38{,}57{,}75} = 493{,}819'$ = der Höhe auf der Diagonale.

16
80 : 838
801
980 : 3757
2949
9860 : 80875
78944
98760 : 193100
98761
987620 : 9433900
8888661
545239 = Rest.

493,819
437
3456733
1481457
1975276
215798,903 □fuß = Flächeninhalt der Raute.
22 Sgr.
431597806
431597806
4747575,866 Sgr.

= 158252 Thlr. 15 Sgr. 10 Pf. = Kaufpreis.

6) Ein Zimmer hat die Form einer Raute, deren Seiten von 38' Länge einen Winkel von 80⁰ einschließen; dieses Zimmer soll mit Brettern von 20' lang und 10'' breit ausgelegt werden; wie viele Bretter sind dazu erforderlich, wenn $\frac{1}{2}$ Zoll von der Breite und $2\frac{1}{2}''$ von der Länge für die Bearbeitung abgerechnet werden?




```
Höhe = 37,5′
         38′
       3000
      1125
      1425□′
       144
       5700
      5700
     1425
     205200□″ = Flächeninhalt des
                      Zimmers.
```

```
Länge = 237,5″
Breite =   9,5″
        11875
       21375
       2256,25□″ = Flächeninhalt eines Brettes; also
2256,25 : 205200,00 = 90,94 = 91 Dielen sind zum Auslegen des
          2030625                    Zimmers erforderlich.
            2137500
            2030625
            1068750
             902500
            166250 = Rest.
```

III. Berechnung des Rechtecks.

1) Die Grundlinie eines Rechtecks sei $14^1/_2$′, die Höhe 5′ 9″; wie groß ist sein Flächeninhalt?

```
   14,5
   5,75
    725
  1015
  725
  83,375□′ = 83□′ 54□″.
```

2) Die größere Seite eines Rechtecks sei 2^0 7′, die kleinere 11′ 7″; wie groß ist sein Flächeninhalt?

$2^0\ 7' = 372''$
$11'\ 7'' = 139''$

3348
1116
372

$51708\square'' = 2\square$ruthen $71\square'\ 12\square''$.

3) Die Diagonale eines Rechtecks ist 36′, die kleinere Seite 11′ lang; wie lang ist die größere Seite und wie groß der Flächeninhalt?

Die zu suchende Seite $\sqrt{(36^2 - 11^2)} = \sqrt{(1296 - 121)}$
$= \sqrt{1175} = 34,278'$

9
60 : 275
256
680 : 1900
1364
6840 : 53600
47929
68540 : 567100
548384
18716 = Rest.

34,278′
11′
34278
34278
$377,058\square$fuß = Flächeninhalt der Figur.

4) Die Grundlinie eines Rechtecks ist 21′ lang, die Höhe beträgt 9′; wie lang ist die Diagonale dieses Rechtecks?

$x = \sqrt{(21^2 + 9^2)} = \sqrt{(441 + 81)}$
$= \sqrt{5,22} = 22,847'$

4
40 : 122 —
84
440 : 3800
3584
4560 : 21600
18256
45680 : 334400
319809
14591 = Rest.

5) Was kostet ein rechteckiger Bauplatz von $5^0\ 4'$ Länge und $3^0\ 7'$ Breite, wenn der Quadratfuß 12 Sgr. 8 ₰ kostet?

$5^0\ 4' = 64'$
$3^0\ 7' = 43'$

192
256

2752 □′ = Flächeninhalt.

1 □ fuß : 12 Sgr. 8 ₰ = 2752 □ fuß : x

1161 Thlr. 28 Sgr. 8 ₰.

6) Wie lang ist die Seite eines Quadrats, welches denselben Flächeninhalt, wie ein Rechteck von 17′ Höhe und 25′ 3″ Grundlinie, hat?

$x = \sqrt{(17' \times 25{,}25')}$
$= \sqrt{4{,}29{,}25} = 20{,}718'$

4

400 : 2925
2849

4140 : 7600
4141

41420 : 345900
331424

14476 = Rest.

7) Jemand hat einen rechteckigen Garten von $5^0\ 6'$ Länge und $2^0\ 4'$ Breite; von der Länge nimmt er 22′ weg; wie viel hat er an die Breite zuzusetzen, damit der Garten seinen frühern Flächeninhalt behalte?

$5^0\ 6' = 66'$ 66′
$2^0\ 4' = 28'$ — 22′

1848 □′ 44′ : 1848 □′ = 42
176 — 28

88 14′ muß er der Breite zusetzen.
88

8) Ein rechteckiges Spiegelglas von 7′ 8″ 5‴ Länge und 3′ 2″ 11‴ Breite im Lichten wird mit einem 4″ breiten, flachen Rahmen umgeben; wie groß ist der Flächeninhalt des Spiegels nebst Rahmen?

$7' \; 8'' \; 5''' = 1109''' + 96''' = 1205'''$
$3' \; 2'' \; 11''' = 467''' + 96''' = 563'''$

3616
7230
6025

678415 □ linien

$= 32\square' \; 103\square'' \; 31\square''' =$ Flächeninhalt des Spiegels nebst Rahmen.

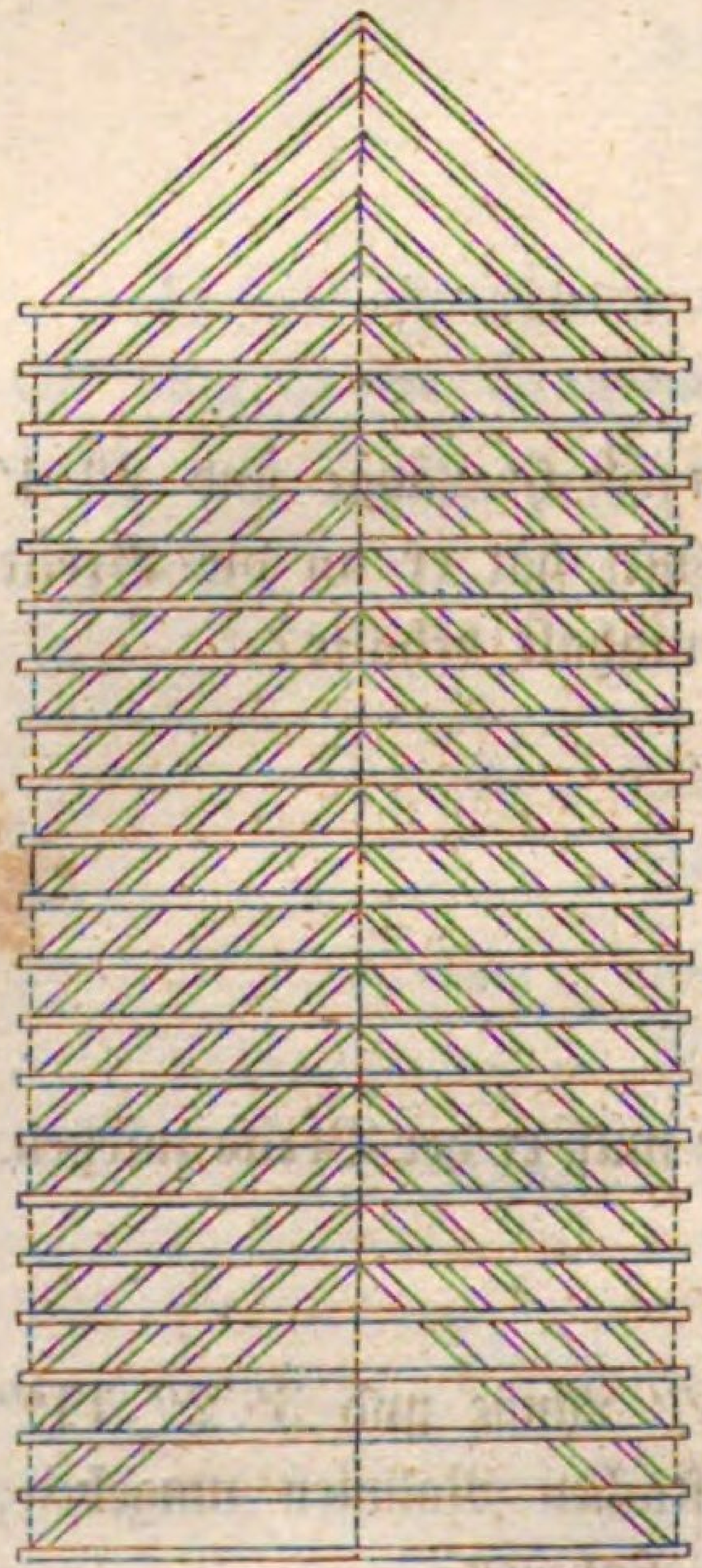
9) Wenn der Flächeninhalt eines Rechtecks $136\square^0 \; 142\square'$ und die Grundlinie $18^0 \; 1'$ ist, wie groß ist dann die Höhe?

$136\square^0 \; 142\square' = 18626\square'$
$18^0 \quad 1' \quad = \quad 217'$
$217 : 18626\square' = 85{,}834' = 7^0 \; 1{,}834'.$

10) Ein rechteckiges Haus ist 70′ 8″ lang und 35′ breit; die 8″ starken Balken liegen von Mittel zu Mittel 3′ 4″ auseinander, und die gleich starken Sparren unter einem Winkel von 45⁰ an; es wird gefragt: Wie viele laufende Fuß Holz gebraucht der Zimmermann zu diesem Dach?

$70' = 840''$ $\qquad 40 : 840 = 21$ Sparren auf jeder Seite
$3' \; 4'' = \; 40$ $\qquad 840 \quad 2$

42 Sparren.



Die Länge der Sparren

$$= \sqrt{\frac{35^2}{2}} = \sqrt{6{,}12{,}50} = 24{,}7'$$

4
40 : 212
176
480 : 3650
3409
241 = Rest.

Nimmt man nun die Sparren für Zapfen und Einschnitt 1,3′ länger, also 26′, so erhält man $26' \times 42 = 1092$ laufende Fuß Sparren.

Läßt man die Lagerbalken auf jeder Seite 1′ für ein Gesimse vorspringen, so werden sie 37′ lang, und wir erhalten alsdann $21 \times 37' = 777$ laufende Fuß Balken. $1092' + 777' = 1869'$ laufende Fuß Holz sind zu diesem Dache erforderlich.

11) Ein Haus ist 82′ lang und 40′ breit, die 9″ starken Balken liegen von Mittel zu Mittel 3′ 5″ auseinander, das Dach soll 24′ hoch werden; es wird gefragt: Wie viele laufende Fuß Holz werden dazu gebraucht, wenn die Balken für das Gesimse 10″ überstehen sollen und zum Verschneiden der Sparren 18″ gerechnet werden?

Die Länge der Sparren $= \sqrt{(20^2 + 24^2)}$

$= \sqrt{976} = 31{,}2'$

```
        9
 60 :  76
       61
620 : 1500
      1244
       256 = Rest.
```

$82' = 984''$	$41 : 984 = 24'$ Balken
$3'\ 5'' = 41''$	82
	164
	164

$2 \times 24 = 48$ Sparren

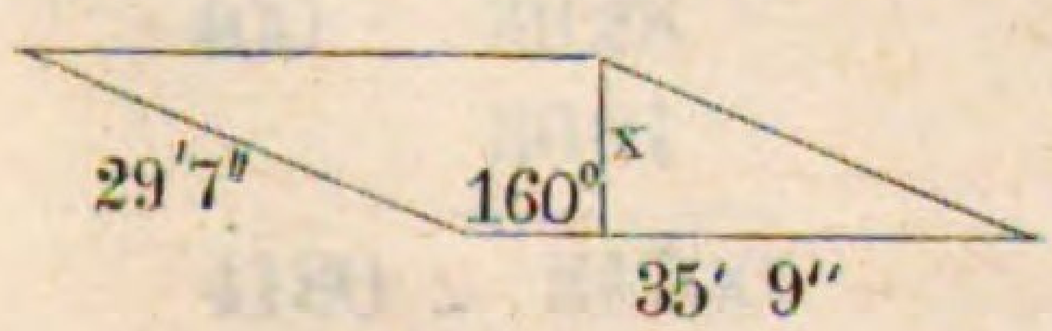
$24 \times 41'\ 8'' = 1000$ Fuß Balken

$48 \times 32{,}7 \quad = 1569{,}6$ Fuß Sparren.

2569,6 laufende Fuß Holz sind zu diesem Dache erforderlich.

VI. Berechnung der Rhomboide.

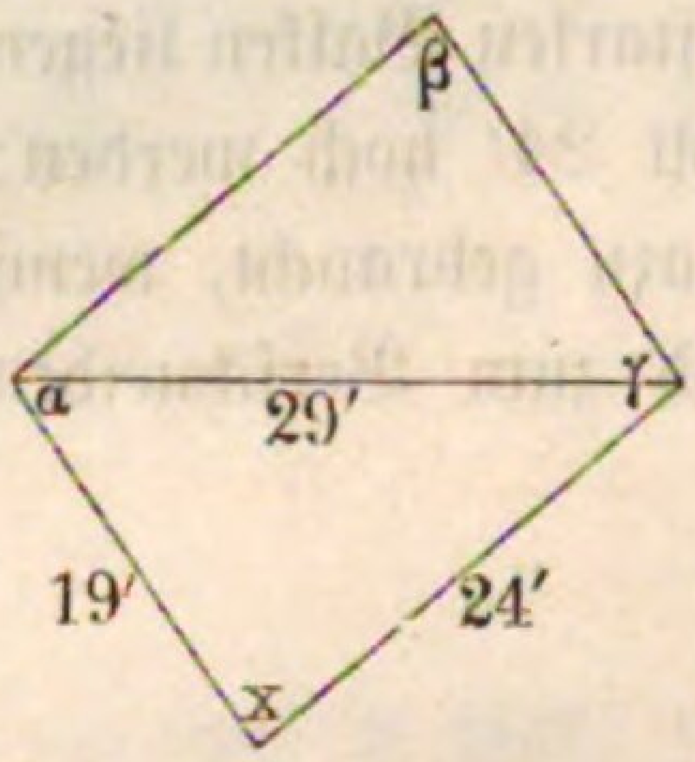
1) Construire eine Rhomboide, deren eine Seite 35′ 9″ und deren andere Seite 29′ 7″ lang ist, mit einem eingeschlossenen Winkel von 160°; bestimme sodann die Höhe der Figur durch Zeichnung und den Flächeninhalt durch Rechnung!



$x = 10{,}5'$; also

$10{,}5' \times 35{,}75' = 375{,}375$ □fuß = Flächeninhalt.

2) Die beiden ungleichen Seiten einer Rhomboide sind 24′ und 19′ lang; die Diagonale mißt 29′; bestimme durch Zeichnung, Messung und Rechnung die Größe der unbekannten Winkel und den Flächeninhalt der Figur!



∢ x gemessen $= 84^0$; dann ist
∢ $\alpha = 180^0 - 84^0 = 96^0$
∢ $\gamma = 180^0 - 84^0 = 96^0$
∢ $\beta = \quad 84^0$

360^0

Inhalt $= 2\sqrt{S.(S-a)(S-b)(S-c)}$

$S = \frac{24+19+29}{2} = 36$

$S - a = 36 - 24 = 12$

$S - b = 36 - 19 = 17$

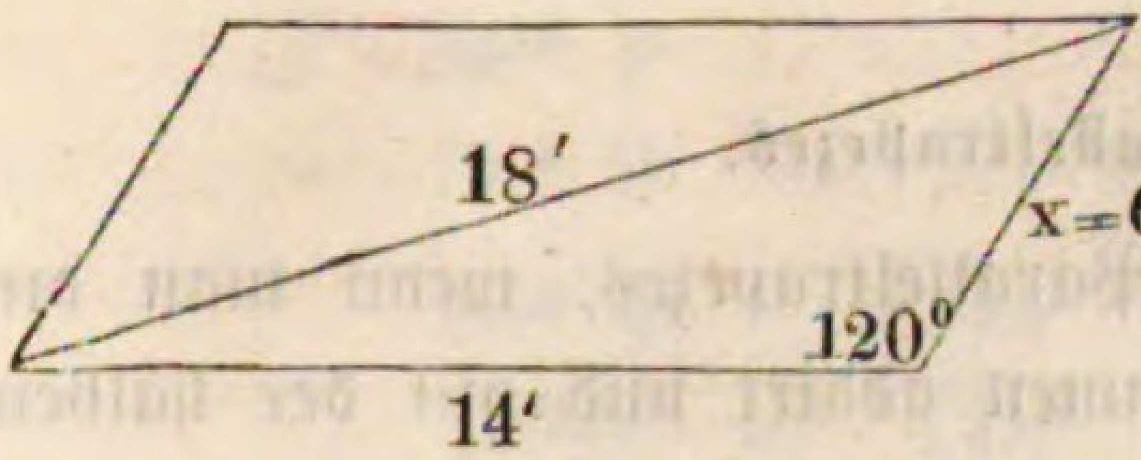
$S - c = 36 - 29 = 7$

```
  36
  12
  --
  72
 36
 ---
 432
  17
 ----
3024
432
----
7344
   7
```

$\sqrt{5,14,08} = 226,733\,\square' \times 2 = 453,466\,\square' =$ Flächeninhalt der Figur.

```
        4
     ----
 40 : 114
       84
     ----
440 : 3008
      2676
      -----
4520 : 33200
       31689
       ------
45340 : 151100
        136029
        -------
453460 : 1507100
         1360389
         -------
          146711 = Rest.
```

3) Die Diagonale einer Rhomboide ist 18′ lang, der gegenüberliegende Winkel 120^0 groß, die eine Seite 14′ lang; wie lang ist die zweite unbekannte Seite und wie groß der Flächeninhalt?



Seite x = 6,5'

Inhalt $= 2\sqrt{S.(S-a)(S-b)(S-c)}$

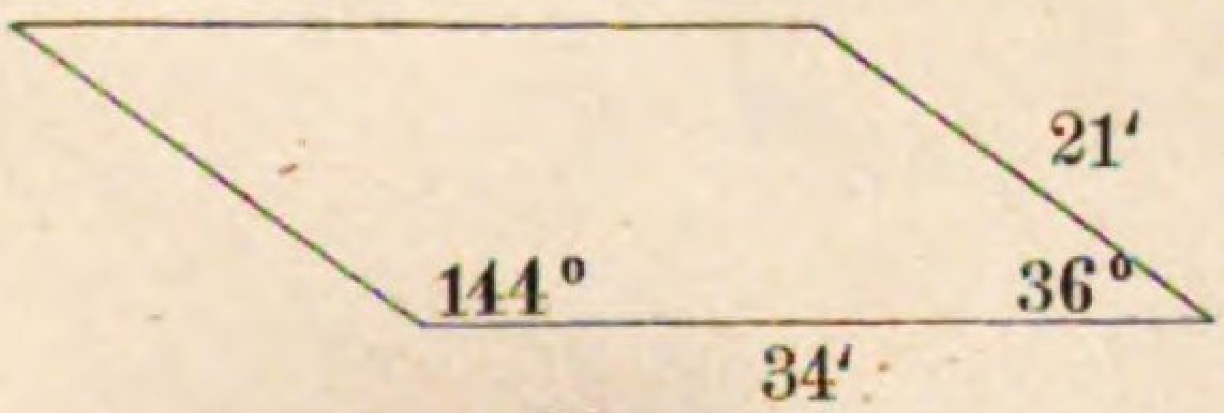
$$S = \frac{18+14+6,5}{2} = 19,25$$

$$(S-a) = 19,25 - 18 = 1,25$$
$$(S-b) = 19,25 - 14 = 5,25$$
$$(S-c) = 19,25 - 6,5 = 12,75$$

$$19,25 \times 1,25 \times 5,25 \times 12,75 = 1610,68359375$$

$$\sqrt{1610,68359375} = 40,133\square'$$
$$2$$
$$\overline{80,266\square'}$$ Fächeninhalt.

4) Die beiden ungleichen Seiten einer Rhomboide sind 34' und 21' lang; der nicht eingeschlossene Winkel ist 36° groß; wie lang sind die beiden Diagonalen, wie groß ist der Flächeninhalt der Figur, und wie hoch ist sie?



Die kleinere Diagonale x = 21'

Die größere " y = 52,5'

Inhalt $= 2\sqrt{S.(S-a)(S-b)(S-c)}$

$$S = \frac{21+21+34}{2} = 38$$

$$S - a = 38 - 21 = 17$$
$$S - b = 38 - 21 = 17$$
$$S - c = 38 - 34 = 4$$

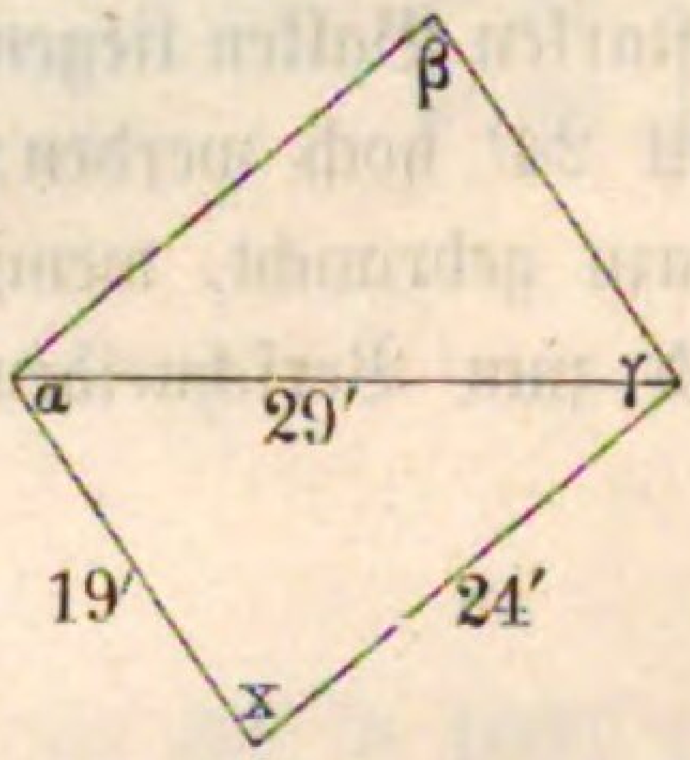
```
  38
  17
 ---
 266
 38
 ---
 646
  17
 ----
 4522
 646
 -----
 10982
     4
```

$\sqrt{4,39,28} = 209,59\square' \times 2 = 419,18\square' =$ Inhalt.

```
          4
       -----
  400 :  3928
         3681
       ------
 4180 :  24700
         20925
       -------
41900 :  377500
         377181
       --------
            319 = Rest.
```

Höhe auf 34' Grundlinie
$= 34 : 419,18 = 12,329'$

Höhe auf 21' Grundlinie
$= 21 : 419,18\square' = 19,961'$.



$\sphericalangle x$ gemessen $= 84^0$; dann ist

$\sphericalangle \alpha = 180^0 - 84^0 = 96^0$

$\sphericalangle \gamma = 180^0 - 84^0 = 96^0$

$\sphericalangle \beta = \qquad 84^0$

$\qquad 360^0$

Inhalt $= 2\sqrt{S.(S-a)(S-b)(S-c)}$

$S = \frac{24+19+29}{2} = 36$

$S - a = 36 - 24 = 12$

$S - b = 36 - 19 = 17$

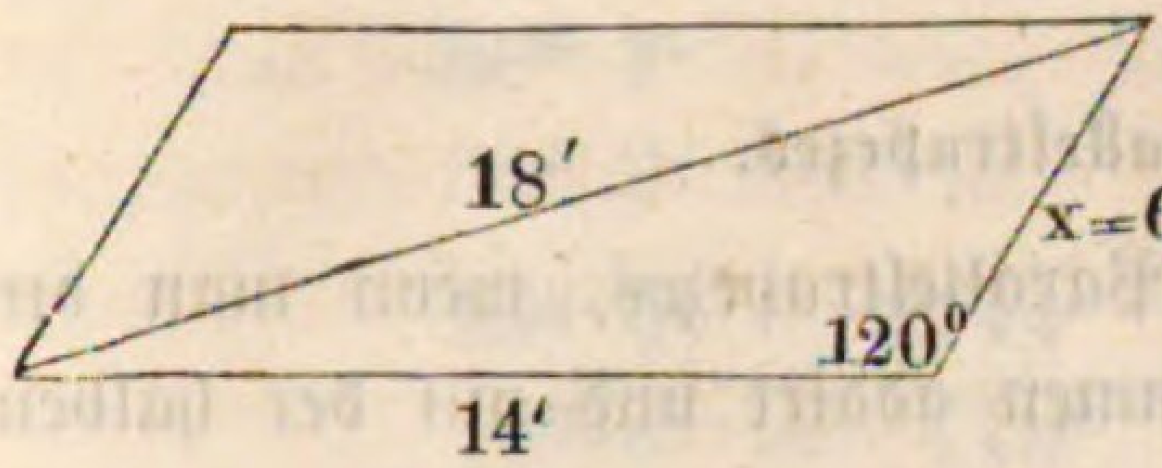
$S - c = 36 - 29 = 7$

```
  36
  12
  72
 36
 432
  17
3024
432
7344
   7
```

$\sqrt{5{,}14{,}08} = 226{,}733\,\square' \times 2 = 453{,}466\,\square'$ = Flächeninhalt der Figur.

```
         4
40 :   114
        84
440 :  3008
       2676
4520 :  33200
        31689
45340 :  151100
         136029
453460 :  1507100
          1360389
           146711 = Rest.
```

3) Die Diagonale einer Rhomboide ist 18′ lang, der gegenüberliegende Winkel 120⁰ groß, die eine Seite 14′ lang; wie lang ist die zweite unbekannte Seite und wie groß der Flächeninhalt?



Seite x = 6,5′

Inhalt $= 2\sqrt{S.(S-a)(S-b)(S-c)}$

$S = \frac{18+14+6,5}{2} = 19,25$

$(S-a) = 19,25 - 18 = 1,25$

$(S-b) = 19,25 - 14 = 5,25$

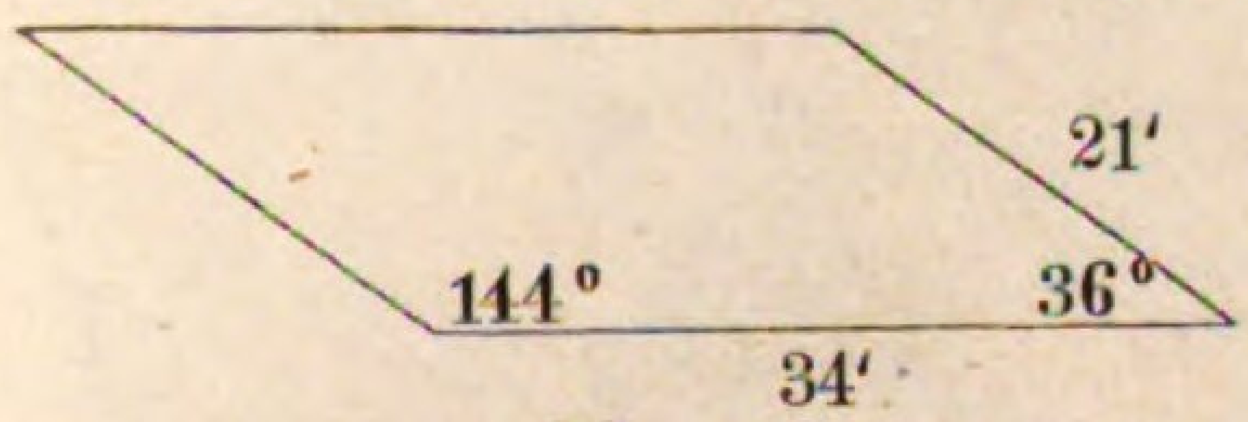
$(S-c) = 19,25 - 6,5 = 12,75$

$19,25 \times 1,25 \times 5,25 \times 12,75 = 1610,68359375$

$\sqrt{1610,68359375} = 40,133$ □′.
2

80,266 □′ Fächeninhalt.

4) Die beiden ungleichen Seiten einer Rhomboide sind 34′ und 21′ lang; der nicht eingeschlossene Winkel ist 36° groß; wie lang sind die beiden Diagonalen, wie groß ist der Flächeninhalt der Figur, und wie hoch ist sie?



Die kleinere Diagonale x = 21′

Die größere „ y = 52,5′

Inhalt $= 2\sqrt{S.(S-a)(S-b)(S-c)}$

$S = \frac{21+21+34}{2} = 38$

$S - a = 38 - 21 = 17$

$S - b = 38 - 21 = 17$

$S - c = 38 - 34 = 4$

38
17

266
38

646
17

4522
646

10982
4

$\sqrt{4,39,28} = 209,59$ □′ × 2 = 419,18 □′ = Inhalt.

4
400 : 3928
3681
4180 : 24700
20925
41900 : 377500
377181
319 = Rest.

Höhe auf 34′ Grundlinie
= 34 : 419,18 = 12,329′

Höhe auf 21′ Grundlinie
= 21 : 419,18 □′ = 19,961′.

V. Berechnung des Paralleltrapezes.

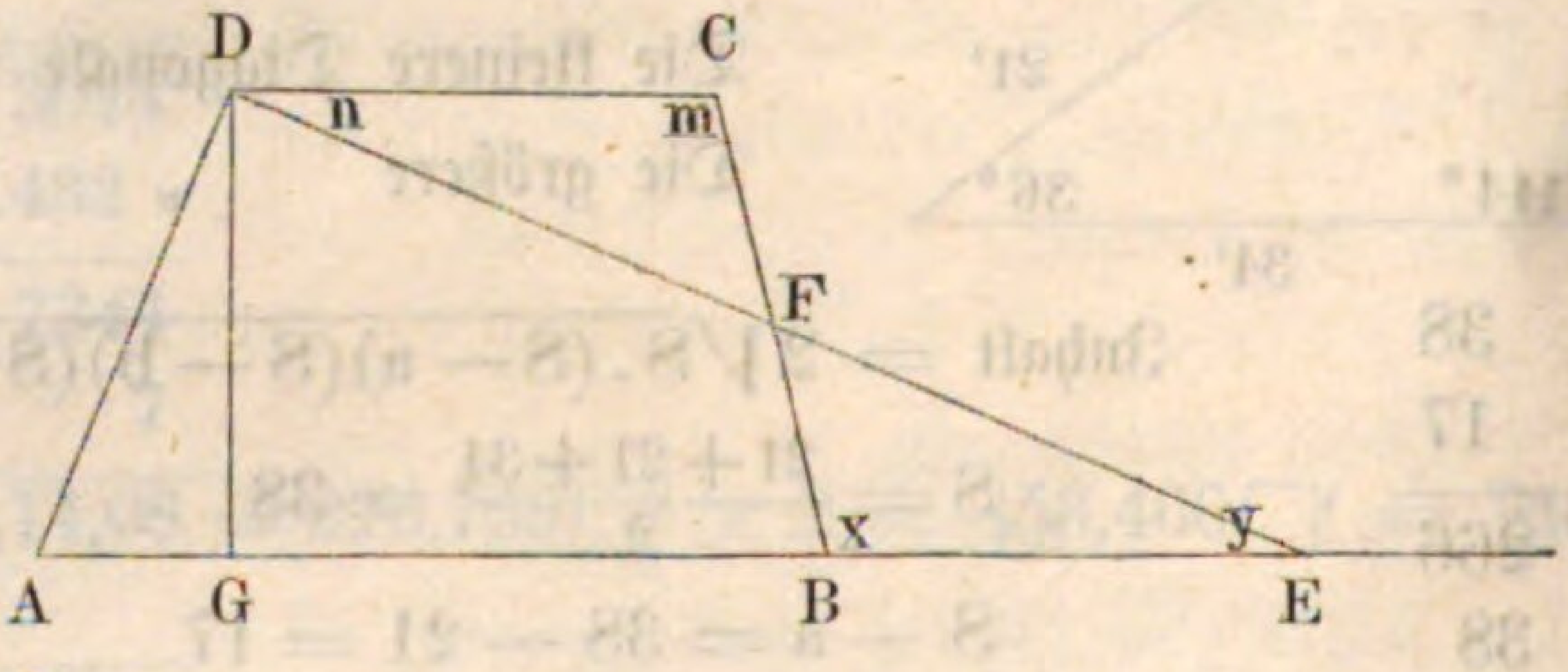
Man erhält den Flächeninhalt eines Paralleltrapezes, wenn man die Längen der parallelen Seiten desselben zusammen addirt und mit der halben Höhe des Paralleltrapezes multiplicirt.

Beweis:

Man verlängere die Grundlinie A B des Paralleltrapezes A B C D und mache B E = D C, alsdann ist das Dreieck D C F $\cong$ F B E; denn

D C = B E nach der Construction
$\sphericalangle$ n = y } Wechselwinkel
$\sphericalangle$ x = m }

Dreieck D C F $\cong$ F B E.



Da nun das Dreieck D C F dem $\triangle$ F B E an Form und Inhalt gleich ist, so kann ich das eine für das andere setzen; nehmen wir nun für das Dreieck des Paralleltrapezes D C F das $\triangle$ F B E, so erhalten wir: Dreieck A D E = dem Paralleltrapez A B C D. Der Flächeninhalt eines Dreiecks aber wird gefunden, wenn man die ganze Grundlinie desselben mit seiner halben Höhe multiplicirt. Die Grundlinie des Dreiecks aber ist = A B + B E = A B + D C = A E; wird also A E $\times$ $\frac{1}{2}$ D G genommen, so hat man den Flächeninhalt des Dreiecks A E D, mithin auch den Flächeninhalt des Paralleltrapezes A B C D, welches dem Dreieck gleich war.

Die Formel ist also: $P + p \times \frac{1}{2} h$.

Aufgaben:

1) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Gartens, wenn die beiden parallelen Seiten desselben 59° 7′ und 35° 9′ lang sind und die Höhe oder Breite 19° 8′ beträgt?

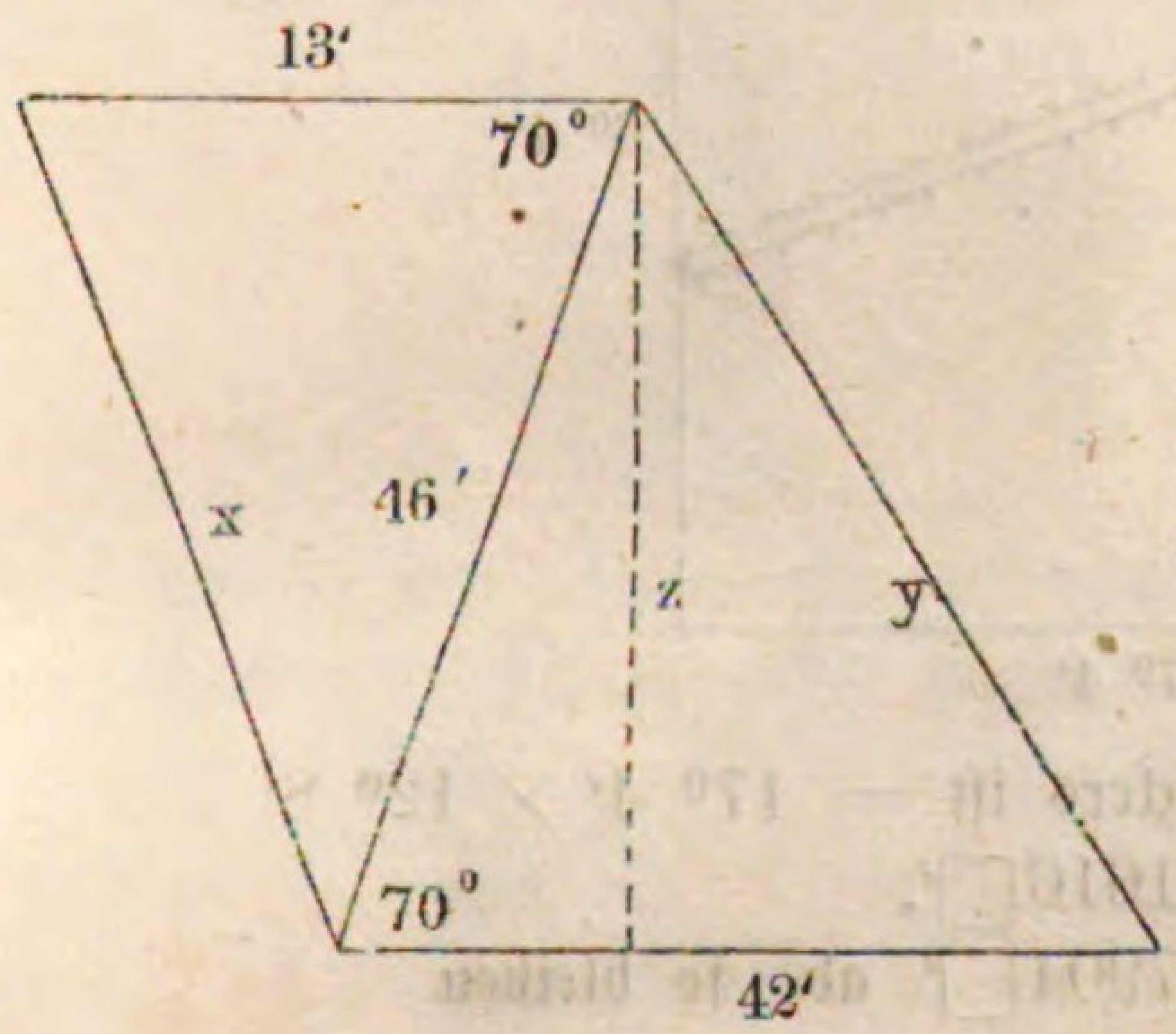
$59^0\ 7'$
$35^0\ 9'$

$95^0\ 4' = 1144'$
$19^0\ 8' = \ \ 118'$

$2 \qquad 9152$
1144
1144

$134992 \square' = 937 \square^0\ 64 \square' =$ Inhalt.

2) Die Diagonale eines Paralleltrapezes ist 46′ lang, die beiden parallelen Seiten sind 31′ und 42′ lang und liegen der Diagonale unter einem Wechselwinkel von 70° an; finde durch Zeichnung und Rechnung die Länge der beiden unbekannten Seiten und den Flächeninhalt der Figur!



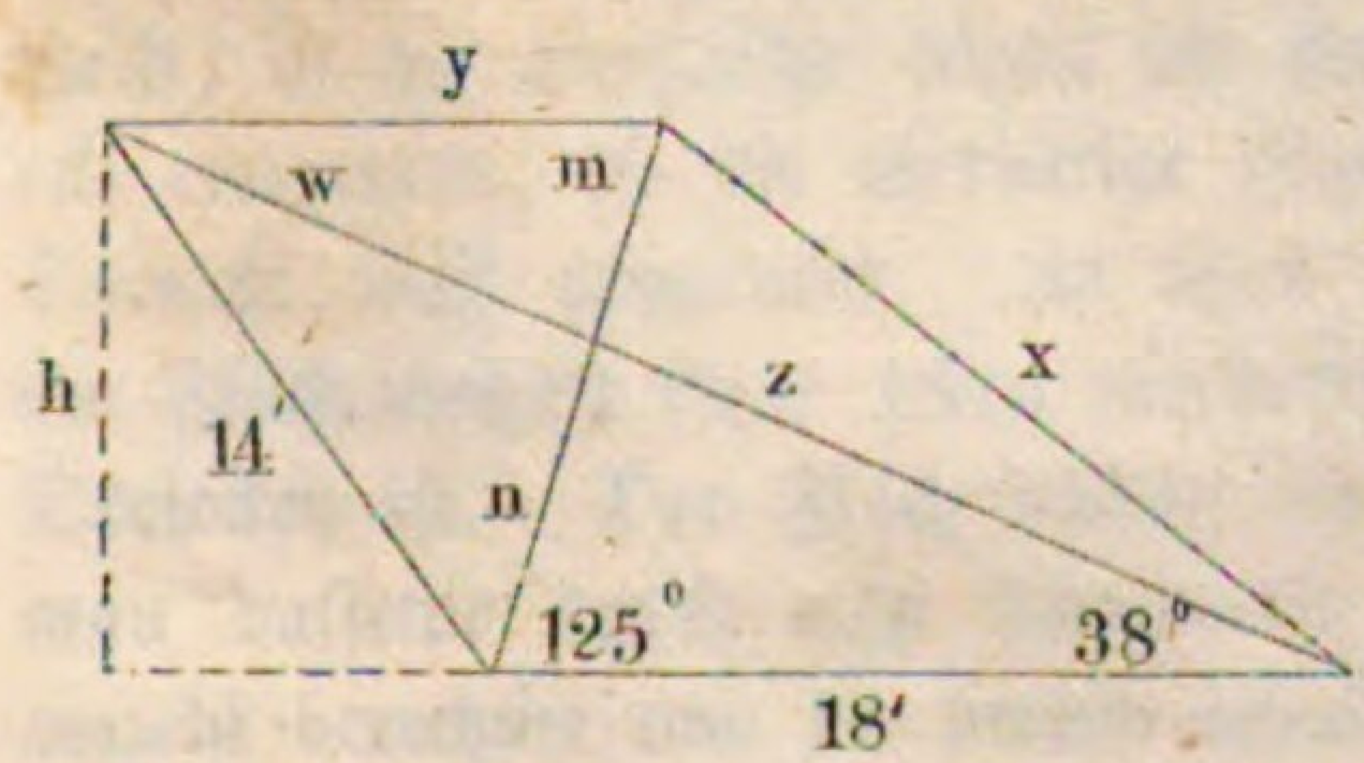
Seite $x = 45{,}5'$
" $y = 50{,}4'$
Höhe $z = 43'$

Flächeninhalt $= 42 + 31 = 73 \times \frac{43}{2}$
$= 73$
$\ \ 21{,}5$

645
1505

$1569{,}5 \square' = 10 \square^0\ 129 \square'\ 72 \square''$.

3) Die eine parallele Seite eines Paralleltrapezes von 18′ lang schließt mit der anliegenden, nicht parallelen Seite, welche 14′ lang ist, einen Winkel von 125° ein; der andere, der parallelen Seite anliegende Winkel ist 38° groß; wie groß sind die beiden unbekannten Winkel, wie lang sind die beiden Diagonalen und wie groß ist der Flächeninhalt der Figur?



Seite $x = 19'$
" $y = 12'$
Winkel $w = 180^0 - 125^0 = 55^0$
" $m = 180^0 - 38^0 = 142^0$
Diagonale $z = 28{,}8$
" $n = 12{,}6'$
Höhe $h = 12'$

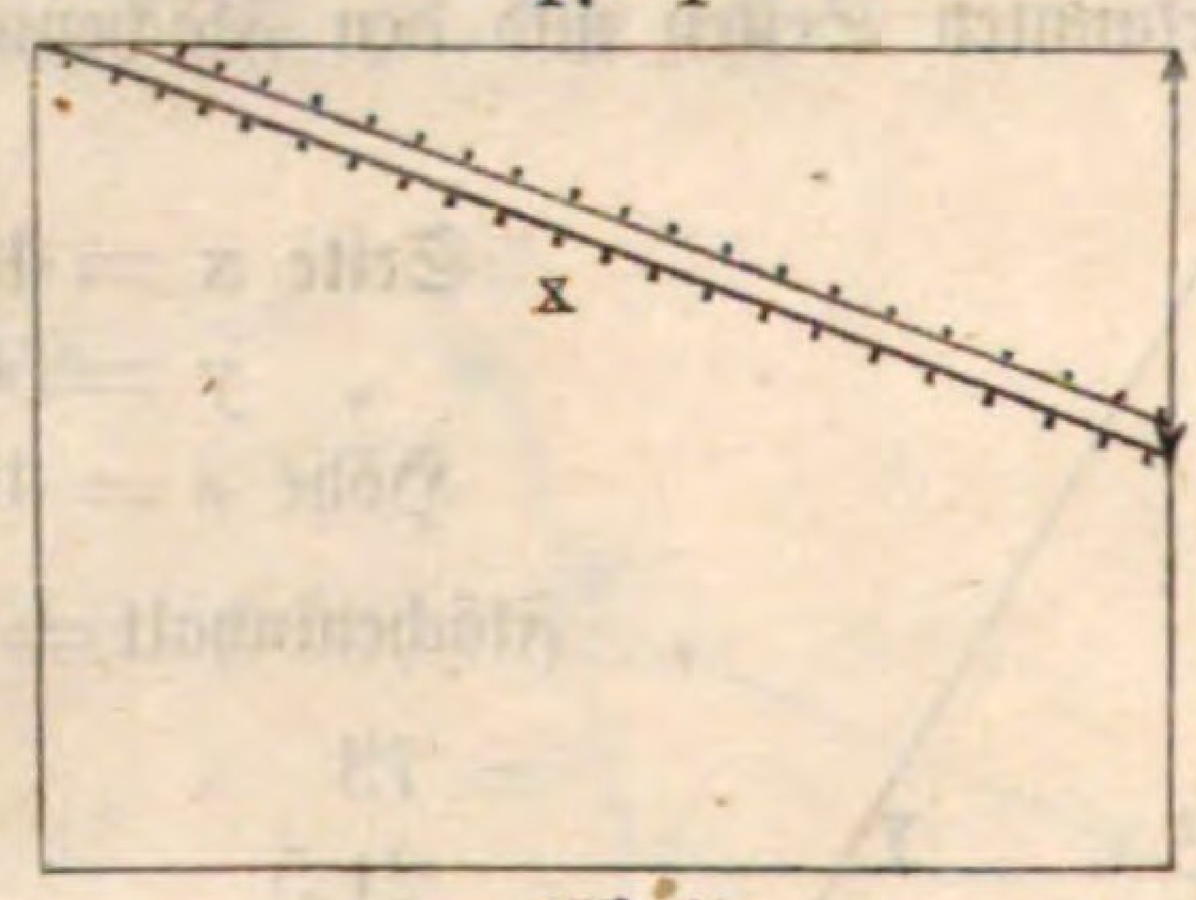
Inhalt $= 18 + 12 \times {}^{12}/_{2} = 30' \times 6' = 180 \square'$.

4) Ein Acker war früher rechteckig, und zwar 17⁰ 4′ lang und 12⁰ 8′ breit; später wurde dies Grundstück von einer Eisenbahn durchschnitten, welche von einer Ecke aus gerade nach der Mitte der gegenüberstehenden kleinern Seite lief; wie vielen Schadenersatz erhielt der Besitzer für das abgeschnittene Dreieck, wenn ihm pro Quadratruthe 23 Thlr. 20 Sgr. bezahlt werden sollten, wie viele Quadratruthen behielt er noch von seinem Grundstücke übrig, und wie lang wird die Eisenbahn in diesem Grundstücke?

Flächeninhalt des abgeschnittenen Dreiecks =

$$= 17^0\ 4' \times 3^0\ 2' = 208' \times 38' = 7904\square';$$

also
$$144\square' : 23\ Thlr.\ 20\ Sgr. = 7904\square' : x,$$
$$x = 1299\ Thlr.\ 1\ Sgr.\ 1\ Pf.$$
erhält er als Schadenersatz.



Der Flächeninhalt des ganzen Ackers ist = 17⁰ 4′ × 12⁰ 8′

$$= 208' \times 152' = 31616\square'.$$

Zieht man davon 7904□′ ab, so bleiben

23712□′ = 164□⁰ 96□′ übrig.

Die Länge der Eisenbahn ist $= \sqrt{(17^0\ 4')^2 + (6^0\ 4')^2}$

$$= \sqrt{4{,}90{,}40\square'} = 221{,}449' = 18^0\ 5{,}449'$$

```
           4
     40 :  90
           84
    440 :  640
           441
   4420 :  19900
           17696
  44280 :  220400
           177136
 442880 :  4326400
           3986001
            340399 = Rest.
```

5) Von einem Paralleltrapez sind die parallelen Seiten 16′ 4″ und 12′ 6″ lang; wie groß ist dessen Höhe, wenn sein Inhalt 8□⁰ 10□′ 136□″ beträgt?

$$\text{Höhe} = \frac{8\square^0\ 10\square'\ 136\square''}{\frac{1}{2}(16'\ 4'' + 12'\ 6'')}$$

$$= \frac{167464\square''}{173''} = 968'' = 6^0\ 8'\ 8''.$$

6) Eine Dachfläche in Form eines Paralleltrapezes hat zur untern Grundlinie 56′, zur obern 37′, der senkrechte Abstand dieser beiden Linien beträgt 25′; dieselbe soll mit rechtwinkligen Schiefern belegt werden, die mit $^2/_5$ ihrer Größe über einander liegen und von denen jeder Stein 1′ lang und 5″ breit ist; wie viele Schieferplatten sind dazu erforderlich?

$$\text{Dachfläche} = 56' + 37 \times \frac{25'}{2}$$

$$= 12{,}5'$$

```
   93'
 ------
   375
  1125
 ------
 1162,5□'
```

$12'' \times 5'' \times {}^3/_5 = 36\square'' = 0{,}25\square'$ deckt jeder Stein.

0,25 : 1162,5 = 4650 Steine sind zum Decken dieses Daches erforderlich.

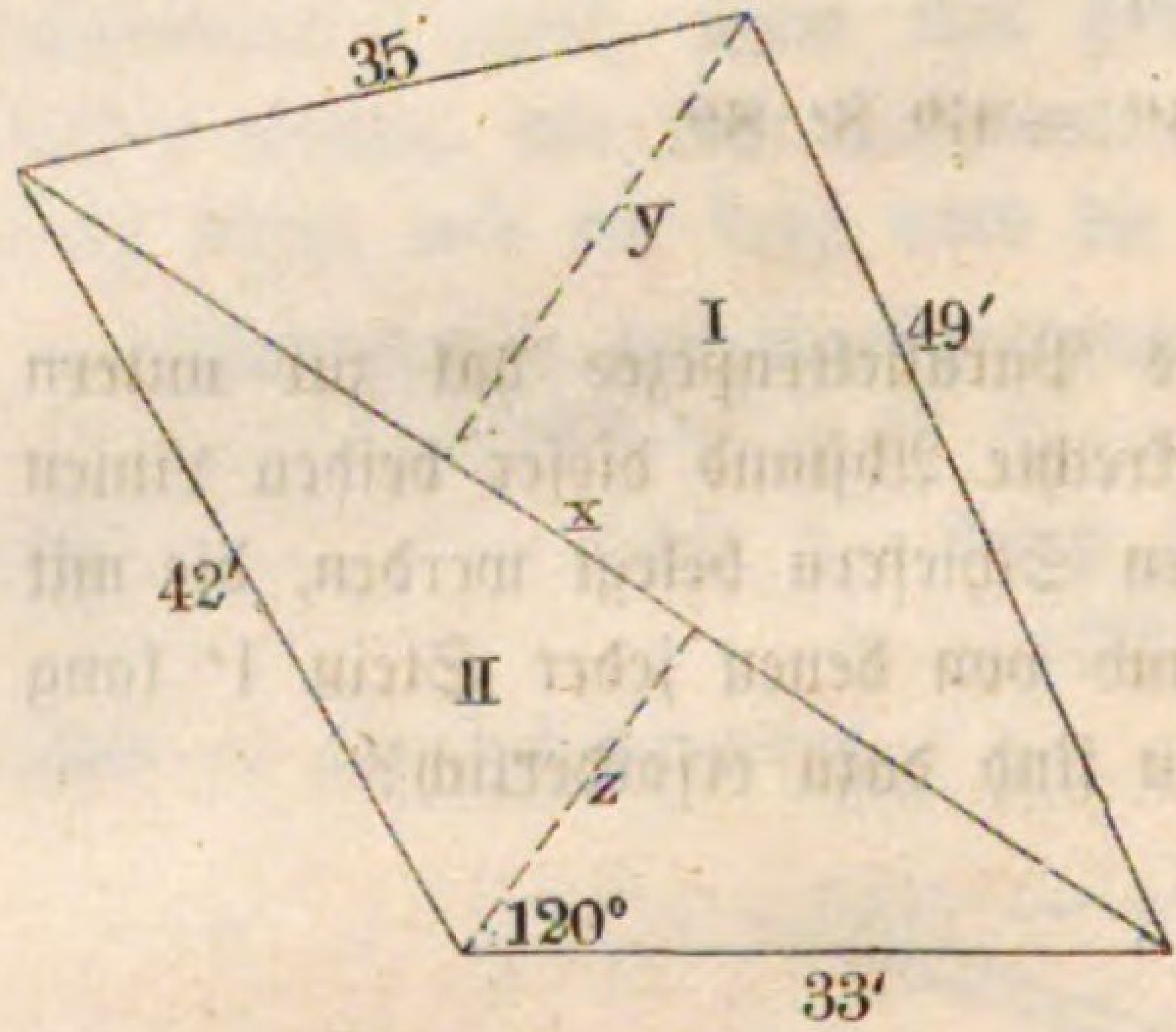
```
 100
 ----
 162
 150
 ----
  125
  125
 ----
```

VI. Berechnung des Trapezes.

Jede vierseitige Figur wird durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zertheilt; ist die vierseitige Figur ein Parallelogramm, so sind die beiden Dreiecke congruent; ist die vierseitige Figur aber ein Trapez, so sind die beiden Dreiecke nicht congruent. In allen Fällen aber bleibt der Satz wahr, daß der Flächeninhalt einer jeden vierseitigen Figur gleich der Summe von zwei Dreiecken ist. Der Flächeninhalt eines Trapezes wird also gefunden, wenn man dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke theilt, jedes Dreieck einzeln berechnet und die beiden erhaltenen Resultate addirt; denn die Theile zusammen sind immer dem Ganzen an Größe gleich.

Aufgaben:

1) Zwei Seiten eines Trapezes von 33′ und 42′ Länge schließen einen Winkel von 120⁰ ein, die beiden andern Seiten der Figur sind 35′ und 49′ lang; wie groß ist der Flächeninhalt dieses Trapezes?



Figur	Grundl.	Höhe	Inhalt
△I	65′	26′	845□′
△II	65′	18,6′	604,5□′
		Summa =	1449,5□′

oder:

x = 65′
y = 26′
z = 19′

$$\text{Flächeninhalt} = \sqrt{S.(S-a)(S-b)(S-c)}$$

Im Dreieck I ist:

$$S = \frac{35+65+49}{2} = 74,5$$

$$(S-a) = 74,5 - 65 = 9,5$$

$$(S-b) = 74,5 - 35 = 39,5$$

$$(S-c) = 74,5 - 49 = 25,5$$

$$\sqrt{74,5 \times 9,5 \times 39,5 \times 25,5} = \sqrt{712881,1875} = 844,322 \square \text{ fuß.}$$

Im Dreieck II ist:

$$S = \frac{65+33+42}{2} = 70$$

$$S-a = 70-65 = 5$$

$$S-b = 70-33 = 37$$

$$S-c = 70-42 = 28$$

$$\sqrt{5 \times 37 \times 28 \times 70} = \sqrt{362600} = 602,162 \square'.$$

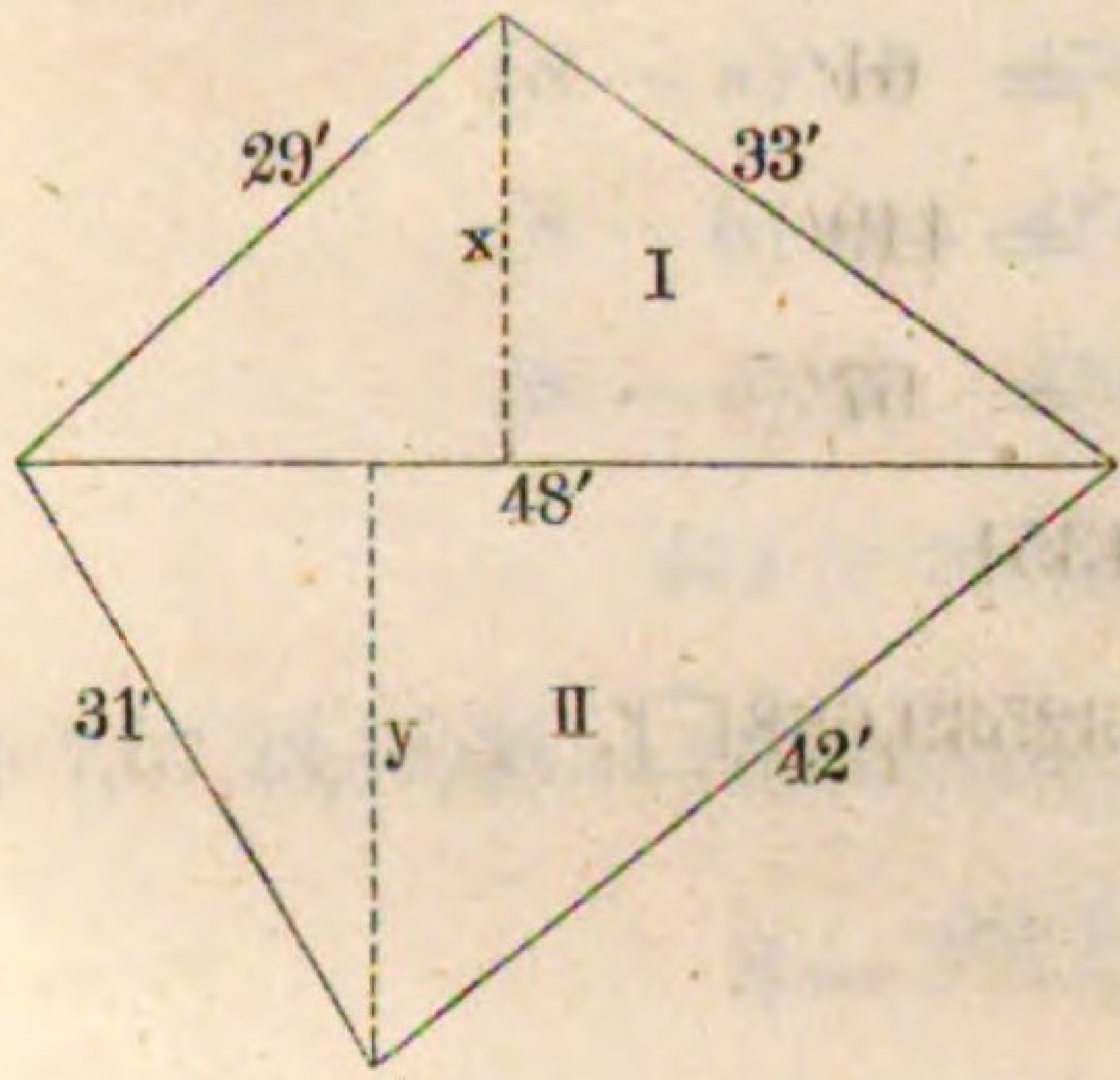
Wir haben also: Dreieck I = 844,322□′
„ II = 602,162□′

Summa = 1446,484□′;

also circa 3□fuß weniger als nach der ersten Berechnung, weil y und z nicht genauer gemessen werden konnten.

2) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Trapezes, dessen Diagonale 48′ lang ist, wenn die beiden oberhalb der Diagonale liegenden Seiten 29′ und 33′ und die beiden unterhalb der Diagonale liegenden Seiten 31′ und 42′ lang sind, und wie lang sind die beiden Perpendikel auf die Diagonale?

Im Dreieck I ist:



$$S = \frac{48 + 29 + 33}{2} = 55$$

$$(S - a) = 55 - 48 = 7$$
$$(S - b) = 55 - 29 = 26$$
$$(S - c) = 55 - 33 = 22$$
$$\sqrt{55 \times 7 \times 26 \times 22}$$
$$= \sqrt{220220} = 469{,}276 \square' = \text{Inhalt.}$$

Im Dreieck II ist:

$$S = \frac{48 + 31 + 42}{2} = 60{,}5$$
$$(S - a) = 60{,}5 - 48 = 12{,}5$$
$$(S - b) = 60{,}5 - 31 = 29{,}5$$
$$(S - c) = 60{,}5 - 42 = 18{,}5$$

$$\sqrt{60{,}5 \times 12{,}5 \times 29{,}5 \times 18{,}5} = \sqrt{412723{,}4375} = 642{,}436 \square' \text{ Inhalt.}$$

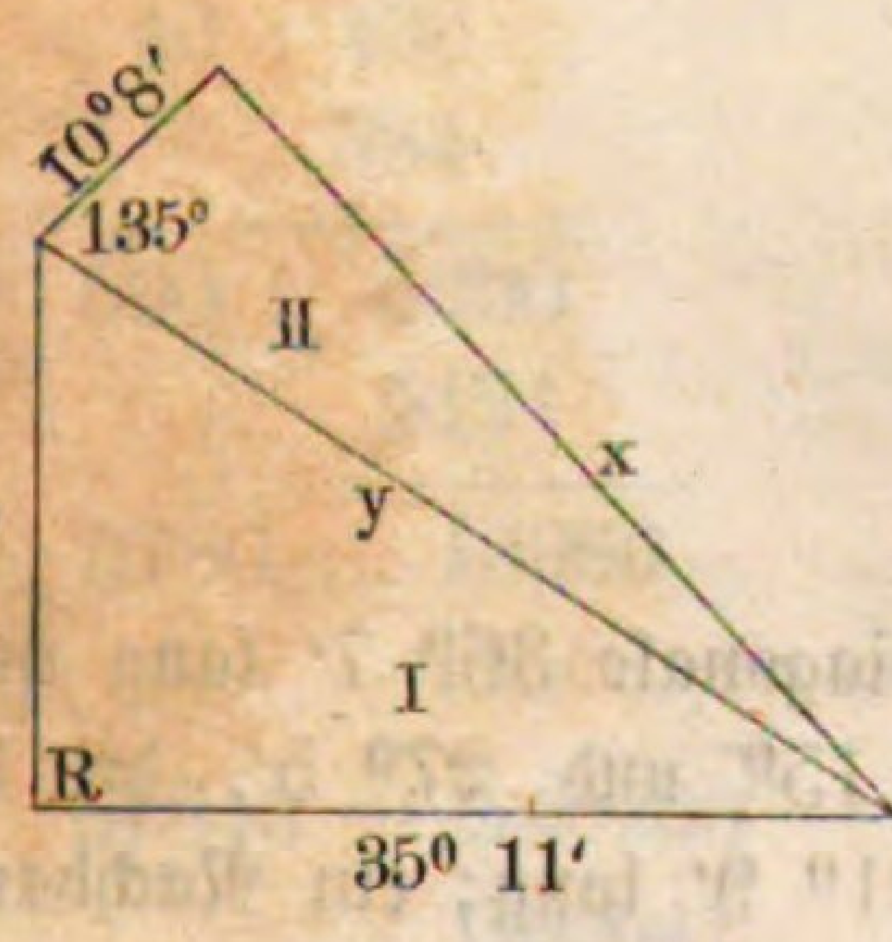
$$\triangle \text{ I} = 469{,}276 \square'$$
$$\triangle \text{ II} = 642{,}436 \square'$$

1111,712 □ Fuß = dem Flächeninhalte des Trapezes.

Das Perpendikel im Dreieck I = 24 : 469,276 = 19,553′

" " " " II = 24 : 642,436 = 26,768′.

3) Die eine Seite eines Gartens ist 35^0 11′ lang; die rechtwinklig anliegende Seite mißt 23^0 9′, die dritte Seite des Gartens ist 10^0 8′ lang und liegt der zweiten Seite unter einem Winkel von 135^0 an; wie lang ist die im Sumpfe liegende vierte Seite des Gartens und wie viel hat ein Käufer für das ganze Grundstück zu bezahlen, wenn ihm die Quadratruthe für 27 Thlr 19 Sgr. verkauft wird?



$$x = 42{,}5'$$
$$y = 43'.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks I ist

$$= \frac{35^0\ 11' + 23^0\ 9'}{2}$$
$$= 431'$$
$$\times 285$$
$$2155$$
$$3448$$
$$862$$
$$2 : 122835 = 61417{,}5 \square'.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks II ist

$$= \sqrt{S.(S - a)(S - b)(S - c)}$$

$$S = \frac{43^0 + 10^0\,8' + 42^0\,6'}{2} = 577'$$

$$S - a = 577' - 516' = 61'$$

$$S - b = 577' - 128' = 449'$$

$$S - c = 577' - 510' = 67'$$

$$577 \times 61 \times 449 \times 67 = 1058831351$$

$$\sqrt{10{,}58{,}83{,}13{,}51} = 32539{,}688 \square'.$$

Dreieck I = 61417,5□′
" II = 32539,6□′

93957,1□′ = dem Flächeninhalt des Trapezes.

144□′ : 27 ₰ 19 Sgr = 93957,1□′ : x

829 Sgr

```
                 829
             8456139
            1879142
           7516568
144 : 77890435,9 = 540905,8 Sgr
      720          = 18030 ₰ 5 Sgr 10 ₰
       589          = Kaufpreis.
       576
        1304
        1296
           835
           720
           1159
           1152
              7
```

4) Jemand hat ein Grundstück, dessen Diagonale 36⁰ 7′ lang ist; die beiden Zäune oberhalb der Diagonale sind 15⁰ und 27⁰ 5′, die beiden Seiten unterhalb der Diagonale 41⁰ und 21⁰ 9′ lang; ein Nachbar will dieses Grundstück von ihm eintauschen und ihm dafür geben: entweder ein Quadrat von gleichem Flächeninhalt, oder ein Rechteck von 32⁰ lang von gleicher Größe; wie lang muß die Seite des Quadrats sein und wie breit das Rechteck?

$$S = \frac{439' + 180' + 329'}{2} = 474$$

$$(S - a) = 474 - 439 = 35$$

$$(S - b) = 474 - 180 = 294$$

$$(S - c) = 474 - 329 = 145$$

$$474 \times 35 \times 294 \times 145 = 707231700$$

$\sqrt{7,07,23,17,00} = 26593,828 \square'$ = dem Flächeninhalte des einen Dreiecks.

$$S = \frac{439' + 492' + 261'}{2} = 596$$

$$(S - a) = 596 - 439 = 157$$

$$(S - b) = 596 - 492 = 104$$

$$(S - c) = 596 - 261 = 335$$

$$596 \times 157 \times 104 \times 335 = 3260048480$$

$\sqrt{3260048480} = 57097,834 \square'$ = dem Flächeninhalte des andern Dreiecks.

26593,828 $\square'$
57096,834 $\square'$
83690,662 $\square'$ = dem Inhalte des Trapezes.

$\sqrt{836,90,66} = 289,293' = 24^0$ 1,293' muß die Seite des Quadrats genommen werden.

4
40 : 436
384
560 : 5290
5121
5780 : 16966
11564
57840 : 540200
520641
578580 : 1955900
1735749
220151 = Rest.

384′ : 83690,66□′ = 217,944′ = 18⁰ 1,944′ muß die Breite des Rechtecks sein.

```
384′ : 83690,66□′ = 217,944′
       768
       ---
        689
        384
        ---
        3050
        2688
        ----
         3626
         3456
         ----
          1706
          1536
          ----
          1700
          1536
          ----
           164.
```

§. 4.

Berechnung der Vielecke.

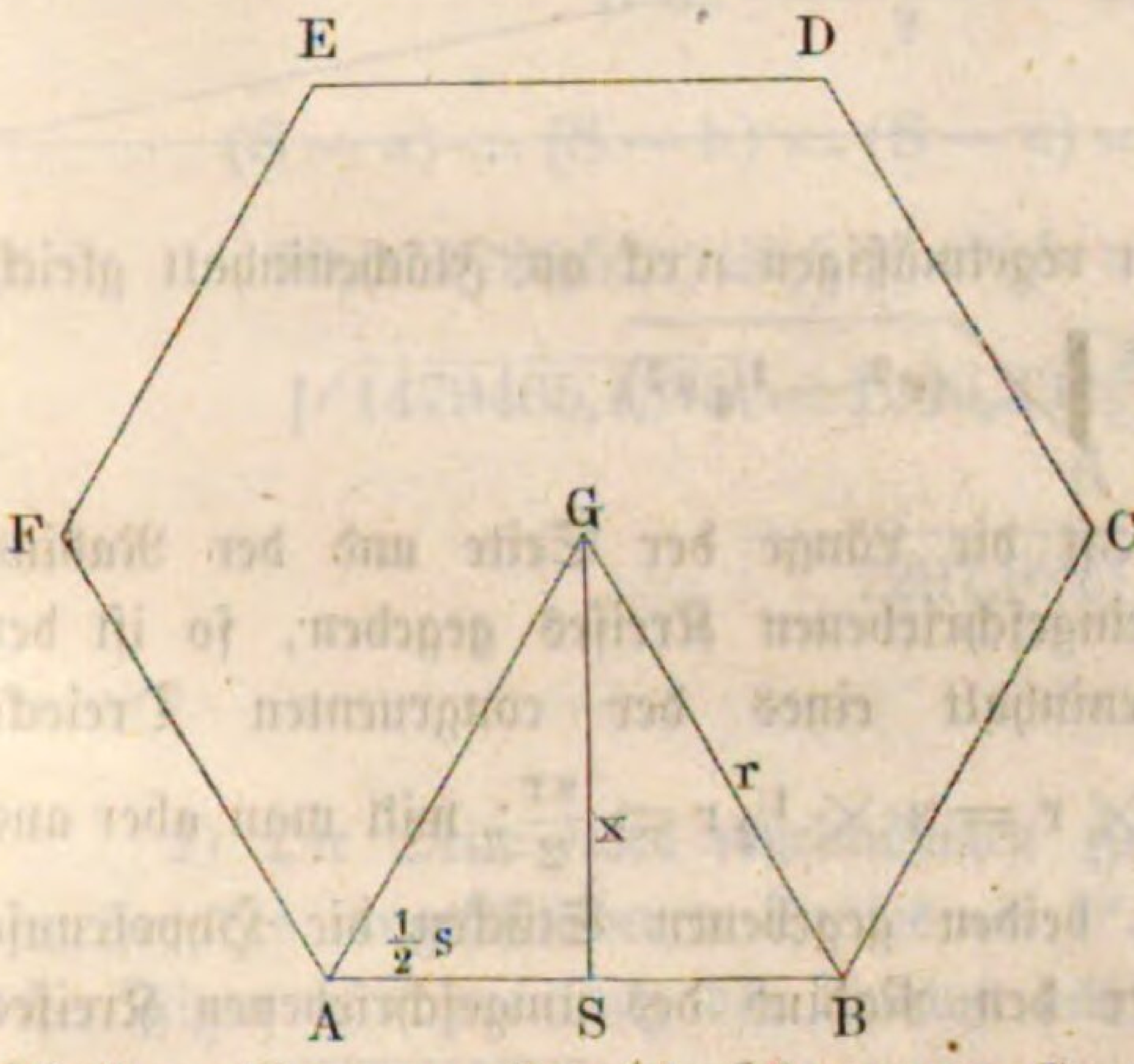
Im zweiten Abschnitt theilten wir die Vielecke in zwei Classen, nämlich in regelmäßige und unregelmäßige; demnach müssen wir in diesem Paragraphen zuerst die regelmäßigen Vielecke berechnen. Ferner haben wir in demselben Abschnitt nachgewiesen, daß jedes regelmäßige Vieleck durch eine einzige gerade Linie vollständig bestimmt ist. Diese gerade Linie kann sein:

1) eine Seite,
2) der Radius des umgeschriebenen Kreises,
3) der Radius des eingeschriebenen Kreises.

Ist also eines von diesen bestimmenden Stücken des regelmäßigen Vielecks gegeben, so müssen wir daraus mit Hülfe der Construction und Rechnung das ganze Vieleck und die einzelnen Theile desselben berechnen können. Will man die Construction bei der Berechnung nicht zu Hülfe nehmen, sondern den Flächeninhalt des regelmäßigen Vielecks allein durch Rechnung finden, so müssen zwei bestimmende Stücke der Figur gegeben werden, und zwar entweder die Seite und der Radius des eingeschriebenen Kreises, oder die Seite und der Radius des umgeschriebenen Kreises, oder endlich die beiden Radien.

Wenn das reguläre Vieleck n Seiten hat, die Seite = s und der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises = r ist, so ist der Flächeninhalt dieses regelmäßigen Vielecks = $\frac{n\,s}{2}\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}$.

Beweis:

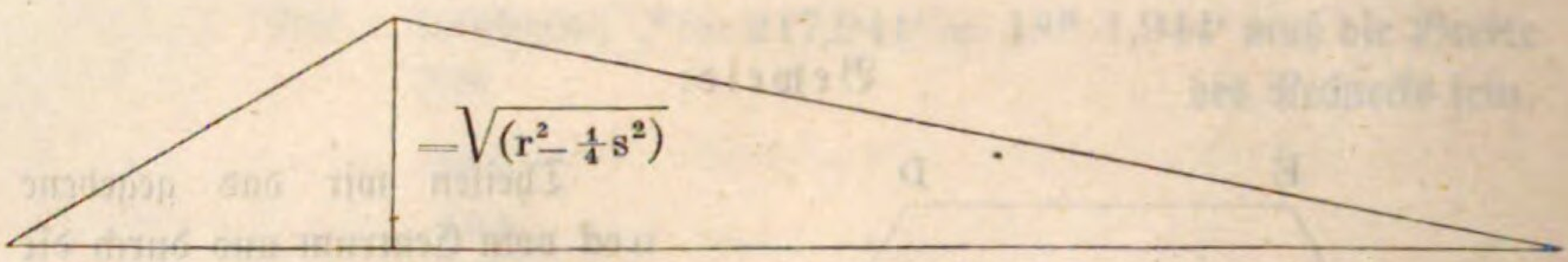


Theilen wir das gegebene n eck vom Centrum aus durch die Radien des umgeschriebenen Kreises, so erhalten wir so viele congruente Dreiecke, wie die Figur Seiten hat; in diesem Fall also n congruente Dreiecke.

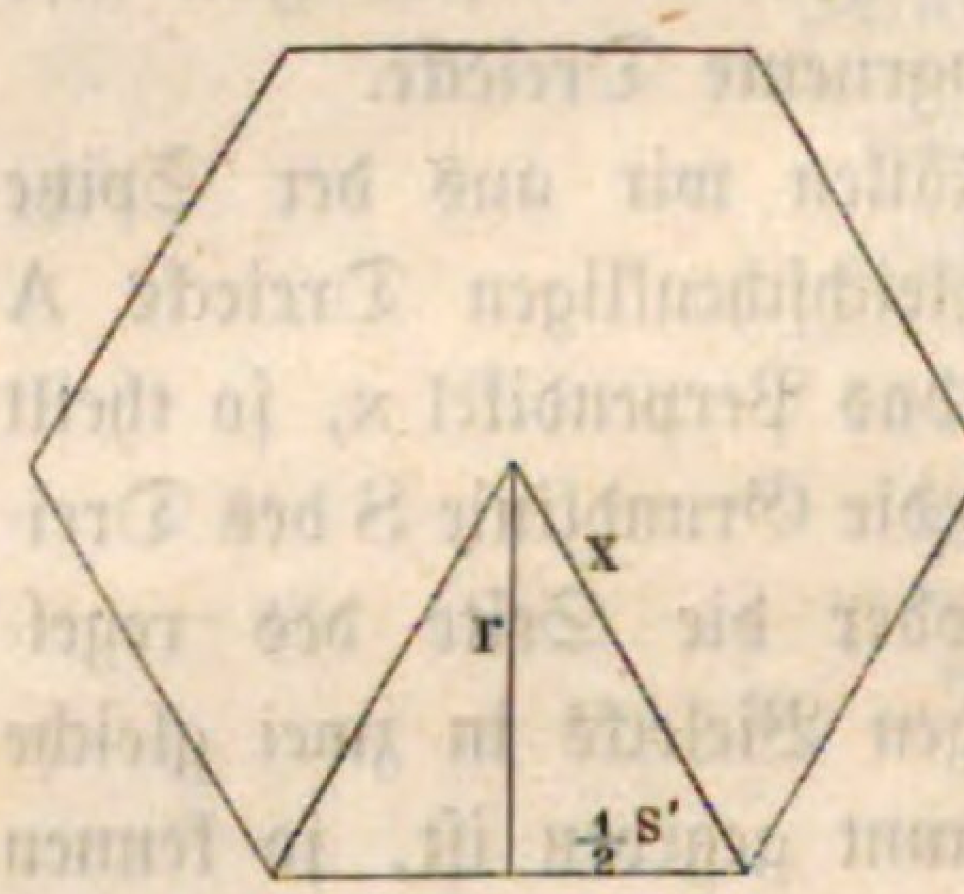
Fällen wir aus der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks A G B das Perpendikel x, so theilt dieses die Grundlinie S des Dreiecks oder die Seite des regelmäßigen Vielecks in zwei gleiche Theile. Da nun aber die Länge von S als bekannt gegeben ist, so kennen wir auch die Länge von $\frac{1}{2}$ s, und weil dazu die Länge des Radius des umgeschriebenen Kreises = r bekannt ist; so können wir aus diesen beiden bekannten Stücken nach dem pythagoräischen Lehrsatz den einen unbekannten Kathetus x des rechtwinkligen Dreiecks durch Rechnung finden; dieser ist $= \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} s^2)}$. Wenn auf diese Weise x gefunden ist, so heißt das nichts anders, als wir haben die Höhe eines der congruenten Dreiecke des regelmäßigen n ecks oder den Radius des eingeschriebenen Kreises durch Rechnung gefunden. Nun erhält man aber den Flächeninhalt eines Dreiecks, wenn man die halbe Grundlinie desselben mit der ganzen Höhe multiplicirt. Der Flächeninhalt eines der congruenten Dreiecke ist demnach $\frac{s}{2} \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} s^2)}$. Von solchen Dreiecken sind aber in einem n eck n Dreiecke von gleicher Größe enthalten; mithin ist der Flächeninhalt des regelmäßigen n ecks

$$= n \times \frac{s}{2} \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} s^2)} = \frac{n\,s}{2} \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} s^2)}.$$

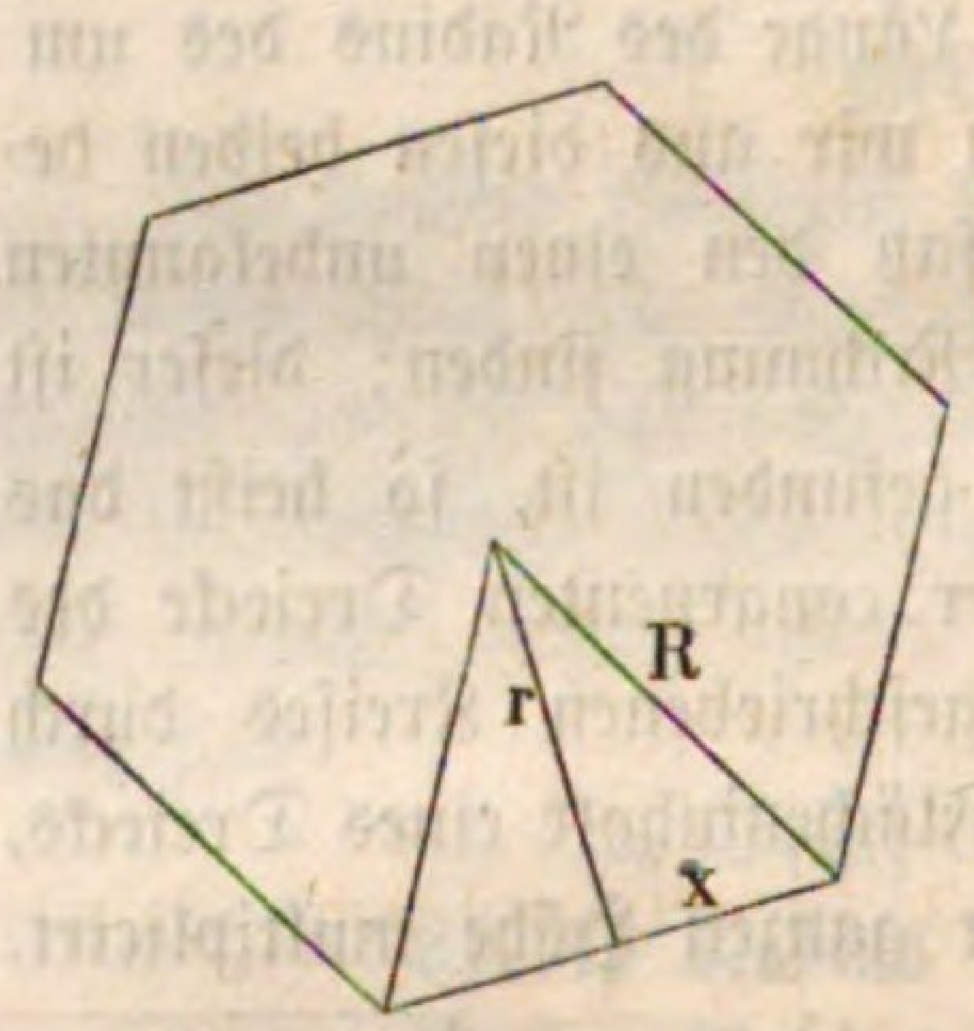
Die Richtigkeit dieses Satzes kann aber auch noch durch eine planimetrische Zeichnung dargethan werden. Denken wir uns nämlich die Seiten des regelmäßigen n ecks als eine gerade Linie hingelegt, so wird diese = n × s; sehen wir sodann diese Linie als Grundlinie eines Dreiecks an und nehmen den Radius des eingeschriebenen Kreises als Höhe des Dreiecks, so läßt sich das regelmäßige Vieleck als folgendes Dreieck darstellen:



Dieses Dreieck ist also dem regelmäßigen n eck an Flächeninhalt gleich, welches so ausgedrückt wird: $\frac{n\,s}{2}\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}$.



Ist die Länge der Seite und der Radius des eingeschriebenen Kreises gegeben, so ist der Flächeninhalt eines der congruenten Dreiecke $\frac{1}{2}s \times r = s \times \frac{1}{2}r = \frac{s\,r}{2}$; will man aber aus diesen beiden gegebenen Stücken die Hypotenuse x oder den Radius des umgeschriebenen Kreises berechnen, so ist $x = \sqrt{(r^2 + \frac{1}{4}s^2)}$.



Sind endlich die beiden Radien, R und r, des n ecks gegeben, so ist die unbekannte Seite des regelmäßigen Vielecks

$$R^2 = r^2 + \frac{1}{4}x^2$$
$$\underline{-\,r^2 \qquad -\,r^2}$$
$$R^2 - r^2 = \frac{1}{4}x^2$$

$\sqrt{(R^2 - r^2)} = \sqrt{\frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{2}x$, also $x = 2 \times \frac{1}{2}x = x = 2\sqrt{(R^2 - r^2)}$.

Häufig ist es auch noch vortheilhaft, den Flächeninhalt eines der congruenten Dreiecke des regelmäßigen n ecks aus den drei Seiten des Dreiecks zu berechnen und das Resultat mit n zu multipliciren.

Aufgaben:

1) Die Seite eines regelmäßigen Sechsecks ist 53′ lang, also in diesem Fall der Radius des umgeschriebenen Kreises auch 53′. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses regelmäßigen Sechsecks?

$h = \sqrt{(53^2 - 26{,}5^2)} = \sqrt{2106{,}75} = 45{,}89'$

$26{,}5' \times 45{,}89' = 1216{,}085$ □fuß = Flächeninhalt eines Dreiecks.

$6 \times 1216{,}085$ □′ $= 7296{,}51$ □fuß = Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks,

oder nach der Formel: $\sqrt{S.(S-a)(S-b)(S-c)}$

$$S = \frac{53+53+53}{2} = 79{,}5$$

$$(S-a) = (S-b) = (S-c) = 26{,}5$$

$$79{,}5 \times 26{,}5 \times 26{,}5 \times 26{,}5 = 1479465{,}1875$$

$\sqrt{1479465{,}1875} = 1216{,}332$ □fuß = △
6

7297,992 □fuß = dem Flächeninhalte des regelmäßigen Sechsecks.

2) Die Seite eines regelmäßigen Zwölfecks ist 4,16′ lang, der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises = 8′. Wie groß ist der Flächeninhalt der Figur und wie lang der Radius des eingeschriebenen Kreises?

$$r' = \sqrt{(8^2 - 2{,}08^2)} = \sqrt{59{,}6736} = 7{,}725'$$

2,08′ × 7,725′ = 16,068 □fuß = dem Flächeninhalte eines Dreiecks.
12
32136
16068
192,816 □fuß = Inhalt der Figur.

3) Die Seite eines regelmäßigen Elfecks ist 17′, der Radius des eingeschriebenen Kreises = 29,43′. Wie groß ist der Flächeninhalt dieser Figur?

8,5′ × 29,43′ = 250,155 □′
× 11
250155
250155
2751,705 □fuß.

4) Der Radius des eingeschriebenen Kreises eines regelmäßigen Siebenecks, r, ist 17′ lang, der Radius des umgeschriebenen Kreises, R = 18,96′. Wie lang ist die Seite des Vielecks und wie groß der Flächeninhalt der Figur?

$$S = 2\sqrt{(18{,}96^2 - 17^2)} = \sqrt{70{,}4816} = 8{,}395$$

```
                64          2
160 :  648         16,79'
       489
1660 : 15916
       15021
16780 : 89500
        83925
         5575 = Rest.
```

$7 \times 17' \times 8{,}395' = 999{,}005$ □ fuß = dem Flächeninhalte des regelmäßigen Siebenecks.

Zur Berechnung der regelmäßigen Figuren, namentlich der regelmäßigen Vielecke, hat man sich für die häufigst vorkommenden Polygone Tabellen angefertigt, wornach man mit Leichtigkeit die Flächeninhalte und die bestimmenden Stücke dieser Figuren berechnen kann.

Tabelle zu einigen regelmäßigen Figuren:

Figur	Inhalt	Seite
Dreieck	$0{,}43 \times S^2$	$1{,}73 \times r$
Viereck	S^2	$1{,}41 \times r$
Fünfeck	$1{,}72 \times S^2$	$1{,}17 \times r$
Sechseck	$2{,}6 \times S^2$	r
Siebeneck	$3{,}63 \times S^2$	$0{,}87 \times r$
Achteck	$4{,}83 \times S^2$	$0{,}76 \times r$
Neuneck	$6{,}18 \times S^2$	$0{,}68 \times r$
Zehneck	$7{,}69 \times S^2$	$0{,}62 \times r$
Elfeck	$9{,}25 \times S^2$	$0{,}55 \times r$
Zwölfeck	$11{,}19 \times S^2$	$0{,}52 \times r$

In vorstehender Tabelle bezeichnet S die Länge der Seite eines regelmäßigen Vielecks, r den Halbmesser des um dasselbe geschriebenen Kreises,

J den Flächeninhalt. Die mit J überschriebene Spalte enthält also die Inhalte der links in der ersten Spalte stehenden Vielecke ausgedrückt durch die Längen einer Seite. Die mit S überschriebene Spalte enthält die Längen einer Seite für eine regelmäßige Figur ausgedrückt durch den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises. Der Inhalt eines regelmäßigen Achtecks z. B., dessen Seite 3′ ist, beträgt demnach $4,83 \times 3^2 = 43,47 \square$ Fuß; oder ist der Halbmesser des um ein regelmäßiges Zwölfeck geschriebenen Kreises $= 8''$, so ist die Seite des Zwölfecks $S = 8'' \times 0,52 = 4,16''$, und daher der Inhalt desselben $= 4,16^2 \times 11,19 = 193,649664 \square''$.

Aufgaben:

1) Die Seite eines regelmäßigen Dreiecks ist 17″ lang; wie groß ist der Flächeninhalt desselben, und wie lang ist der Radius des ein- und des umgeschriebenen Kreises?

$$S^2 = 17'' \times 17'' = 289 \square'' \times 0,43 = 124,27 \square'' = \text{Flächeninhalt}$$

$$R = 1,73 \text{ in } 17'' = 9,827''.$$

$$r = \frac{\sqrt{(17^2 - 8,5^2)}}{3} = \frac{\sqrt{216,75}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{216,75}}{3} = \frac{14,722}{3} = 4,907''$$

2) Der Radius des umgeschriebenen Kreises eines Quadrats ist 31″; wie lang ist der Radius des eingeschriebenen Kreises und wie groß der Flächeninhalt?

$$1,41 \times 31'' = 43,71'' = S$$

$$r = \frac{43,71''}{2} = 21,855'' \text{ oder } = \sqrt{(31^2 - 21,855^2)} = 21,855''.$$

$$\text{Flächeninhalt} = 43,71'' \times 43,71'' = 1910,5641 \square''.$$

3) Die Seite eines regelmäßigen Fünfecks ist 14″ lang; wie groß ist der Flächeninhalt, wie lang der Radius des eingeschriebenen und wie lang der Radius des umgeschriebenen Kreises?

$$R = \frac{14}{1,17} = 11,96''$$

$$r = \sqrt{(11,96^2 - 7^2)} = \sqrt{94,0416} = 9,69''$$

$$\text{Flächeninhalt} = 1,72 \times 14^2 = 337,12 \square''$$

4) Der Umfang eines regelmäßigen Sechsecks ist 25′ 7,5″ lang; wie groß ist der Inhalt desselben und wie lang der Radius des eingeschriebenen Kreises?

$$6 \text{ in } 307{,}5'' = 51{,}25'' = S = R$$

$$\text{Inhalt} = 2{,}6 \times 51{,}25^2 = 6829{,}0625 \,\square''$$

$$r = \sqrt{(51{,}25^2 - 25{,}625^2)} = \sqrt{2626{,}5625 - 656{,}640625)}$$

$$= \sqrt{1969{,}921875} = 44{,}383''$$

5) Der Radius des umgeschriebenen Kreises eines regelmäßigen Siebenecks ist 9′ lang; wie groß ist der Flächeninhalt der Figur und wie lang der Radius des eingeschriebenen Kreises?

$$S = 9' \times 0{,}87 = 7{,}83'$$

$$\text{Flächeninhalt} = 3{,}63 \times 7{,}83^2 = 222{,}551307 \,\square\text{fuß}$$

$$r = \sqrt{(9^2 - 3{,}915^2)} = \sqrt{65{,}672775} = 8{,}103'.$$

6) Der Inhalt eines regelmäßigen Achtecks ist 2 □fuß 125,14 □″; wie groß ist die Seite des Achtecks, wie lang der Durchmesser des umgeschriebenen und wie groß der Radius des eingeschriebenen Kreises?

$$4{,}83 : 413{,}14 \,\square'' = 85{,}536'' = S^2$$

$$S = \sqrt{85{,}536} = 9{,}24''$$

$$0{,}76)\ 9{,}24 = 12{,}157'' = R$$

$$\times\, 2$$

$$\overline{24{,}314''} = \text{Durchmesser}$$

$$r = \sqrt{(12{,}157^2 - 4{,}62^2)} = \sqrt{127{,}68} = 11{,}3''.$$

7) Die Seite eines regelmäßigen Neunecks ist 14′ lang; wie groß ist der Flächeninhalt der Figur, wie lang ist der Radius des umgeschriebenen und wie lang der Radius des eingeschriebenen Kreises?

$$\text{Inhalt} = 6{,}18 \times 14^2 = 1211{,}28 \,\square\text{fuß}$$

$$R = 0{,}68 : 14' = 20{,}588'$$

$$r = \sqrt{(20{,}588^2 - 7^2)} = \sqrt{375{,}36} = 19{,}35'.$$

8) Der Halbmesser des um ein regelmäßiges Zehneck geschriebenen Kreises ist 4′; wie lang ist die Seite, wie groß der Flächeninhalt und wie lang der Radius des eingeschriebenen Kreises?

$$S = 4' \times 0{,}62 = 2{,}48'$$

$$\text{Inhalt} = 2{,}48^2 \times 7{,}69 = 47{,}296576 \,\square\text{fuß}.$$

$$r = \sqrt{(4^2 - 1{,}24)^2} = \sqrt{14{,}4624} = 3{,}803'.$$

9) Der Radius des umgeschriebenen Kreises eines regelmäßigen Elfecks ist 8′ lang; wie lang ist die Seite desselben, wie groß der Flächeninhalt und wie lang der Radius des eingeschriebenen Kreises?

$$S = 8' \times 0{,}55 = 4{,}4'$$

Inhalt $= 4{,}4^2 \times 9{,}25 = 179{,}08$ □fuß.

$$r = \sqrt{(8^2 - 2{,}2^2)} = \sqrt{59{,}16} = 7{,}69'.$$

10) Die Seite eines regelmäßigen Zwölfecks ist 7′ lang, die Seite eines regelmäßigen Sechsecks 14′. Wie verhalten sich

1. die Flächeninhalte;
2. die Radien der umgeschriebenen und
3. die Radien der eingeschriebenen Kreise zu einander?

Flächeninhalt vom Zwölfeck $= 11{,}19 \times 7^2 = 548{,}31$ □fuß.

" " Sechseck $= 2{,}6 \times 14^2 = 509{,}6$ □fuß.

R im Zwölfeck $= 0{,}52$ in $7' = 13{,}461'$.

R " Sechseck $= 14'$.

r " Zwölfeck $= \sqrt{(13{,}46^2 - 3{,}5^2)} = 12{,}99'$.

r " Sechseck $= \sqrt{(14^2 - 7^2)} = 12{,}12'$.

11) Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechsecks ist $= 420$ □fuß; wie lang muß die Seite eines regelmäßigen Zwölfecks genommen werden, welches denselben Flächeninhalt hat, und wie lang ist die Seite des Sechsecks?

$11{,}19 : 420 = \square' = 37{,}53 = S^2$

$\sqrt{37{,}53} = 6{,}12'$ ist die Seite des Zwölfecks zu nehmen.

$2{,}6 : 420 = 161{,}54\square' = S^2$

$\sqrt{161{,}54\square'} = 12{,}7'$ ist die Seite des Sechsecks.

12) Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Dreiecks ist $6{,}88\square'$; wie groß ist sein Umfang, wie groß der Halbmesser des umgeschriebenen und wie lang der Radius des eingeschriebenen Kreises?

$0{,}43 : 6{,}88\square' = 16 = S^2$

$S = \sqrt{16} = 4' \times 3 = 12' =$ Umfang des Dreiecks.

$1{,}73 : 4' = 2{,}312' = R$

$r = {}^1\!/_3\, h = {}^4\!/_2 = \frac{2 : 6{,}88}{3} = 6$ in $6{,}88' = 1{,}146'$.

13) Wie groß ist die Seite eines Quadrats, welches denselben Inhalt hat, wie ein regelmäßiges Dreieck, dessen Seiten $5^0\ 7'\ 9''$ lang sind?

$5^0\ 7'\ 9'' = 67{,}75'$

Höhe des Dreiecks $= \sqrt{(67{,}75^2 - 33{,}875^2)}$

$= \sqrt{3442{,}484375} = 58{,}672'$; $\frac{1}{2}\,h = \frac{58{,}672}{2} = 29{,}336'$

Flächeninhalt des Dreiecks, sowie auch des Quadrats $= 29{,}336' \times 67{,}75'$ $= 1987{,}514$ □fuß.

$\sqrt{1987{,}514} = 44{,}58'$ = Seite des Quadrats.

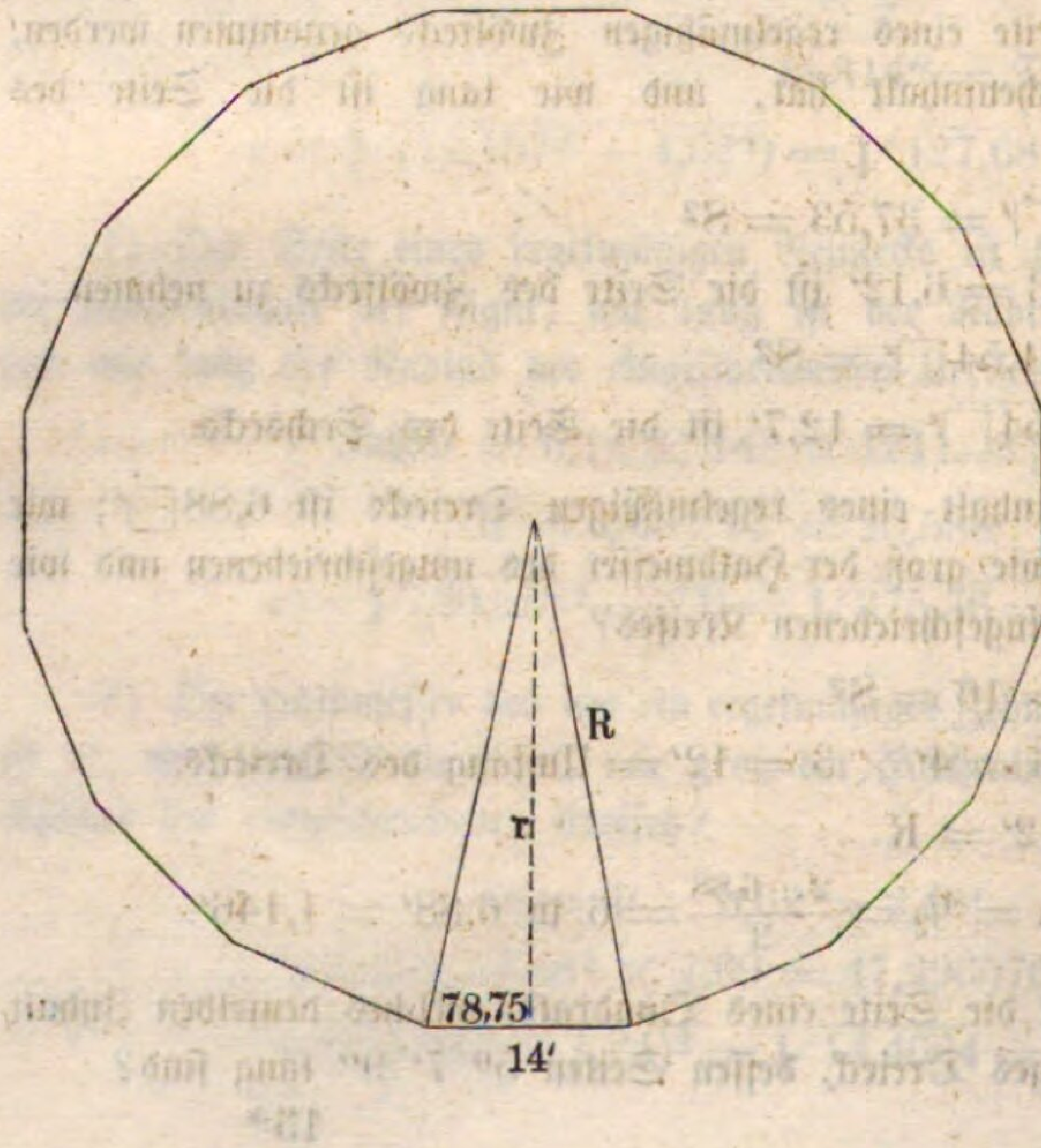
14) Aus einem runden, 36,84" dicken Baumstamm soll eine regelmäßige achteckige Mühlenwelle gehauen werden; wie lang werden deren Seiten?

$$\frac{36{,}84}{2} = 18{,}42 = R$$

$$\begin{array}{r} 18{,}42 \\ \cdot\ 0{,}76 \\ \hline 11052 \\ 12894\ \\ \hline 13{,}9992 = S. \end{array}$$

Wenn wir die Construction zu Hülfe nehmen, so ist es möglich, aus einem bestimmenden Stück eines regelmäßigen Vielecks die beiden andern wesentlichen unbekannten Stücke und den Flächeninhalt der Figur zu finden.

Aufgaben:



1) Die Seite eines regelmäßigen Sechszehnecks ist 14' lang; wie lang ist der Radius des um- und eingeschriebenen Kreises und wie groß der Flächeninhalt?

$\frac{1}{2}$ Polygonwinkel $= 7 \times \frac{180^0}{16} = 78{,}75^0$

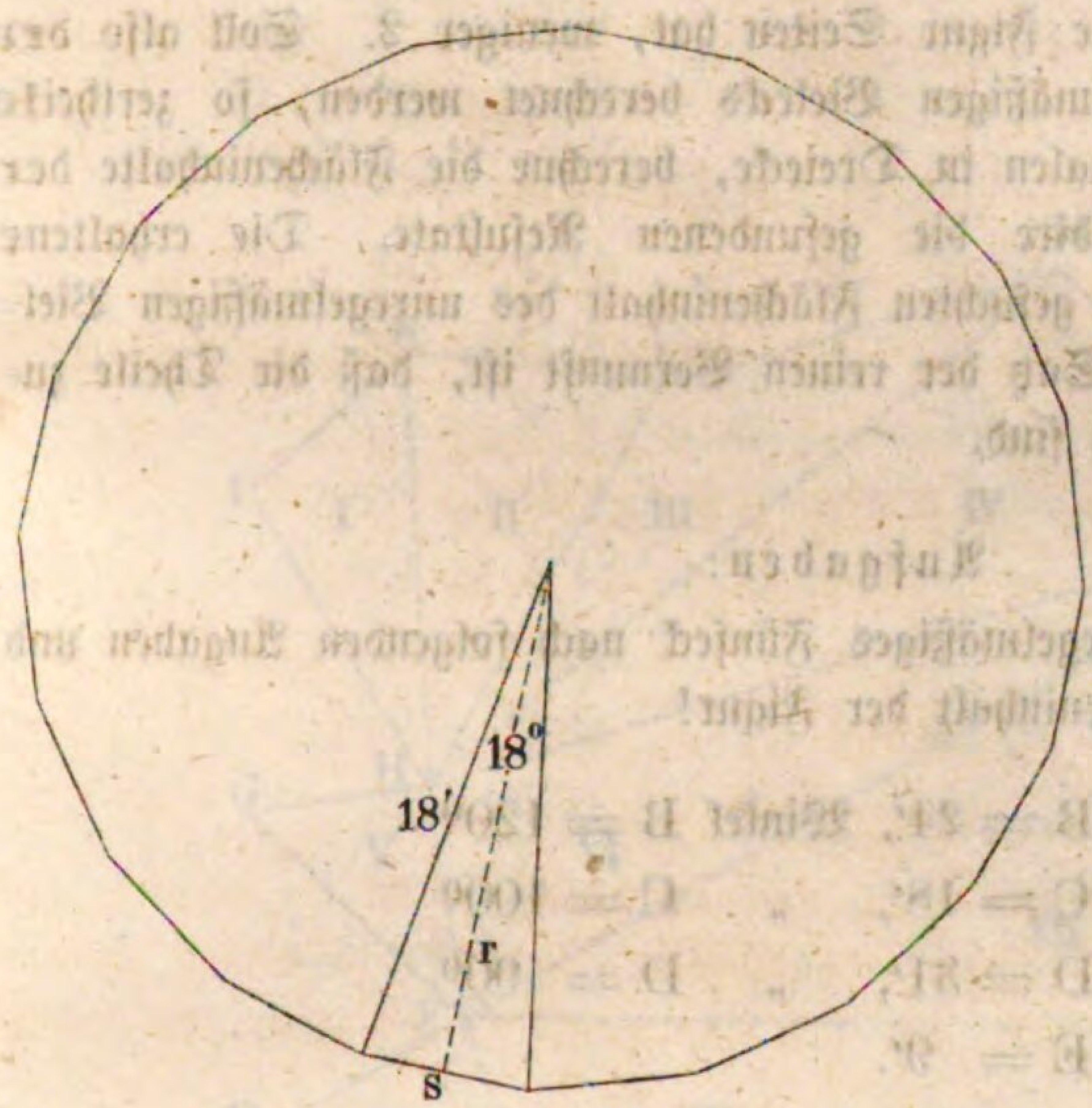
R gemessen $= 36{,}5'$

$r = \sqrt{(36{,}5^2 - 7^2)}$

$= \sqrt{1283{,}25} = 35{,}8'$.

$$\text{Inhalt} = \frac{n\,s}{2} \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4} s^2)}$$

$$= \frac{16 \times 14}{2} \times 35{,}8 = 4009{,}6 \,\square\,\text{fuß}.$$



2) Der Radius des umgeschriebenen Kreises eines regelmäßigen Zwanzigecks ist 18′ lang; wie lang ist die Seite des Vielecks, wie groß der Radius des eingeschriebenen Kreises und wie groß der Flächeninhalt der Figur?

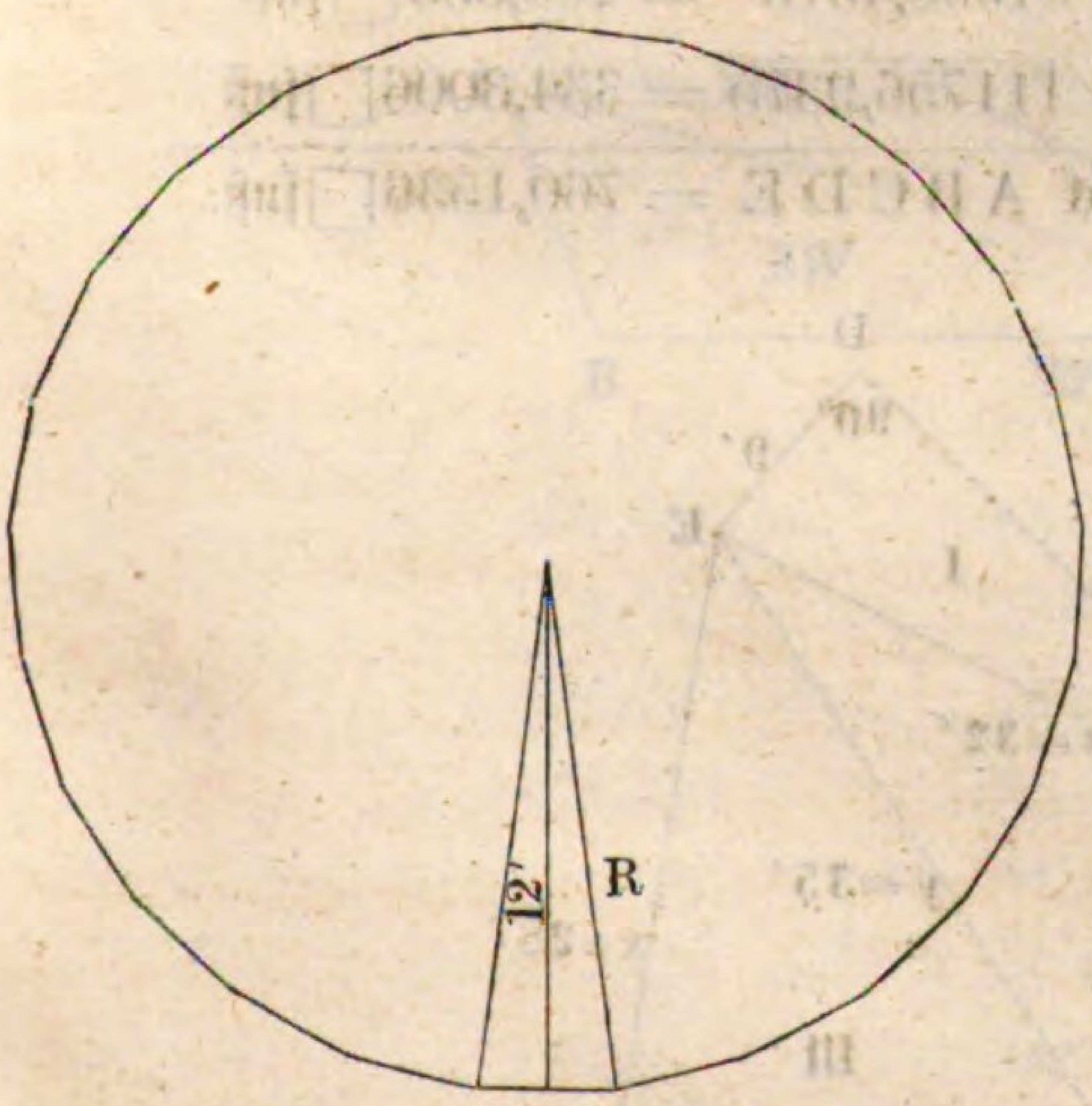
$$\text{Centriwinkel} = \frac{360^0}{20} = 18^0.$$

$$S \text{ gemessen} = 5{,}5'.$$

$$r = \sqrt{(18^2 - 2{,}75^2)}$$

$$= \sqrt{316{,}4375} = 17{,}78'.$$

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{20 \times 5{,}5}{2} \sqrt{316{,}4375} = 55 \times 17{,}78 = 978{,}34 \,\square\,\text{fuß}.$$



3) Der Radius des eingeschriebenen Kreises eines regelmäßigen Fünfundzwanzigecks ist 12′; wie lang ist der Radius des eingeschriebenen Kreises, wie lang die Seite des Vielecks und wie groß der Flächeninhalt desselben?

$$\tfrac{1}{2} \text{ Centriwinkel} = 7{,}2^0.$$

$$R \text{ gemessen} = 12{,}14'.$$

$$\tfrac{1}{2} S = \sqrt{(12{,}14^2 - 12^2)}$$

$$= \sqrt{3{,}3796}$$

$$= 1{,}838 \times 2$$

$$3{,}676' = s.$$

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{n\,s}{2} \times 12' = 25 \times 1{,}838' \times 12' = 541{,}448 \,\square\,\text{fuß}.$$

II. Berechnung des unregelmäßigen Vielecks.

In dem zweiten Abschnitt haben wir nachgewiesen, daß jede geradlinige Figur durch Diagonalen, welche sich nicht schneiden, in so viele Dreiecke getheilt werden kann, wie die Figur Seiten hat, weniger 2. Soll also der Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vielecks berechnet werden, so zertheile man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke, berechne die Flächeninhalte der einzelnen Dreiecke und addire die gefundenen Resultate. Die erhaltene Summe muß alsdann den gesuchten Flächeninhalt des unregelmäßigen Vielecks darstellen; da es ein Satz der reinen Vernunft ist, daß die Theile zusammen dem Ganzen gleich sind.

Aufgaben:

1) Construire ein unregelmäßiges Fünfeck nach folgenden Angaben und berechne alsdann den Flächeninhalt der Figur!

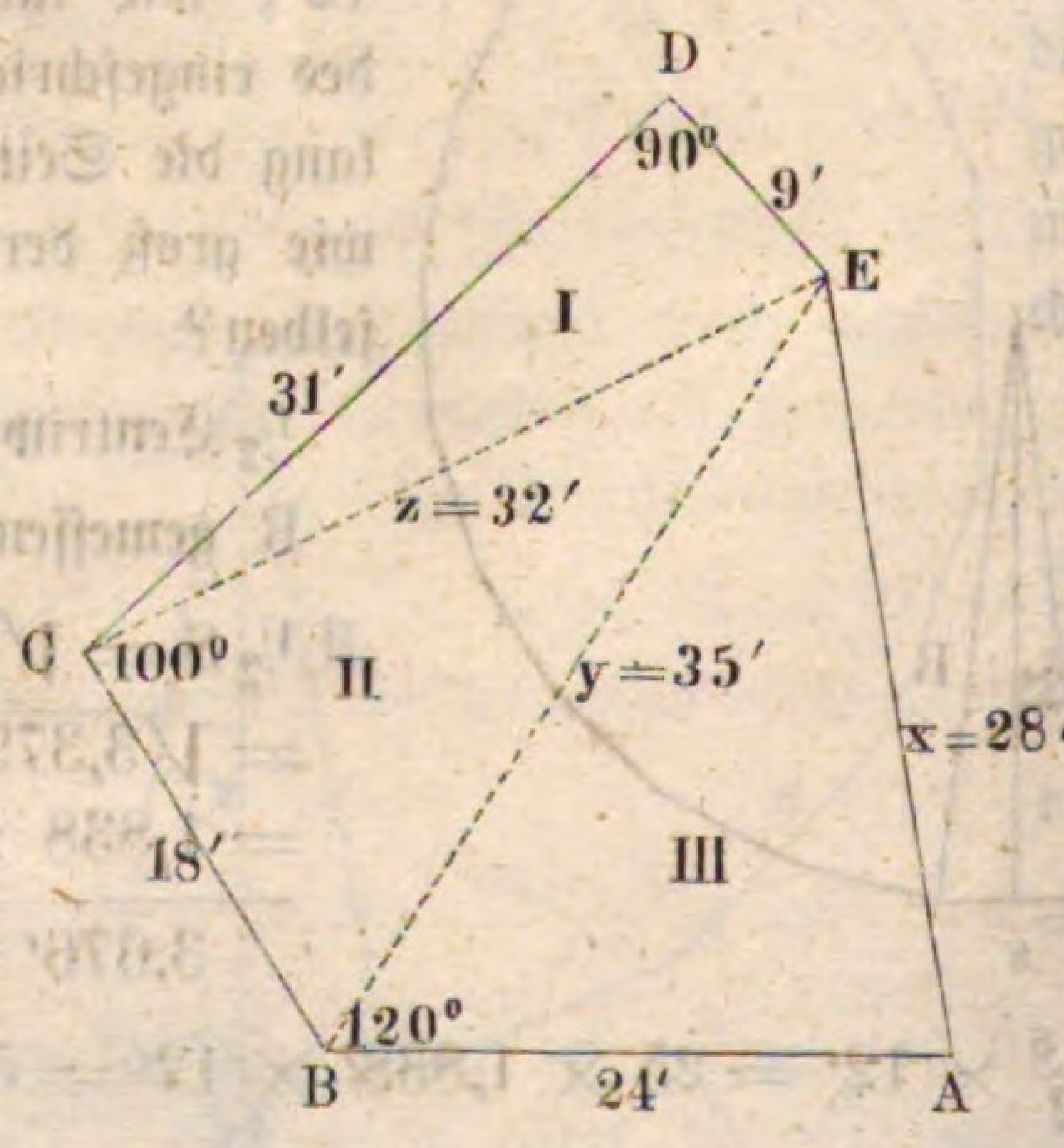
Seite	$AB = 24'$,	Winkel $B = 120^0$
„	$BC = 18'$,	„ $C = 100^0$
„	$CD = 31'$,	„ $D = 90^0$
„	$DE = 9'$.	

Dreieck $\quad I = \frac{31' \cdot 9'}{2} \quad = 139{,}5 \square$ fuß

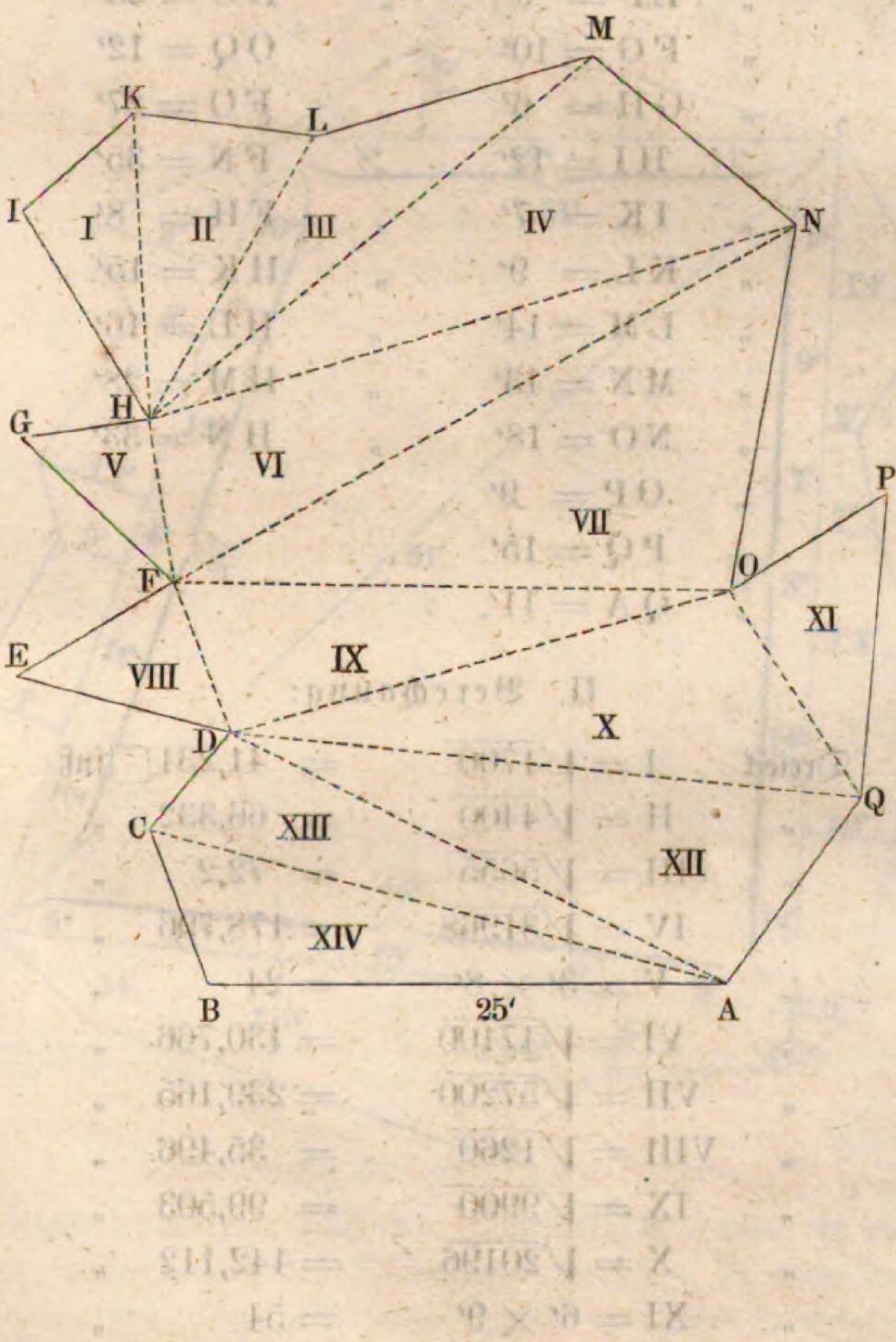
„ $\quad II = \sqrt{81998{,}4375} \quad = 286{,}353 \square$ fuß

„ $\quad III = \sqrt{111756{,}9375} = 334{,}3006 \square$ fuß

Vieleck $ABCDE = 760{,}1536 \square$ fuß.



2) Die Grundlinie A B des vorgezeichneten unregelmäßigen Sechszehnecks ist 25′ lang; wie groß ist der Flächeninhalt der Figur?



I. Messung der Seiten und Diagonalen:

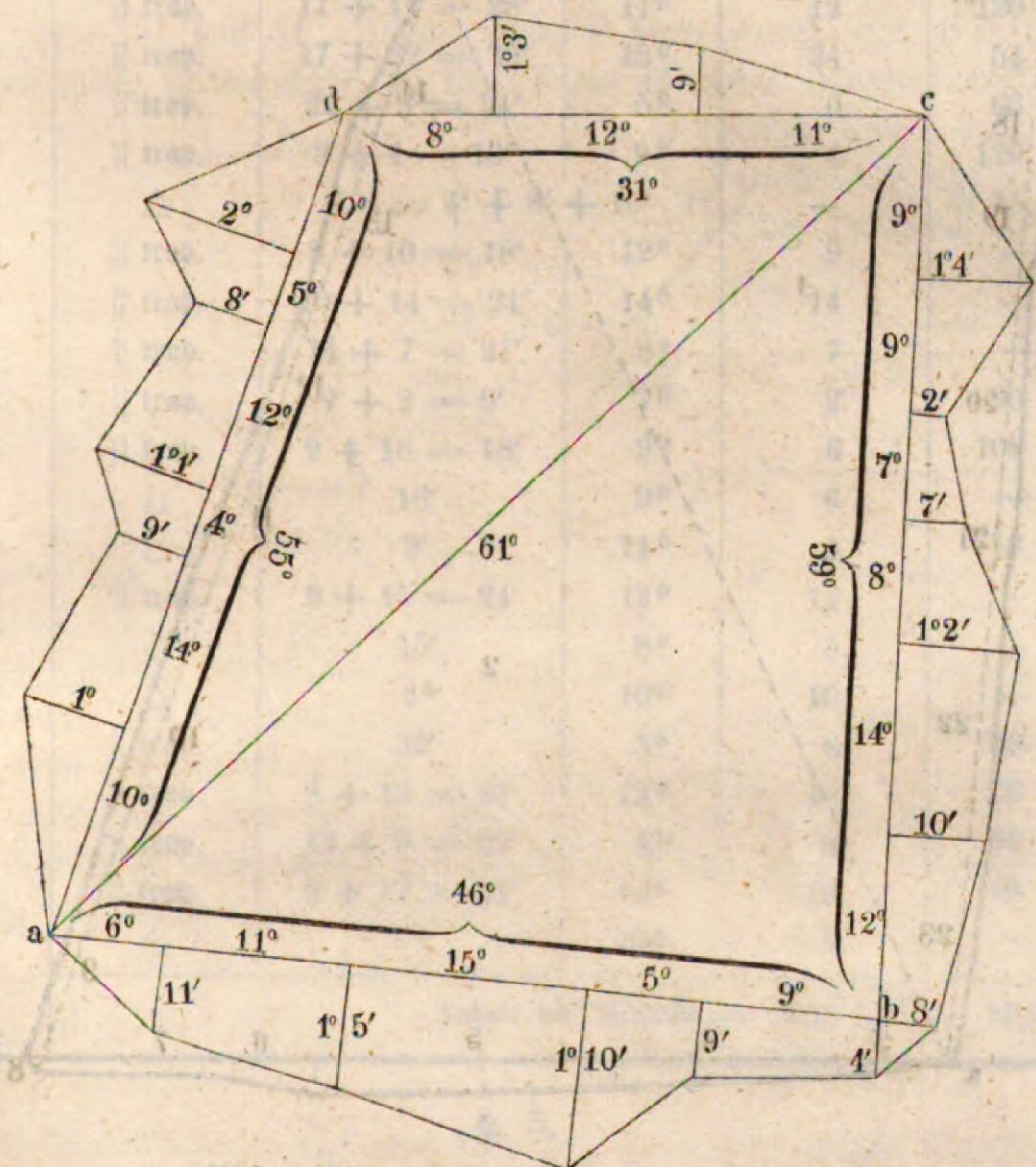
Seite	AB = 25′	Diagonale	AC = 29′
„	BC = 8′	„	AD = 27′
„	CD = 6′	„	DF = 8′
„	DE = 11′	„	DQ = 31′
„	EF = 9′	„	DO = 25′
„	FG = 10′	„	OQ = 12′
„	GH = 6′	„	FO = 27′
„	HI = 12′	„	FN = 35′
„	IK = 7′	„	FH = 8′
„	KL = 9′	„	HK = 15′
„	LM = 14′	„	HL = 16′
„	MN = 13′	„	HM = 28′
„	NO = 18′	„	HN = 33′
„	OP = 9′		
„	PQ = 15′		
„	QA = 11′.		

II. Berechnung:

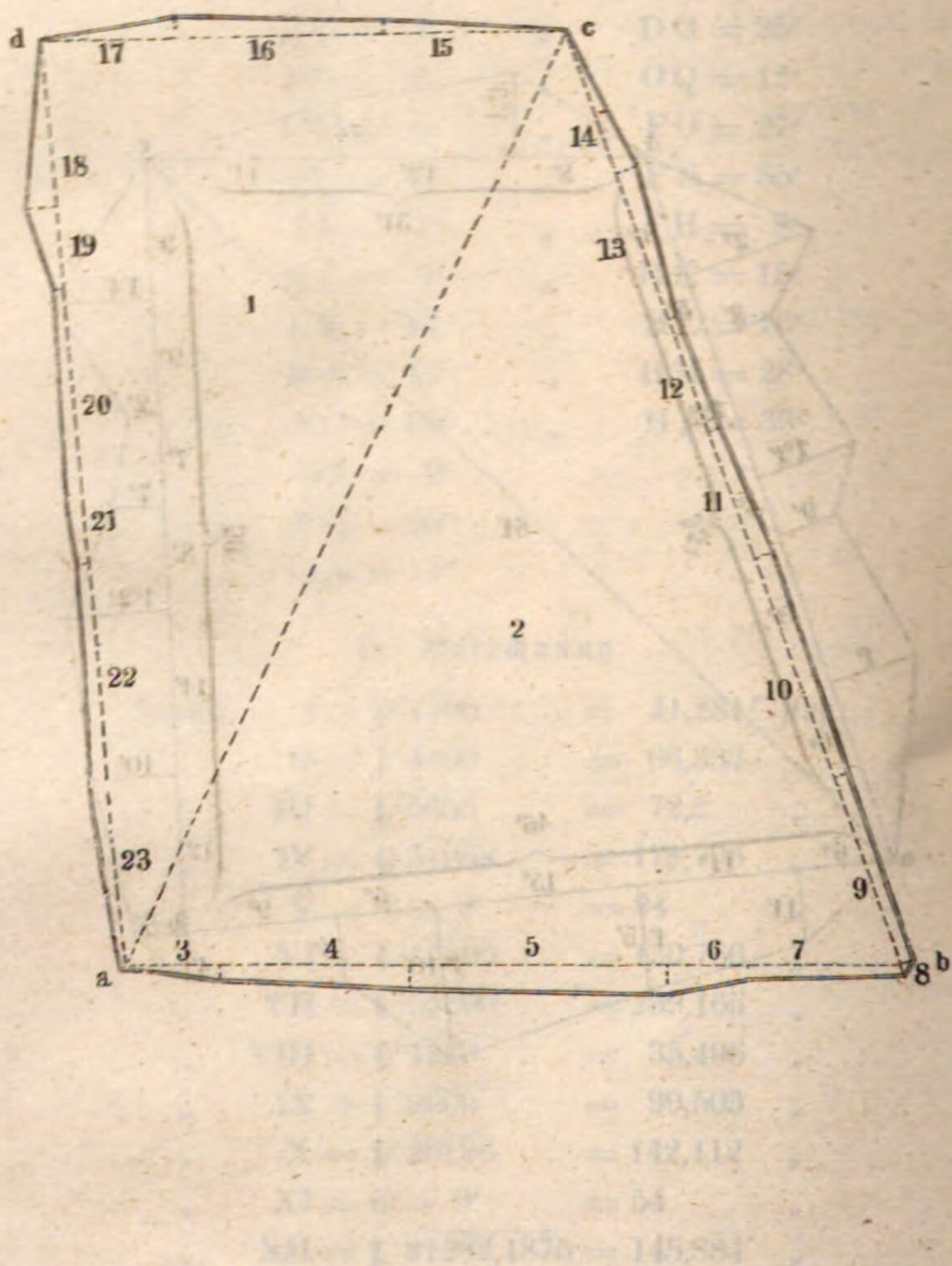
Dreieck	$I = \sqrt{1700}$	$= 41{,}231$	□fuß
„	$II = \sqrt{4400}$	$= 66{,}332$	„
„	$III = \sqrt{5655}$	$= 72{,}2$	„
„	$IV = \sqrt{31968}$	$= 178{,}796$	„
„	$V = 3' \times 8'$	$= 24$	„
„	$VI = \sqrt{17100}$	$= 130{,}766$	„
„	$VII = \sqrt{57200}$	$= 239{,}165$	„
„	$VIII = \sqrt{1260}$	$= 35{,}496$	„
„	$IX = \sqrt{9900}$	$= 99{,}503$	„
„	$X = \sqrt{20196}$	$= 142{,}112$	„
„	$XI = 6' \times 9'$	$= 54$	„
„	$XII = \sqrt{21282{,}1875}$	$= 145{,}884$	„
„	$XIII = \sqrt{6200}$	$= 78{,}74$	„
„	$XIV = \sqrt{8556}$	$= 92{,}499$	„
	Sechszehneck	$= 1400{,}724$	□fuß.

3) Ein Geometer hat eine, in der Grundform viereckige Weide gemessen und folgende Kladde erhalten:

I. Messung:



II. Zeichnung:



III. Berechnung:

Nro.	Figur.	Grundlinie.	Höhe.	Inhalt. □Ruthen.	Inhalt. □Fuß.
1	△	3 S = 61° + 55° + 31°		849	132,48
2	△	3 S = 61° + 46° + 59°		1273	53,28
3	△	72′	11′	2	108
4	‖ trap.	11 + 17 = 28′	11°	12	120
5	‖ trap.	17 + 22 = 39′	15°	24	54
6	‖ trap.	22 + 9 = 31′	5°	6	66
7	‖ trap.	9 + 4 = 13′	9°	4	126
8	△	3 S = 4′ + 8′ + 10′		—	15,19
9	‖ trap.	8 + 10 = 18′	12°	9	—
10	‖ trap.	10 + 14 = 24′	14°	14	—
11	‖ trap.	14 + 7 = 21′	8°	7	—
12	‖ trap.	7 + 2 = 9′	7°	2	90
13	‖ trap.	2 + 16 = 18′	9°	6	108
14	△	16′	9°	6	—
15	△	9′	11°	4	18
16	‖ trap.	9 + 15 = 24′	12°	12	—
17	△	15′	8°	5	—
18	△	2°	10°	10	—
19	‖ trap.	32′	5°	6	96
20	‖ trap.	8 + 13 = 21′	12°	10	72
21	‖ trap.	13 + 9 = 22′	4°	3	96
22	‖ trap.	9 + 12 = 21′	14°	12	36
23	△	1°	10°	5	—
		Inhalt des Vielecks		= 2289 □°	38,95 □′

§. 5.

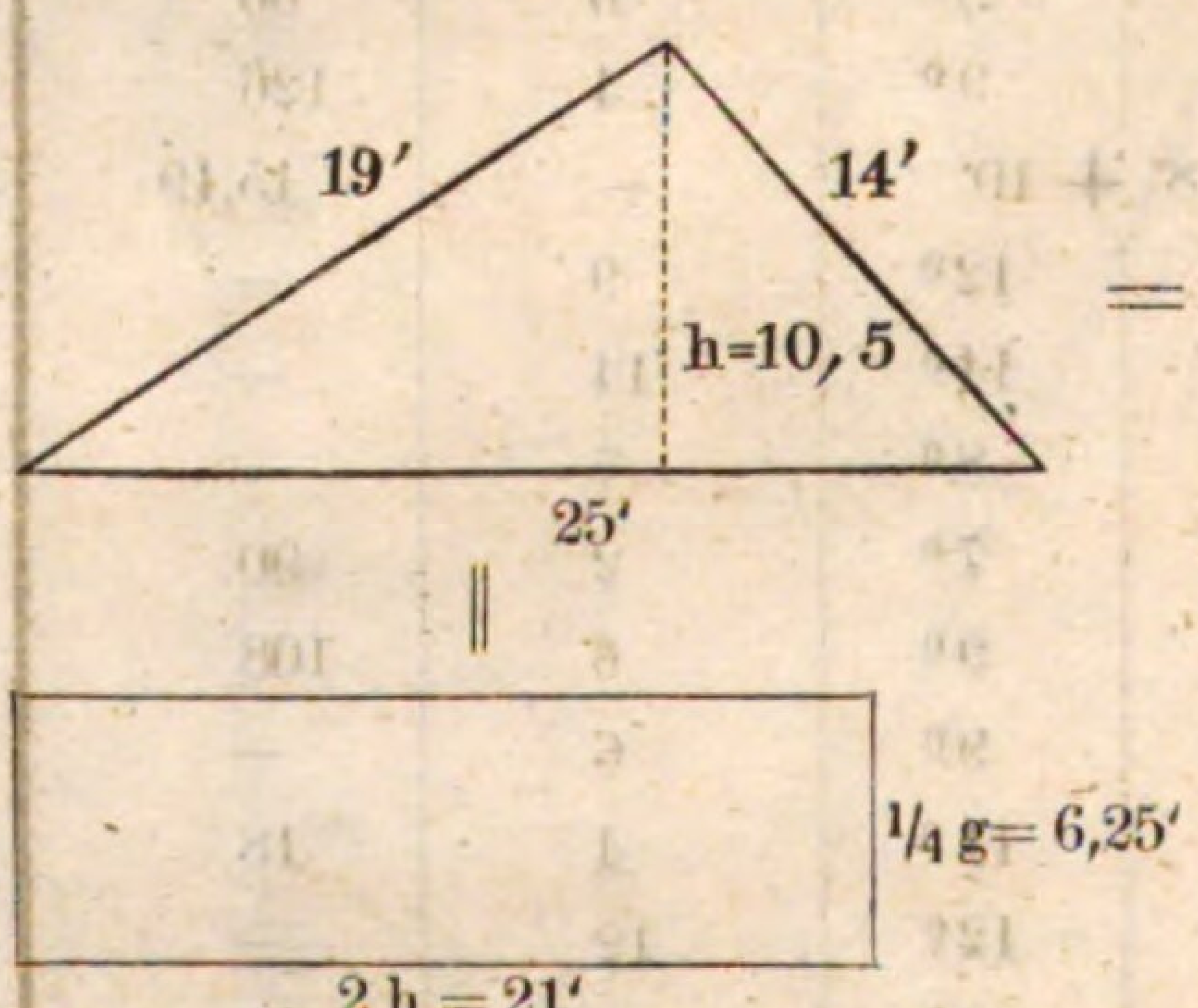
Verwandlung der geradlinigen Figuren.

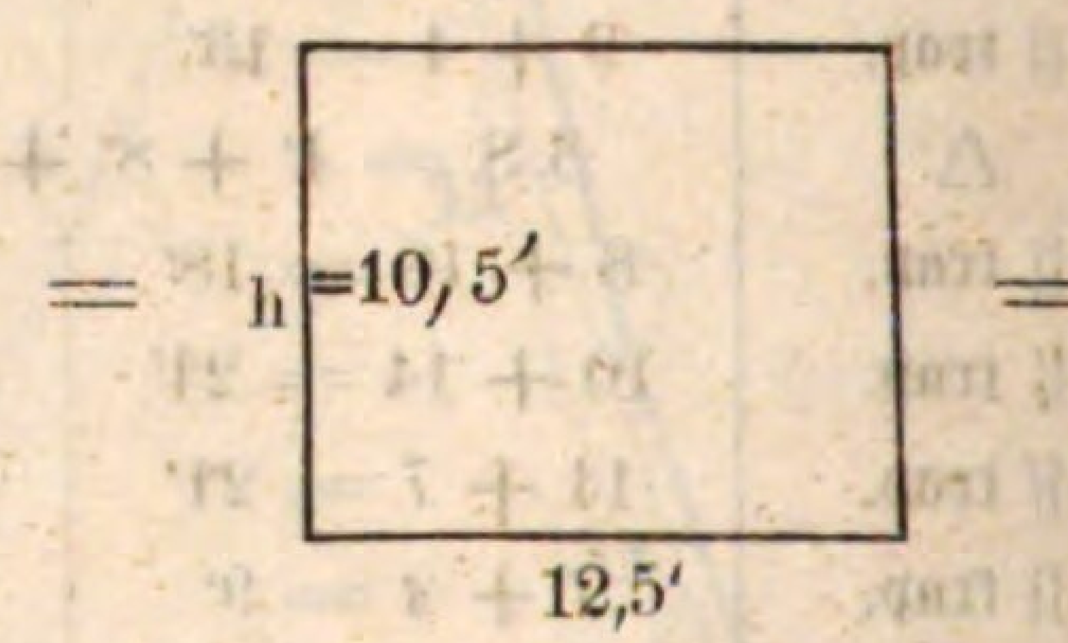
Eine Figur verwandeln heißt im mathematischen Sinne, ihr eine andere Form geben, ohne dadurch den Flächeninhalt derselben zu verändern. Man ist im Stande, jede geradlinige Figur durch mathematische Construction in jede andere zu verwandeln. Soll zuerst ein Dreieck in ein Rechteck verwandelt werden, so nehme man entweder die halbe Grundlinie des Dreiecks zur Grundlinie des Rechtecks und die ganze Höhe des Dreiecks zur ganzen Höhe des Rechtecks; oder man nehme die halbe Höhe des Dreiecks zur ganzen Höhe des Rechtecks und die ganze Grundlinie des Dreiecks zur Grundlinie

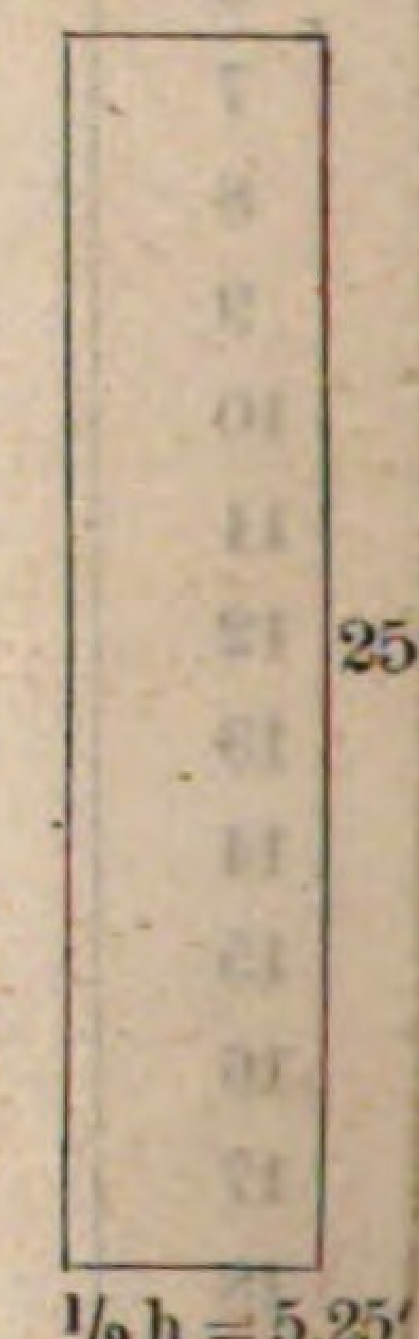
des Rechtecks. Es versteht sich von selbst, daß man von der Grundlinie des Dreiecks jeden beliebigen Theil zur Grundlinie des Rechtecks nehmen kann, wenn man die Höhe des Rechtecks darnach bestimmt, und eben so jeden beliebigen Theil von der Höhe des Dreiecks als Höhe des Rechtecks setzen kann, wenn man darnach die Grundlinie des Rechtecks bestimmt, d. h. ein Dreieck kann in beliebig viele Rechtecke von gleichem Flächeninhalte verwandelt werden.

Aufgaben:

1) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 25, 19 und 14′ lang. Construire drei Rechtecke, welche diesem Dreieck an Flächeninhalt gleich sind!



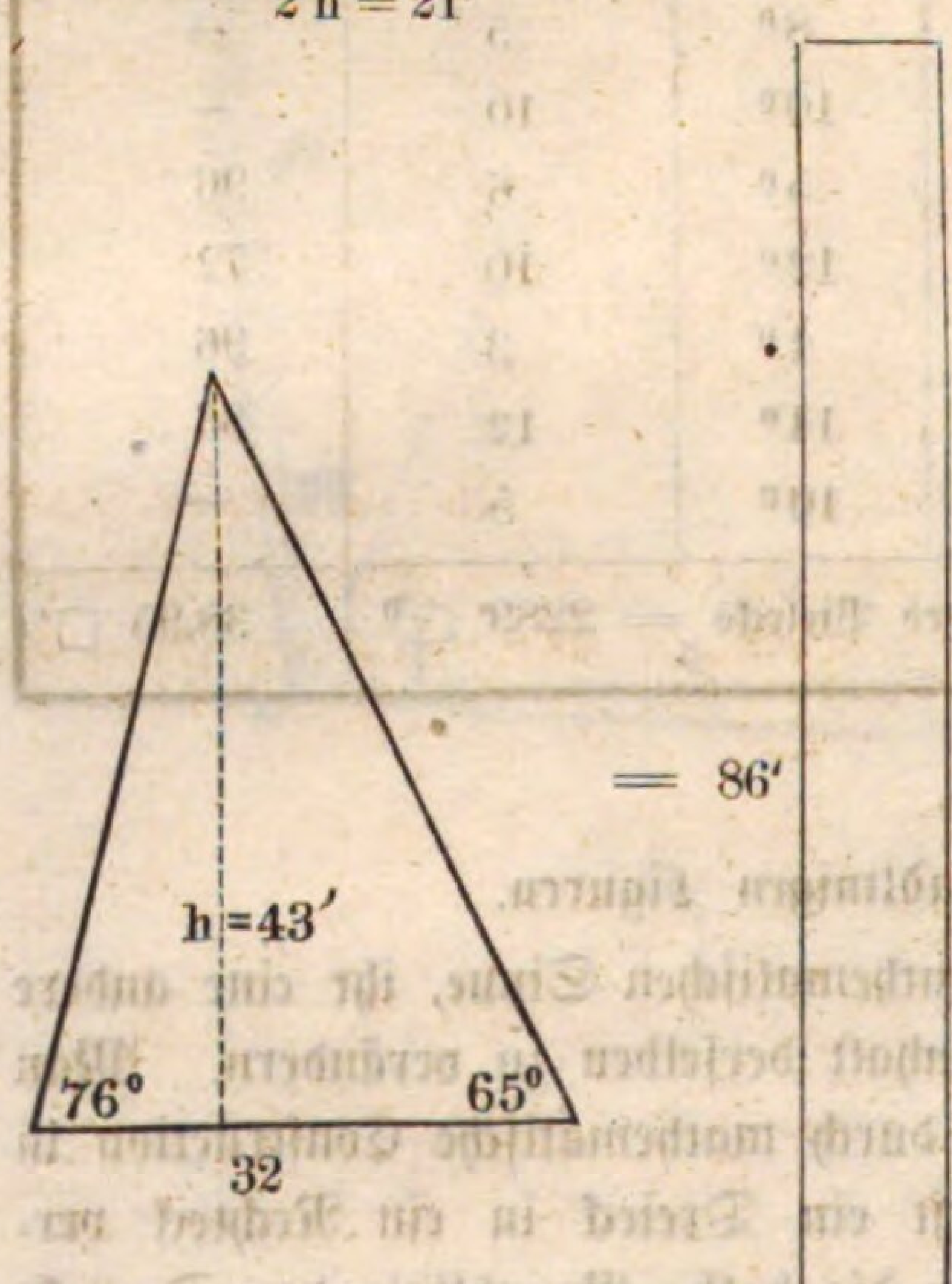




Probe:

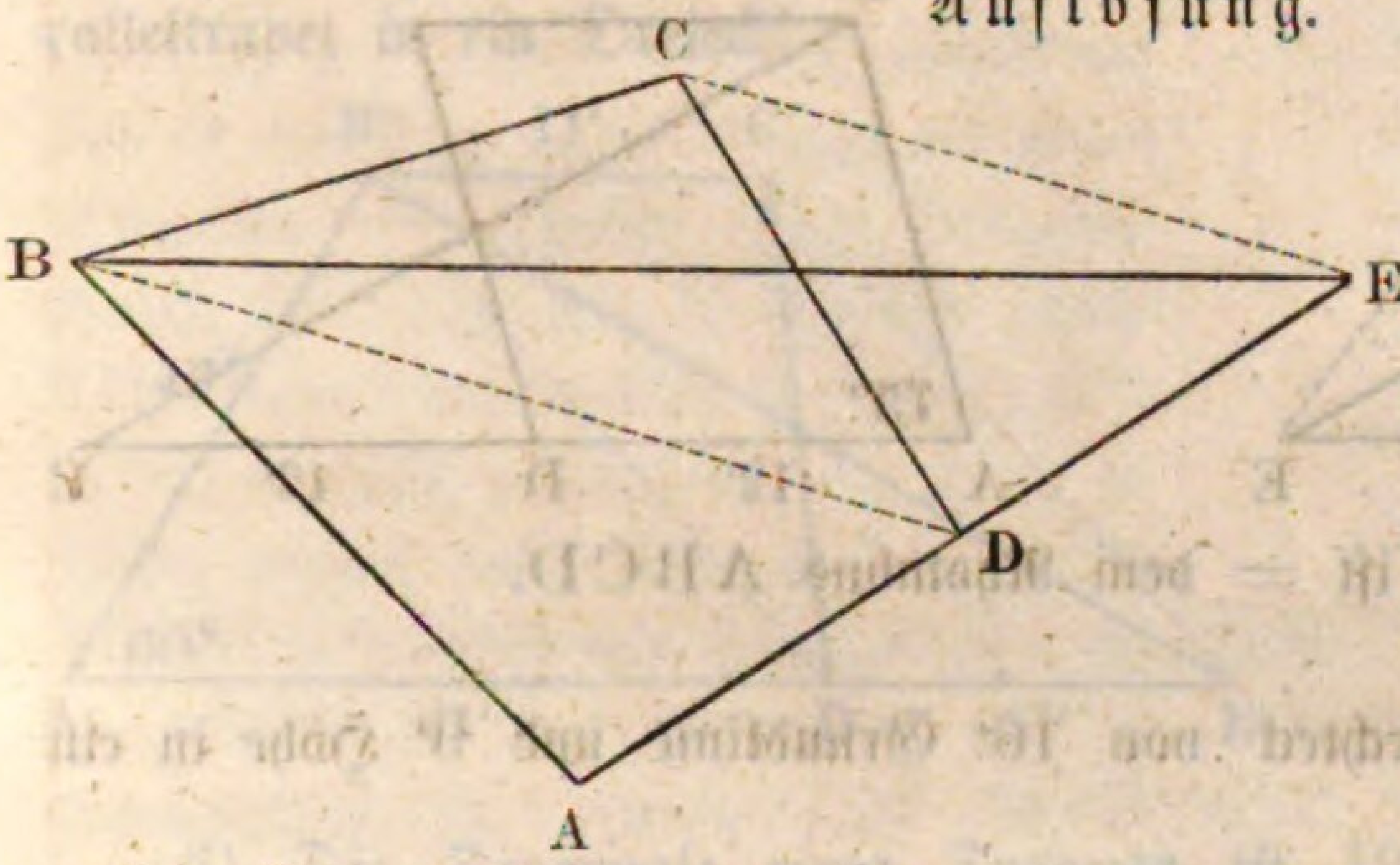
$10{,}5 \times 12{,}5 = 131{,}25$
$5{,}25 \times 25 = 131{,}25$
$21 \times 6{,}25 = 131{,}25$

2) Die Grundlinie eines Dreiecks ist 32′ lang, die beiden anliegenden Winkel sind 76 u. 65⁰ groß. Construire ein Rechteck von gleichem Flächeninhalte, welches noch einmal so hoch als das Dreieck ist!



Die nächste Aufgabe ist die, jede beliebige vierseitige Figur in ein Dreieck von gleichem Flächeninhalte zu verwandeln.

Auflösung.



Soll das Trapez ABCD in ein Dreieck verwandelt werden, so ziehe man die Diagonale BD und zu dieser Diagonale durch die gegenüberliegende Spitze C die Parallele CE und verlängere die der Diagonale anliegende Seite AD, bis sie die Parallele CE in E schneidet, alsdann ziehe man endlich eine gerade Linie von B nach E, dann ist ABE das verlangte Dreieck, welches dem Trapez ABCD an Flächeninhalt gleich ist.

Beweis:

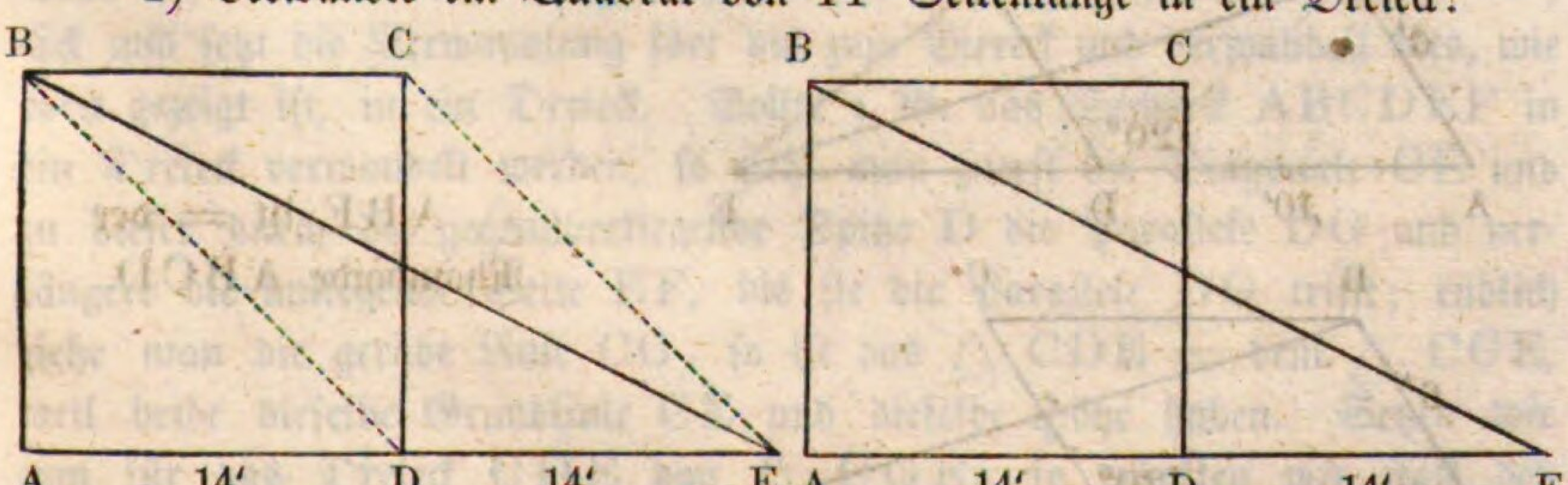
Das Dreieck BCD ist = BED, denn beide haben dieselbe Grundlinie BD, und da sie zwischen Parallelen liegen, auch dieselbe Höhe. Dreiecke aber von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen haben gleiche Flächeninhalte. Setzen wir nun für das Dreieck BCD, welches einen Theil des Trapezes bildet, das gleiche Dreieck BED, so erhalten wir:

Dreieck ABD + BCD = $\triangle$ ABD + BDE,

das ist: Trapez ABCD = $\triangle$ ABE.

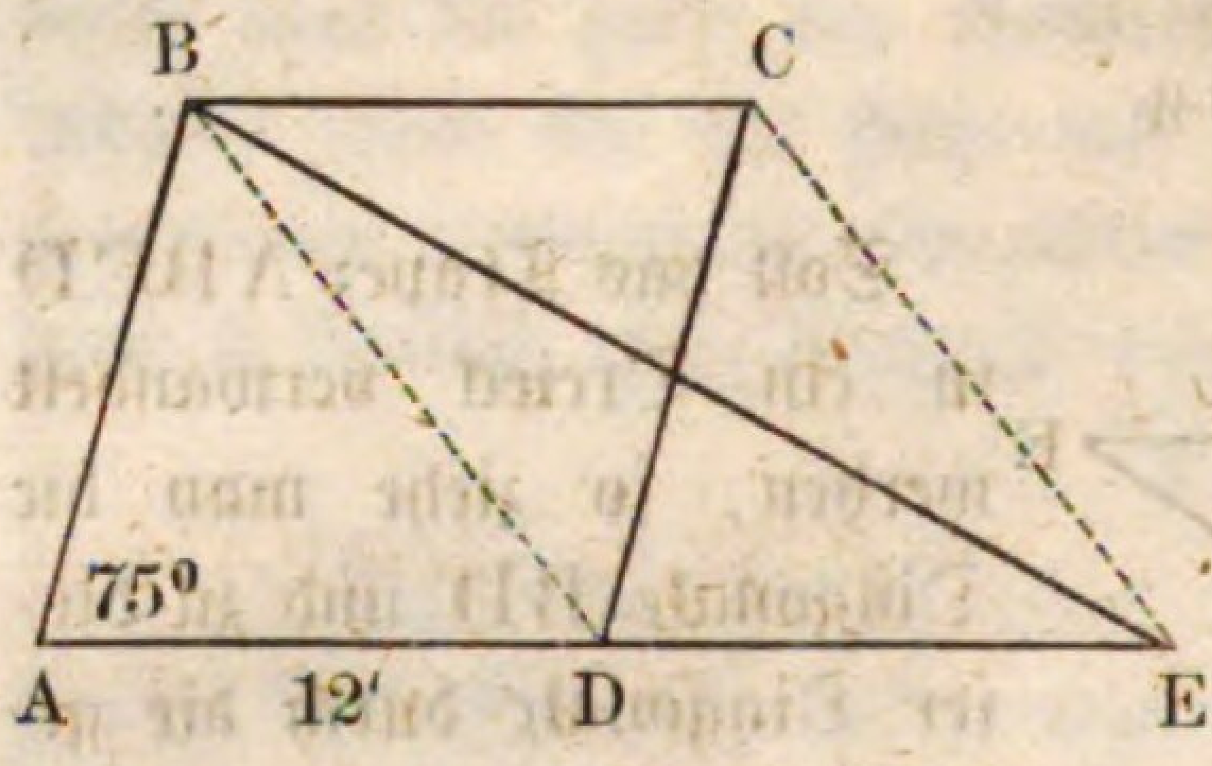
Es gibt sechs Arten von vierseitigen Figuren, welche gemeinschaftliche und besondere Eigenschaften haben. Wegen ihrer gemeinsamen Eigenschaften werden sie auf dieselbe Weise, wegen ihrer besondern Merkmale auf besondere Weise in ein Dreieck verwandelt; daher folgende sechs Aufgaben:

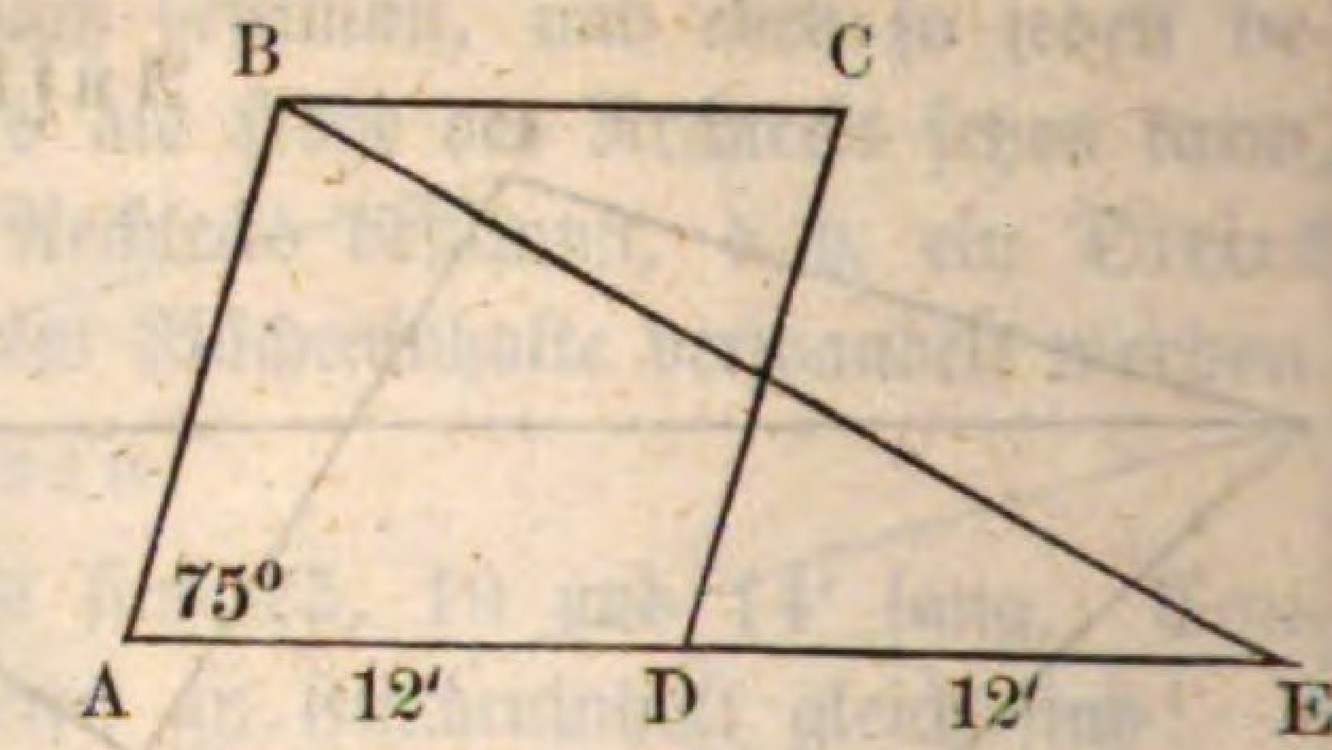
1) Verwandle ein Quadrat von 14′ Seitenlänge in ein Dreieck!



Dreieck ABE ist = dem Quadrat ABCD.

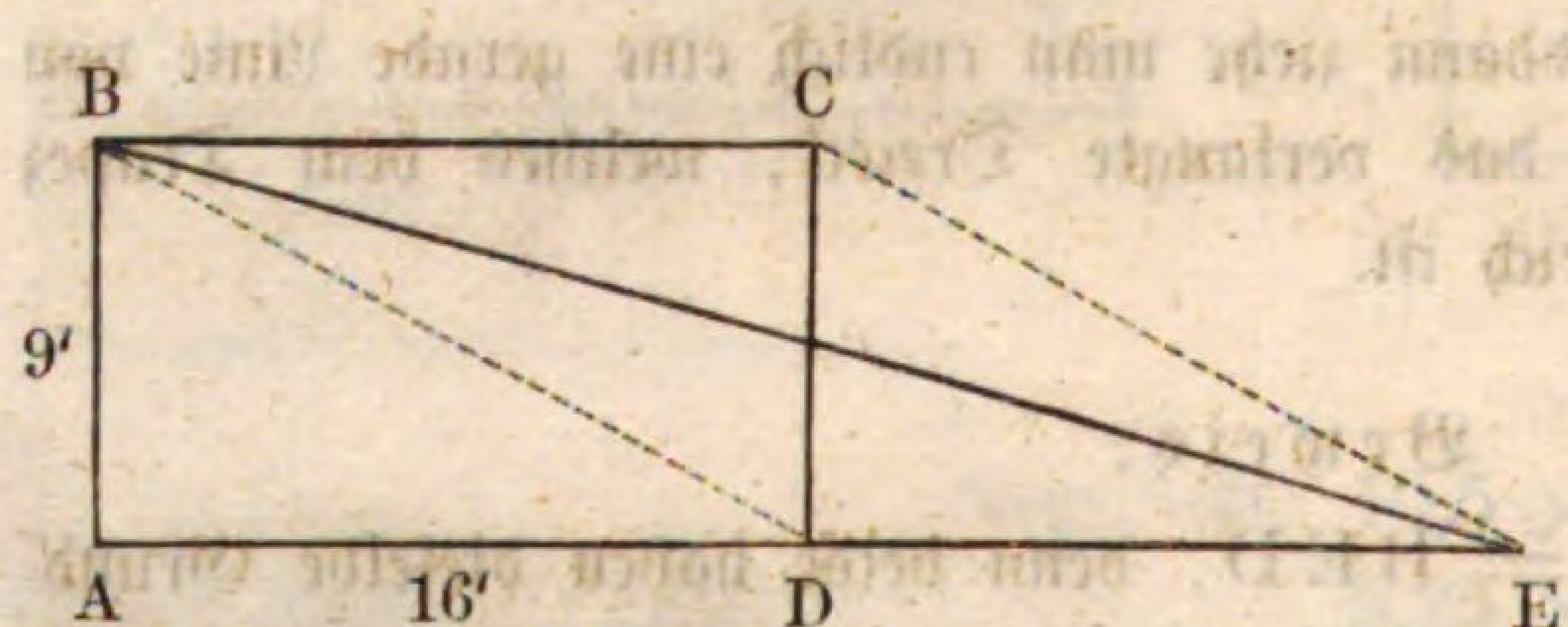
2) Verwandle einen Rhombus von 12′ Seitenlänge und einem Winkel von 75⁰ in ein Dreieck!



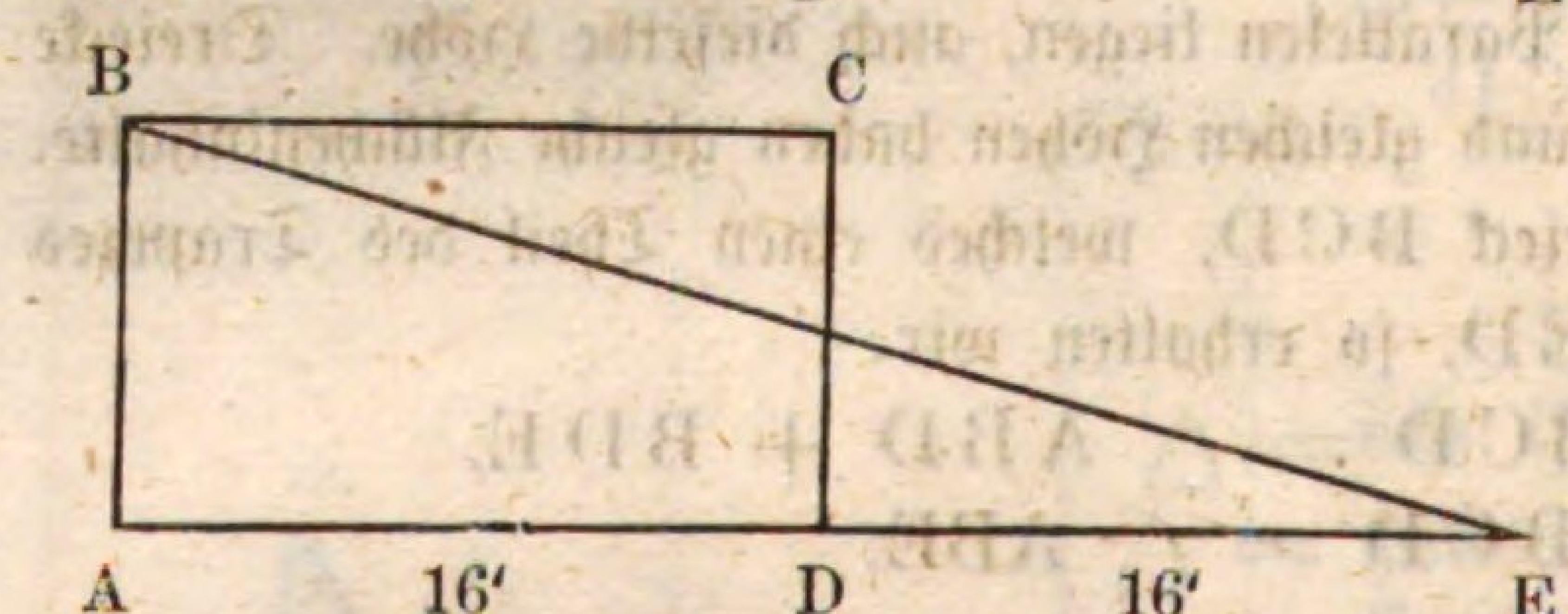


△ ABE ist = dem Rhombus ABCD.

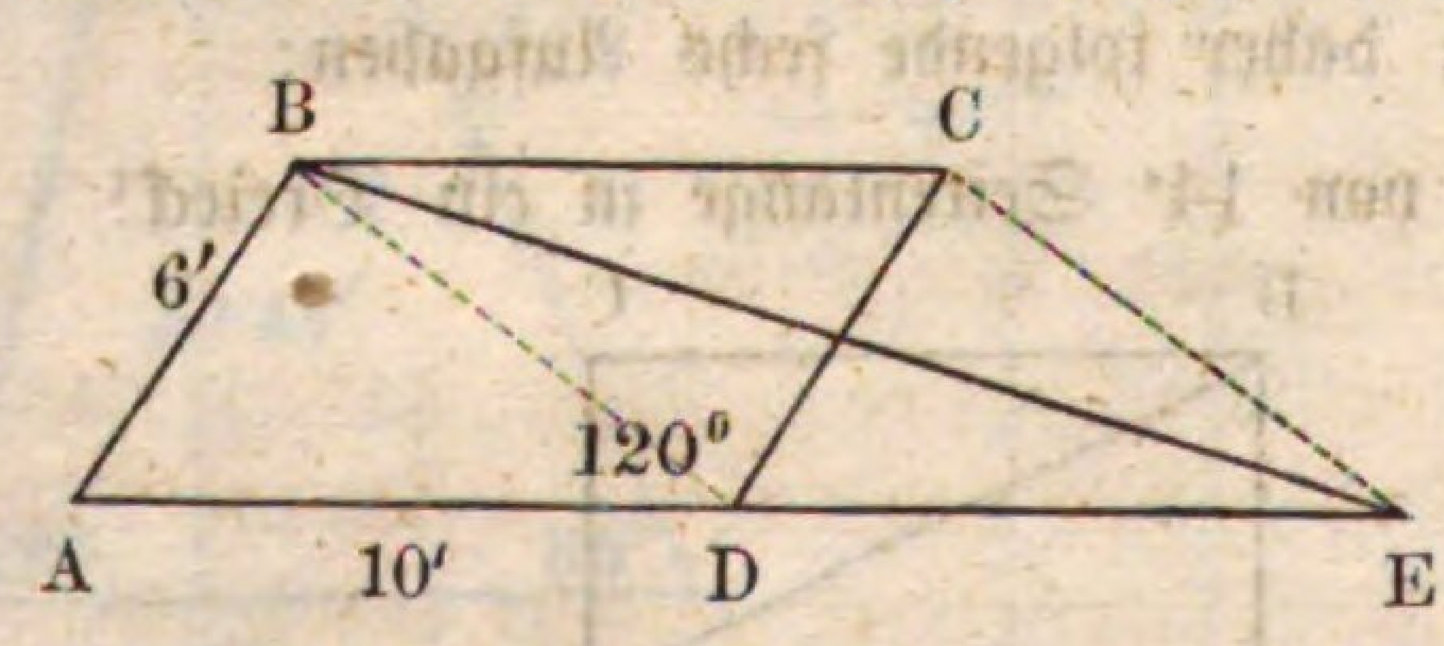
3) Verwandle ein Rechteck von 16′ Grundlinie und 9′ Höhe in ein Dreieck!



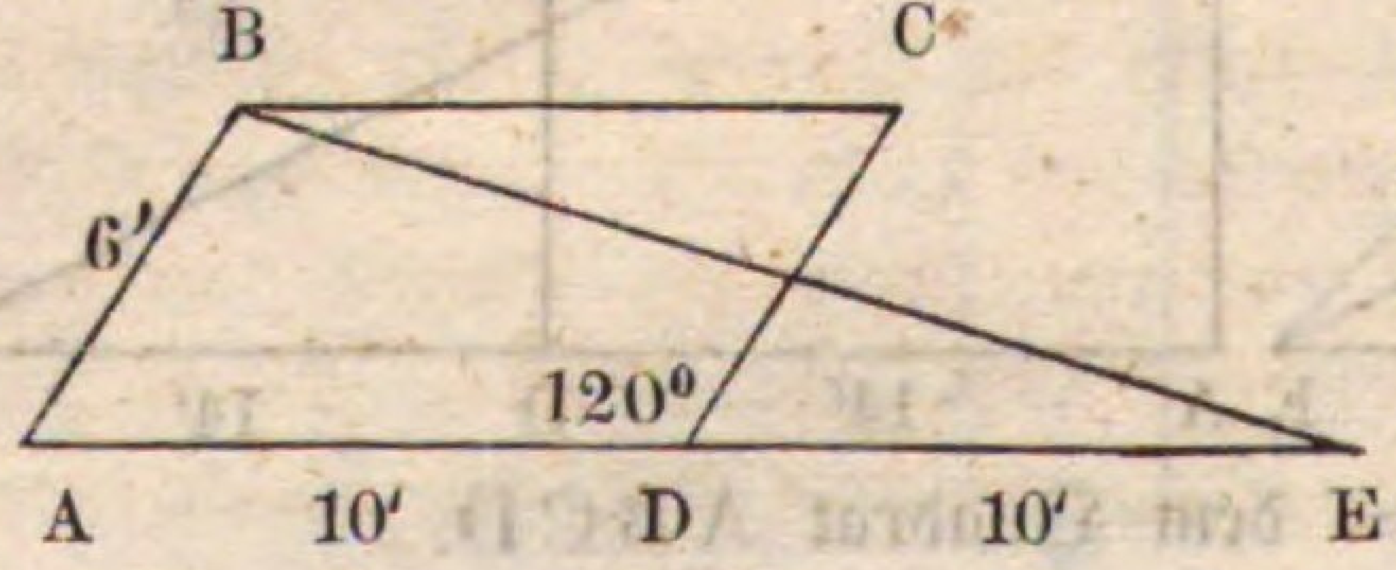
△ ABE ist = dem Rechteck ABCD.



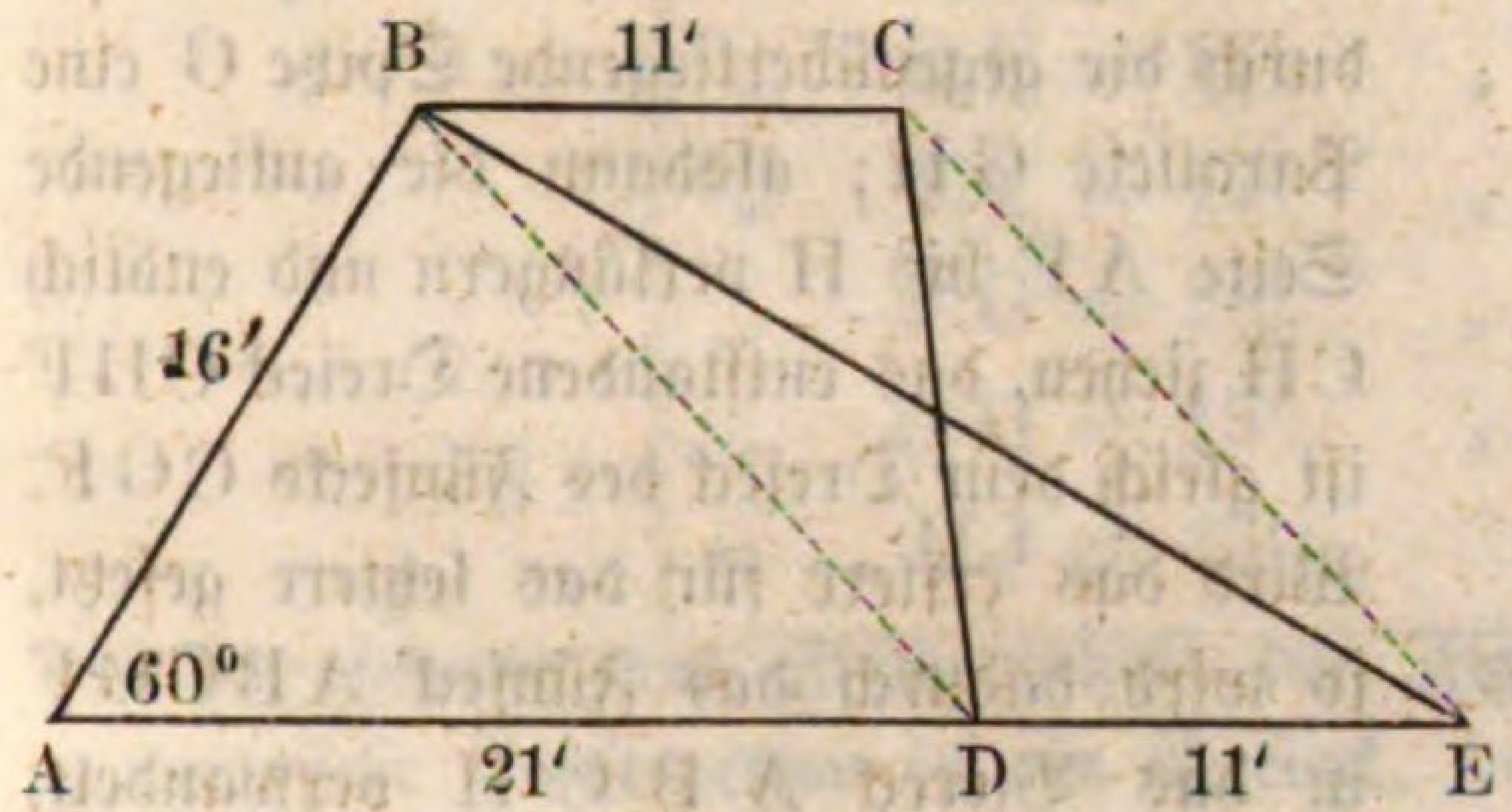
4) Verwandle eine Rhomboide, deren Seiten 10 und 6′ lang sind und einen Winkel von 120⁰ einschließen, in ein Dreieck!



△ ABE ist = der Rhomboide ABCD.

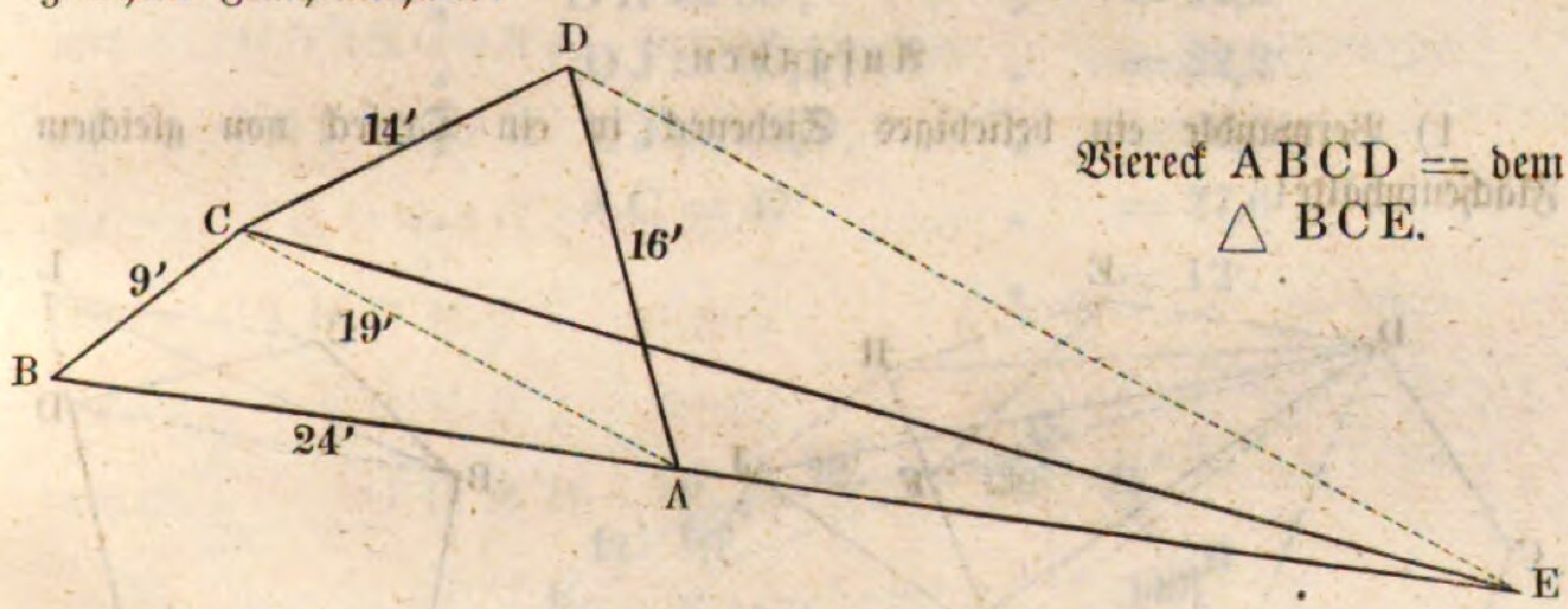


5) Die Grundlinie eines Paralleltrapezes ist 21′ lang, die anliegende Seite mißt 16′ und schließt mit der Grundlinie einen Winkel von 60° ein; die gegenüberliegende parallele Seite ist 11′ lang. Verwandle dieses Paralleltrapez in ein Dreieck!



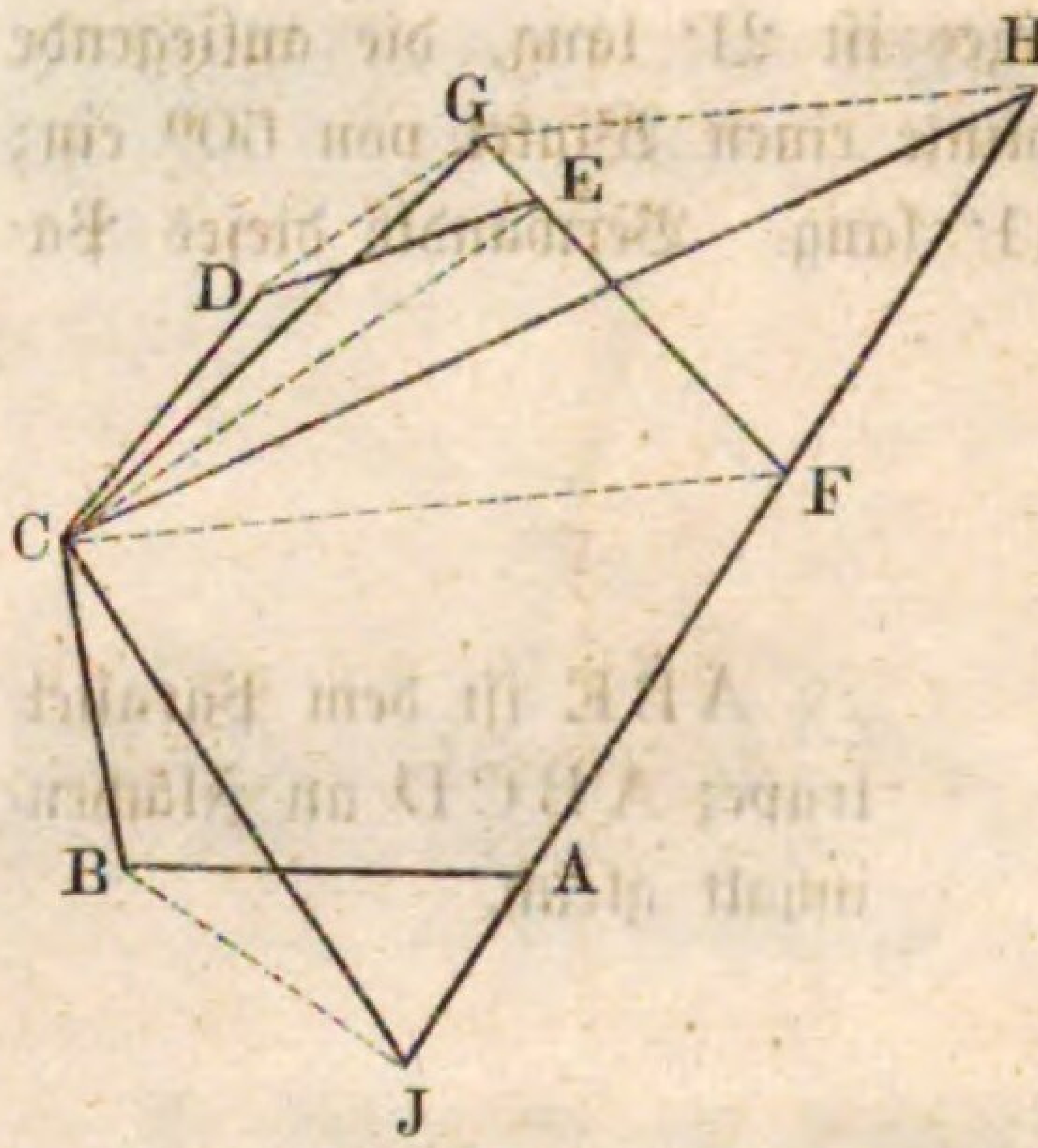
△ ABE ist dem Paralleltrapez ABCD an Flächeninhalt gleich.

6) Die Diagonale eines Trapezes ist 19′ lang, die beiden Seiten oberhalb der Diagonale sind 14 und 16′ lang, die beiden Seiten unterhalb der Diagonale 9 und 24′; verwandle dieses Trapez in ein Dreieck von gleichem Flächeninhalte!



Viereck ABCD = dem △ BCE.

Wir können also jetzt jedes Viereck in ein Dreieck und dieses in ein Rechteck verwandeln; die nächste Aufgabe muß also die sein, jedes beliebige Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln, welche auf folgende Weise gelös't wird: Man verwandelt das n-Eck zunächst in ein (n—1-) Eck, dies in ein (n—2-) Eck und setzt die Verwandlung fort bis zum Viereck und verwandelt dies, wie eben gezeigt ist, in ein Dreieck. Sollte z. B. das Sechseck ABCDEF in ein Dreieck verwandelt werden, so ziehe man zuerst die Diagonale CE und zu dieser durch die gegenüberliegende Spitze D die Parallele DG und verlängere die anliegende Seite EF, bis sie die Parallele DG trifft; endlich ziehe man die gerade Linie CG, so ist das △ CDE = dem △ CGE, weil beide dieselbe Grundlinie CE und dieselbe Höhe haben. Setzen wir nun für das Dreieck CDE das △ CGE, so erhalten wir statt des gegebenen Sechsecks ABCDEF das Fünfeck ABCGF, welches dem

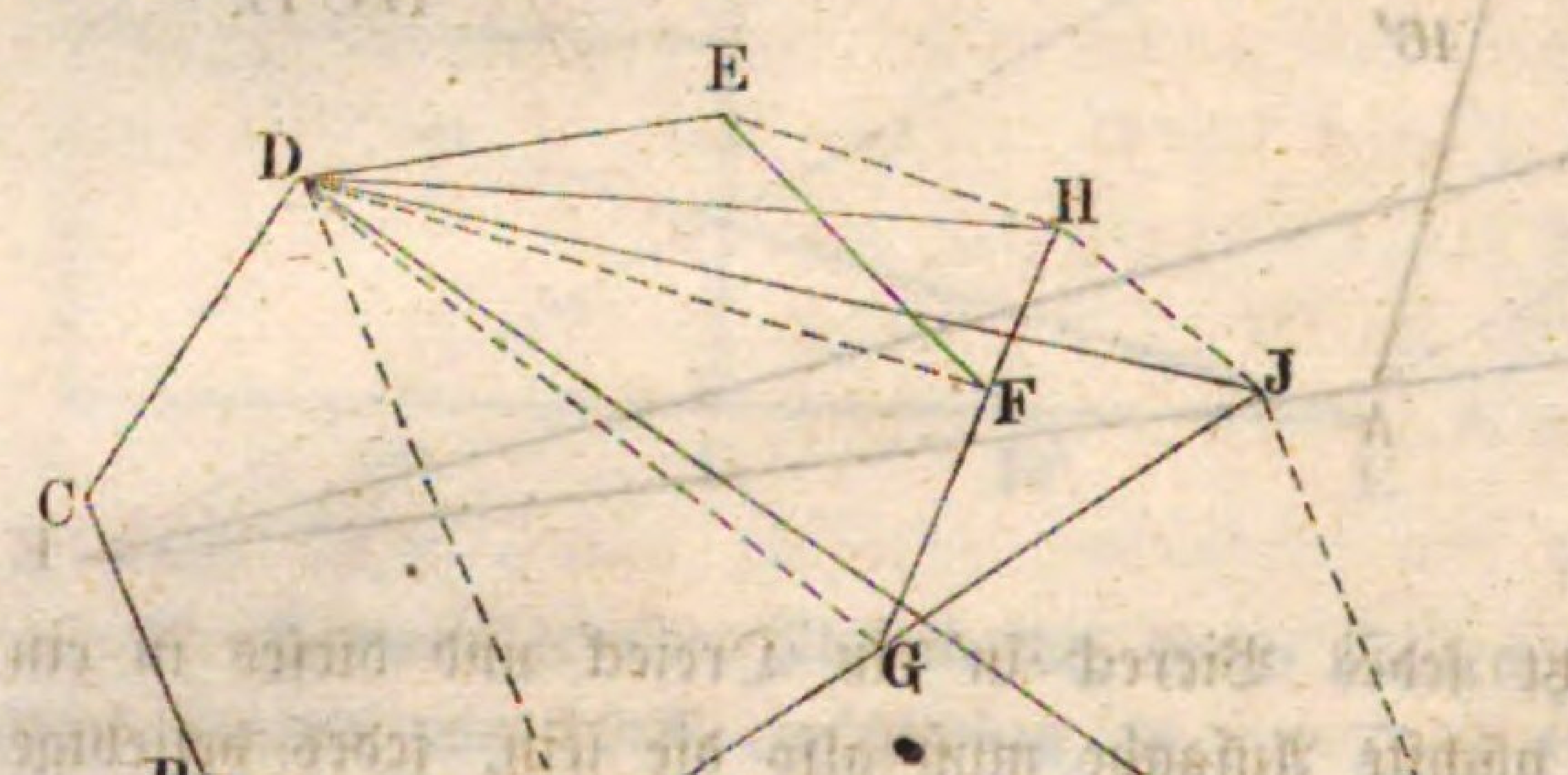


Sechseck ABCDEF = dem Dreieck CHJ.

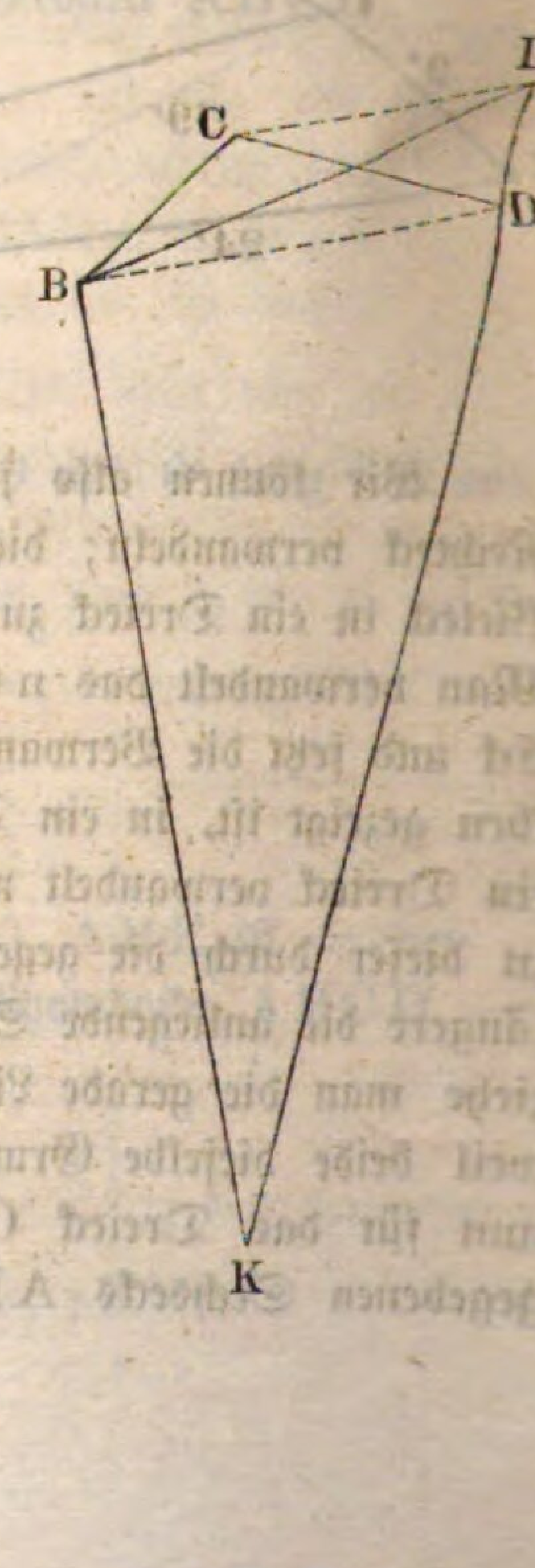
Sechseck an Flächeninhalt gleich ist. Dieses Fünfeck verwandeln wir durch dieselbe Construction in ein Viereck, indem wir die Diagonale CF ziehen und zu dieser durch die gegenüberliegende Spitze G eine Parallele GH; alsdann die anliegende Seite AF bis H verlängern und endlich CH ziehen, das entstandene Dreieck CHF ist gleich dem Dreieck des Fünfecks CGF. Wird das erstere für das letztere gesetzt, so wird dadurch das Fünfeck ABCGF in das Viereck A B C H verwandelt, welches dem Fünfeck an Flächeninhalt gleich ist. Dieses Viereck wird endlich auf die bereits angegebene Methode in ein Dreieck verwandelt, und ist dies geschehen, so ist die Aufgabe gelöst.

Aufgaben:

1) Verwandle ein beliebiges Siebeneck in ein Dreieck von gleichem Flächeninhalte!



Siebeneck ABCDEFG = dem Dreieck BLK.

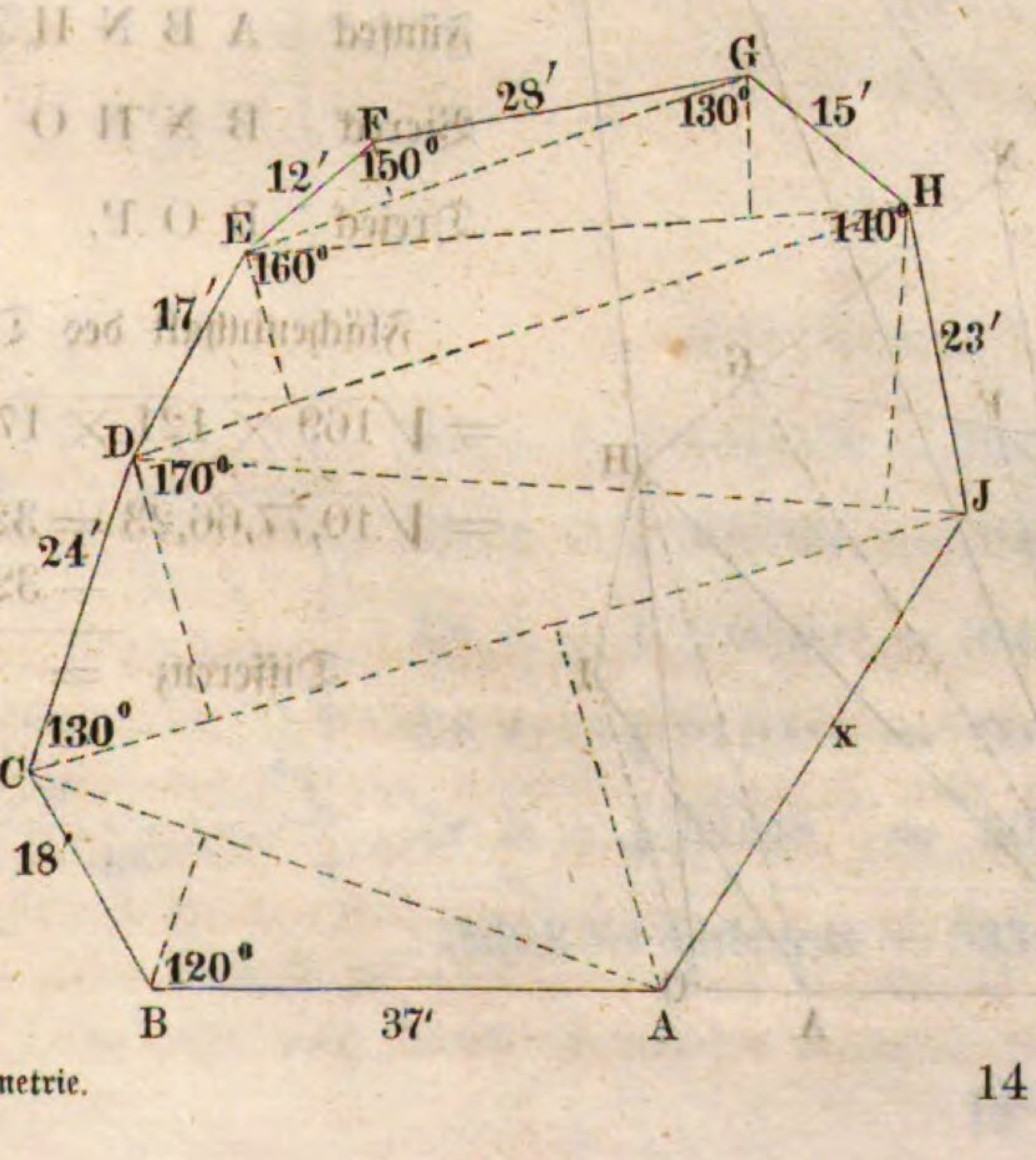


2) Zeichne ein Neuneck nach folgenden Bestimmungen:

Seite	A B = 37′	Winkel	B = 120⁰
„	B C = 18′	„	C = 130⁰
„	C D = 24′	„	D = 170⁰
„	D E = 17′	„	E = 160⁰
„	E F = 12′	„	F = 150⁰
„	F G = 28′	„	G = 130⁰
„	G H = 15′	„	H = 140⁰
„	H J = 23′;		

berechne sodann den Flächeninhalt der Figur, verwandle sie darauf durch geometrische Construction in ein Dreieck, berechne den Flächeninhalt des gefundenen Dreiecks und vergleiche die Resultate der Rechnung!

Diagonale	E G = 39′,	Perpendikel	= 4,5′
„	E H = 48,6′,	„	= 10′
„	D H = 58′,	„	= 12,2′
„	D J = 59,5′,	„	= 22,2′
„	C J = 68,5′,	„	= 20,5′
„	A C = 47′	„	= 27,6′
		„	= 12′.

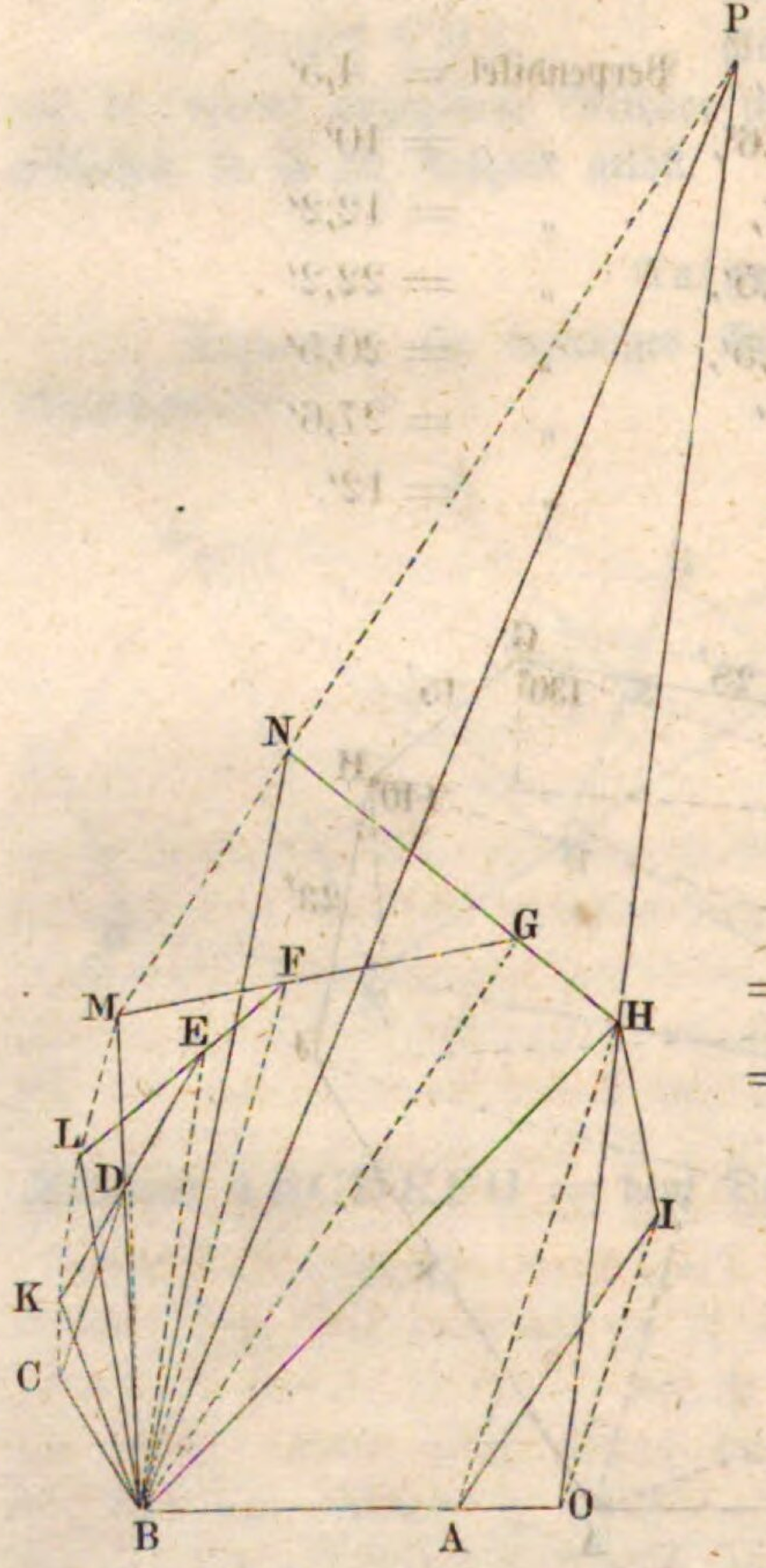


Berechnung:

No.	Grundl.	Höhe	Flächeninhalt
1	39′	4,5′	87,75 □′
2	48,6′	10′	243
3	58′	12,2′	353,8
4	59,5′	22,2′	660,45
5	68,5′	20,5′	702,125
6	68,5′	27,6′	945,3
7	47′	12′	282

Inhalt des Neunecks = 3274,425 □ fuß.

Verwandlung:



Neuneck ABCDEFGHI = dem

Achteck ABKEFGHI = dem

Siebeneck ABLFGHI = dem

Sechseck ABMGHI = dem

Fünfeck ABNHI = dem

Viereck BNHO = dem

Dreieck BOP.

Flächeninhalt des Dreiecks BOP

$= \sqrt{169 \times 121 \times 17 \times 31}$

$= \sqrt{10,77,66,23} = 3282,776$ □ fuß.

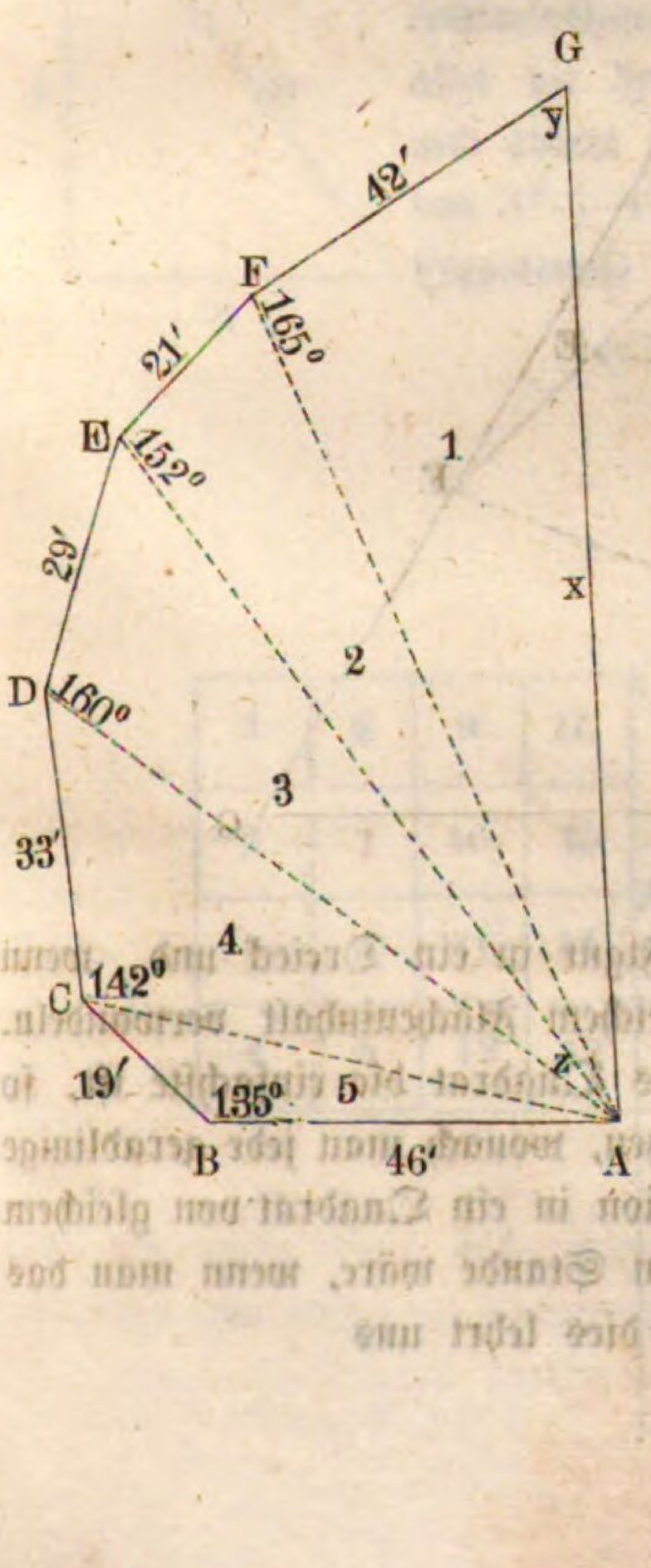
$- 3274,425$ „

Differenz = 8,351 □ fuß.

3) Construire ein unregelmäßiges Siebeneck nach folgenden Bestimmungen:

Seite	AB = 46′,	Winkel	B = 135°
„	BC = 19′,	„	C = 142°
„	CD = 33′,	„	D = 160°
„	DE = 29′,	„	E = 152°
„	EF = 21′,	„	F = 165°
„	FG = 42′;		

bestimme dann zunächst die Länge der unbekannten Seite x und die Größe der beiden unbekannten Winkel y und z; sodann berechne den Flächeninhalt des Siebenecks ohne Hülfe eines Perpendikels; verwandle darauf das Siebeneck in ein Dreieck von gleichem Flächeninhalt, berechne dies nach der Formel: $\sqrt{S.(S-a)(S-b)(S-c)}$ und vergleiche die beiden erhaltenen Flächeninhalte mit einander!



Winkel y (gemessen)	=	60°
„ z (berechnet)	=	86°
Seite x	=	114′
Diagonale AF	=	100′
„ AE	=	93′
„ AD	=	78′
„ AC	=	61′

Berechnung:

Dr. 1. = $\sqrt{4315136}$ = 2077,29 □fuß

Dr. 2. = $\sqrt{901796}$ = 949,629 „

Dr. 3. = $\sqrt{1093400}$ = 1045,652 „

Dr. 4. = $\sqrt{911600}$ = 954,777 „

Dr. 5. = $\sqrt{94248}$ = 307 „

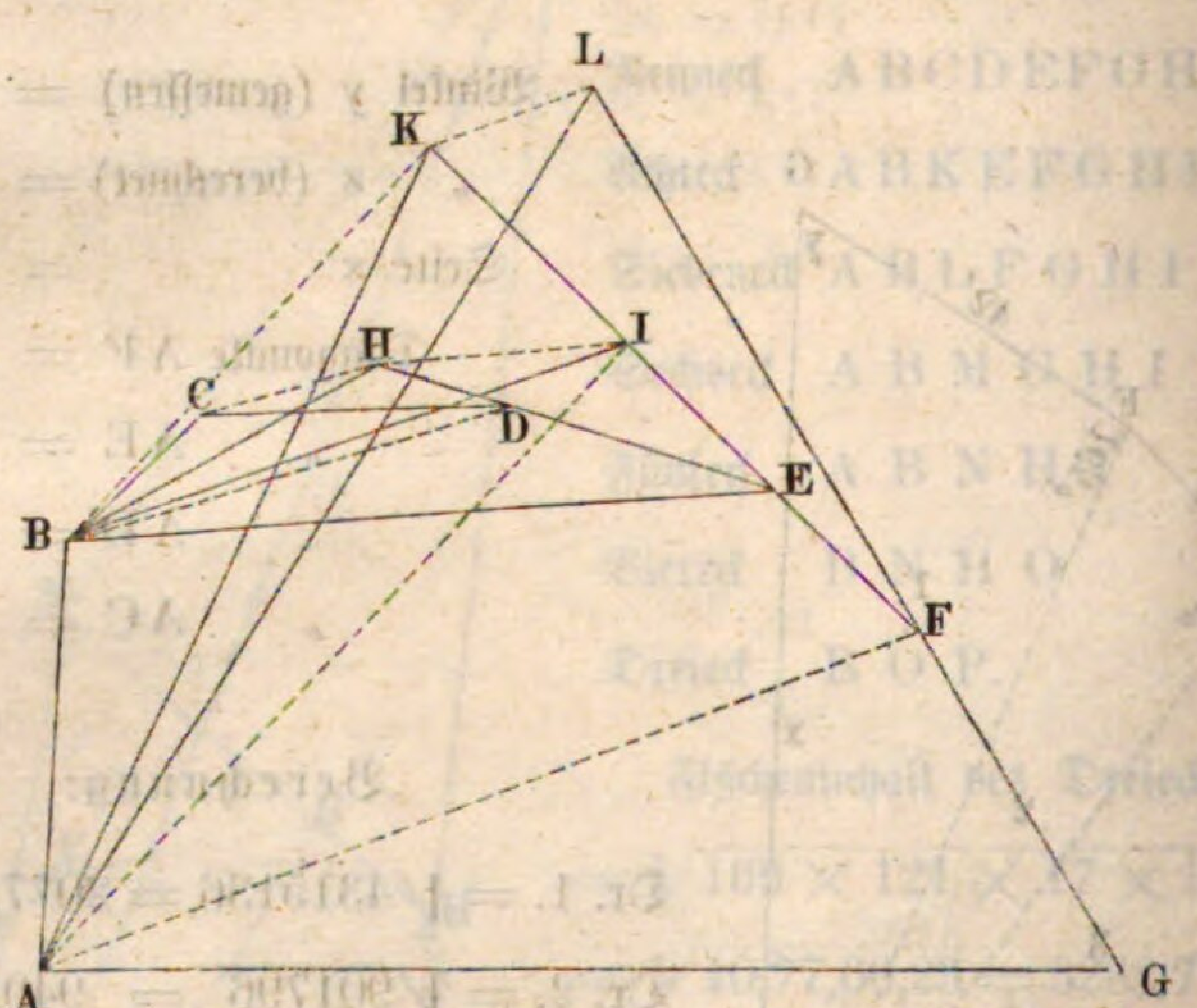
Inhalt des Siebenecks = 5334,348 □fuß.

Verwandlung:

Siebeneck A B C D E F G = dem
Sechseck A B H E F G = dem
Fünfeck A B I F G = dem
Viereck A K F G = dem
Dreieck A G L
Die 3 Seiten des Dreiecks = 110,25′
114′
108,75′

$$\text{Flächeninhalt} = \sqrt{S.(S-a)(S-b)(S-c)}$$
$$= \sqrt{28395404,296875} = 5328,734 \square \text{fuß}$$

$$\begin{array}{r} 5334,348 \\ -\ 5328,734 \\ \hline 5,614 \end{array} \square \text{fuß Differenz.}$$

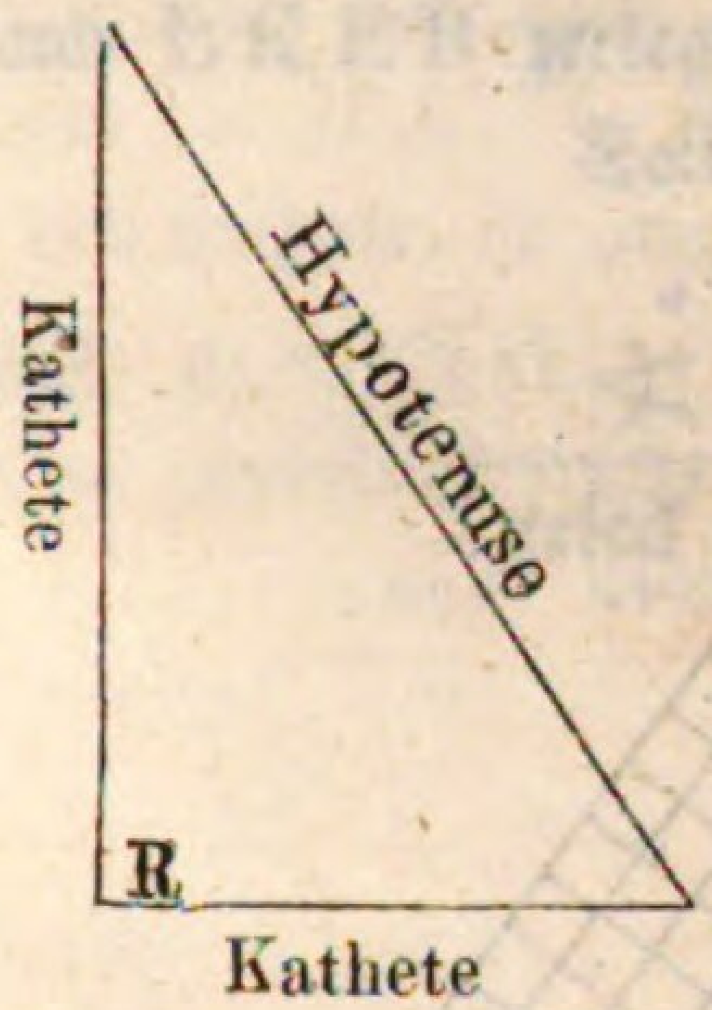


Bis jetzt können wir jede geradlinige Figur in ein Dreieck und, wenn es verlangt wird, in ein Rechteck von gleichem Flächeninhalt verwandeln. Da aber von allen geradlinigen Figuren das Quadrat die einfachste ist, so ist es wünschenswerth, eine Methode zu besitzen, wonach man jede geradlinige Figur ohne Rechnung, allein durch Construction in ein Quadrat von gleichem Flächeninhalt verwandeln kann, wozu man im Stande wäre, wenn man das Rechteck in ein Quadrat verwandeln könnte; dies lehrt uns

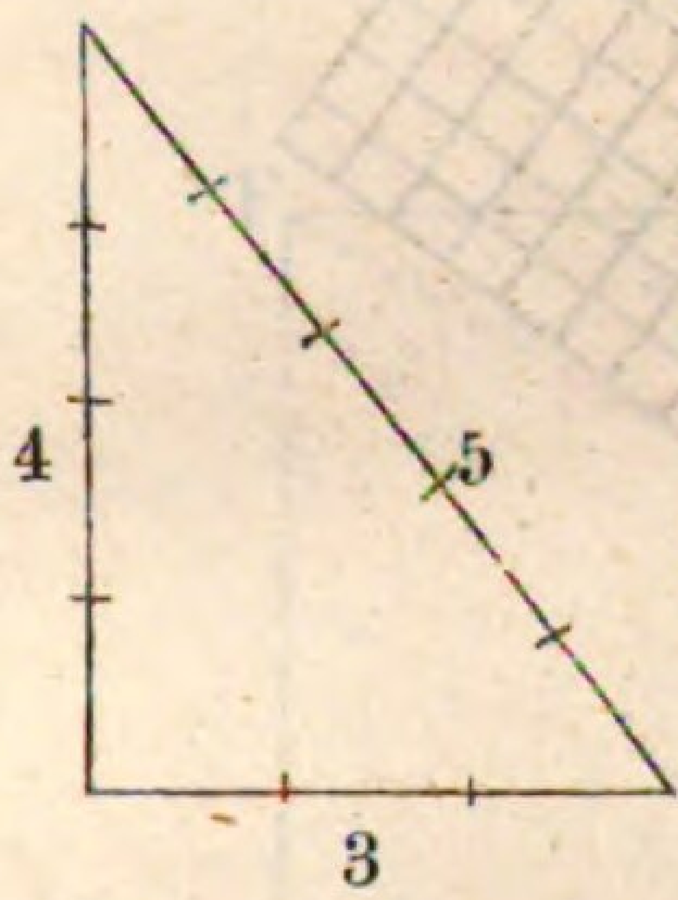
§. 6.

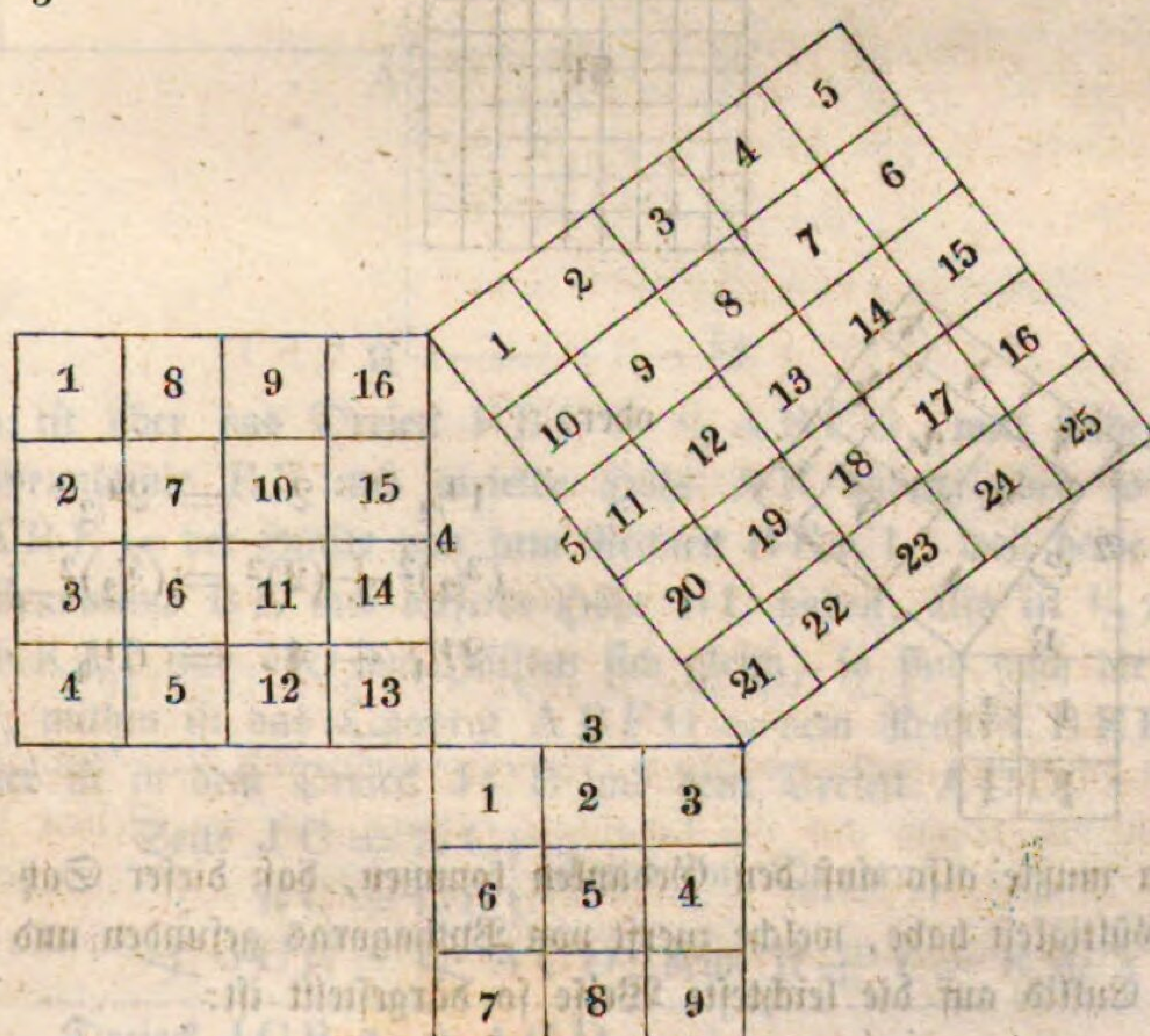
Der pythagoräische Lehrsatz.

Dieser lautet: Das Quadrat der Hypotenuse ist so groß, wie die Quadrate der beiden Katheten zusammen genommen. In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man nämlich die Seite, welche am längsten ist und daher dem rechten Winkel gegenüber liegt, die Hypotenuse, und die beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, hat man Katheten genannt. Dieser wichtige Satz hat seinen Namen vom Pythagoras, der zu Kroton in Unteritalien die pythagoräische Schule begründete, um 600 vor Christo, und unter vielen andern wissenschaftlichen Entdeckungen auch diesen Lehrsatz fand.



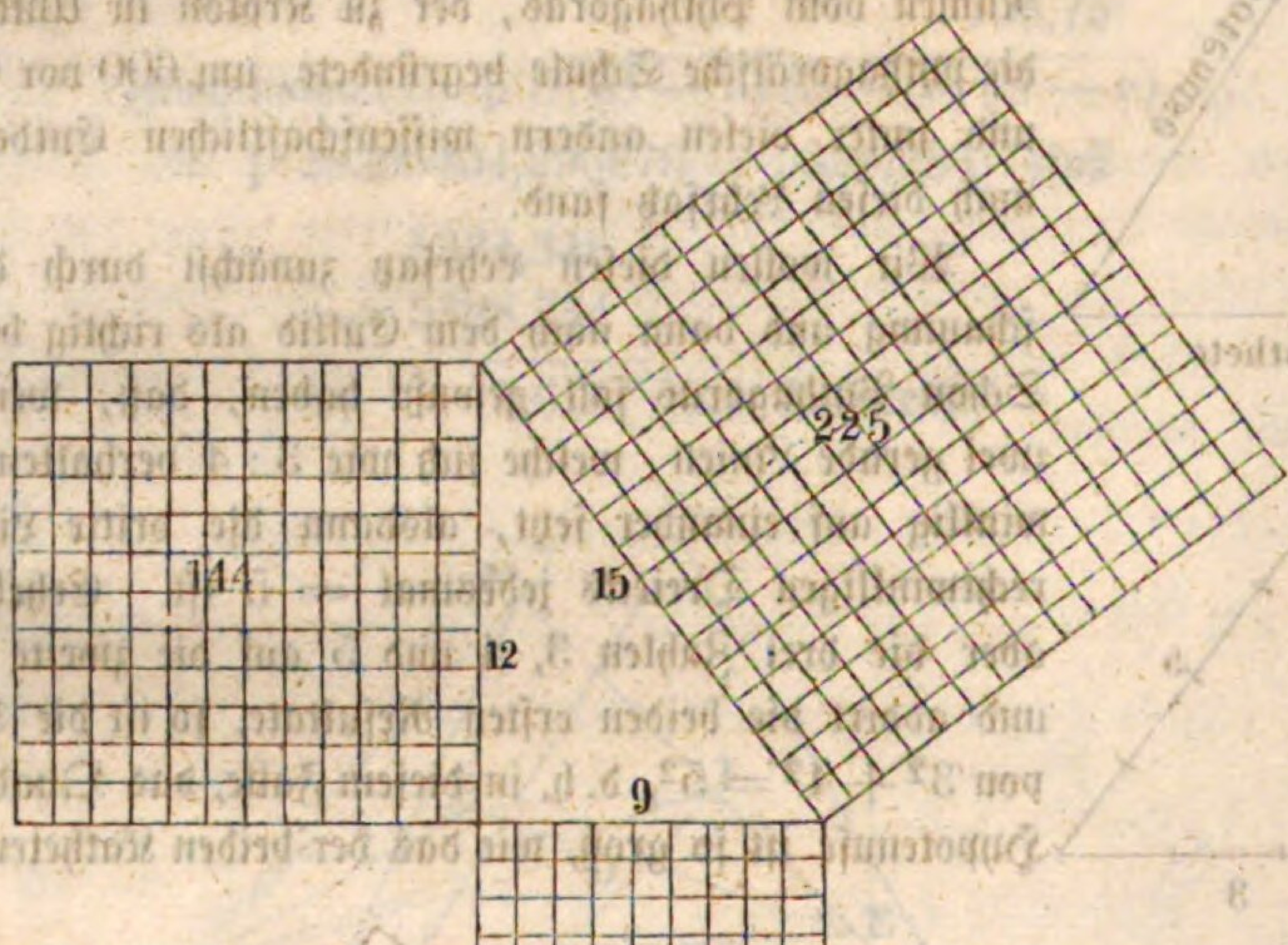
Wir wollen diesen Lehrsatz zunächst durch die Anschauung und dann nach dem Euklid als richtig beweisen. Schon Pythagoras soll gewußt haben, daß, wenn man zwei gerade Linien, welche sich wie 3 : 4 verhalten, rechtwinklig auf einander setzt, alsdann die dritte Linie des rechtwinkligen Dreiecks jedesmal = 5 ist. Erhebt man aber die drei Zahlen 3, 4 und 5 auf die zweite Potenz und addirt die beiden ersten Resultate, so ist die Summe von $3^2 + 4^2 = 5^2$, d. h. in diesem Falle, das Quadrat der Hypotenuse ist so groß, wie das der beiden Katheten, z. B.

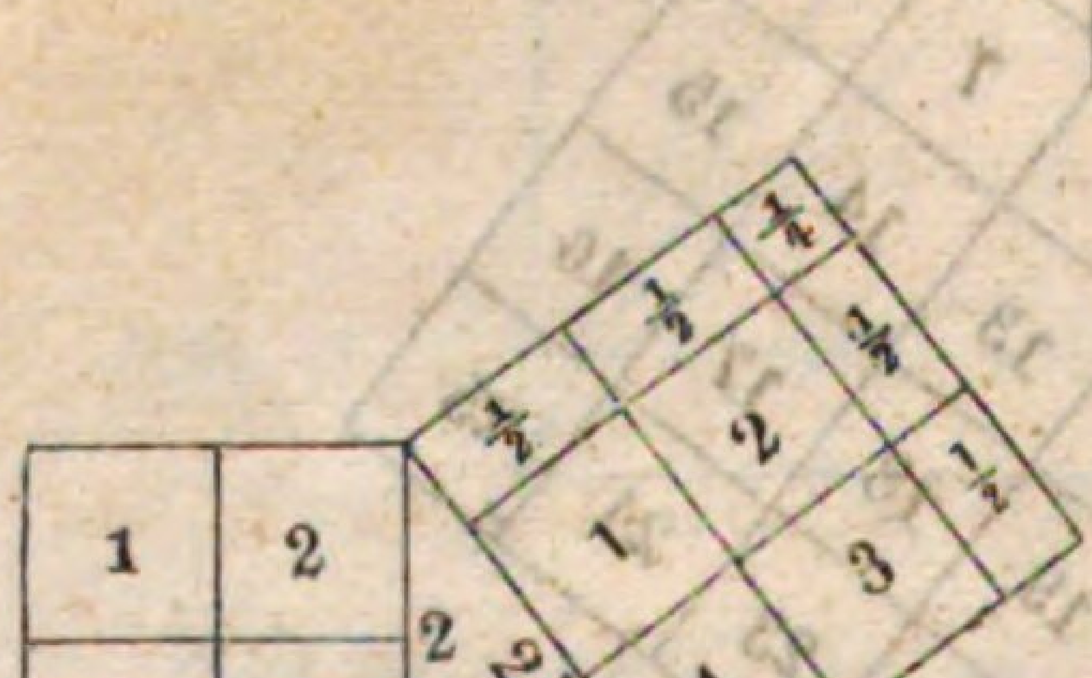




Sehr bald aber fand man, daß dieser Satz auch richtig blieb, wenn man nur dasselbe Verhältniß fest hielt, d. h., alle Zahlen, sie mögen klein oder groß sein, geben denselben pythagoräischen Satz, wenn sie sich zu einander verhalten, wie die Zahlen 3, 4 und 5, z. B.

$$3 \times 3 \ : \ 4 \times 3 = 5 \times 3$$
$$9 \ : \ 12 = 15$$
$$9^2 + 12^2 = 15^2$$
$$81 + 144 = 225$$





oder:

$$1\frac{1}{2} \ : \ 2 = 2\frac{1}{2}$$
$$(\tfrac{3}{2})^2 + (2)^2 = (\tfrac{5}{2})^2$$
$$2\frac{1}{4} + 4 = 6\frac{1}{4}$$

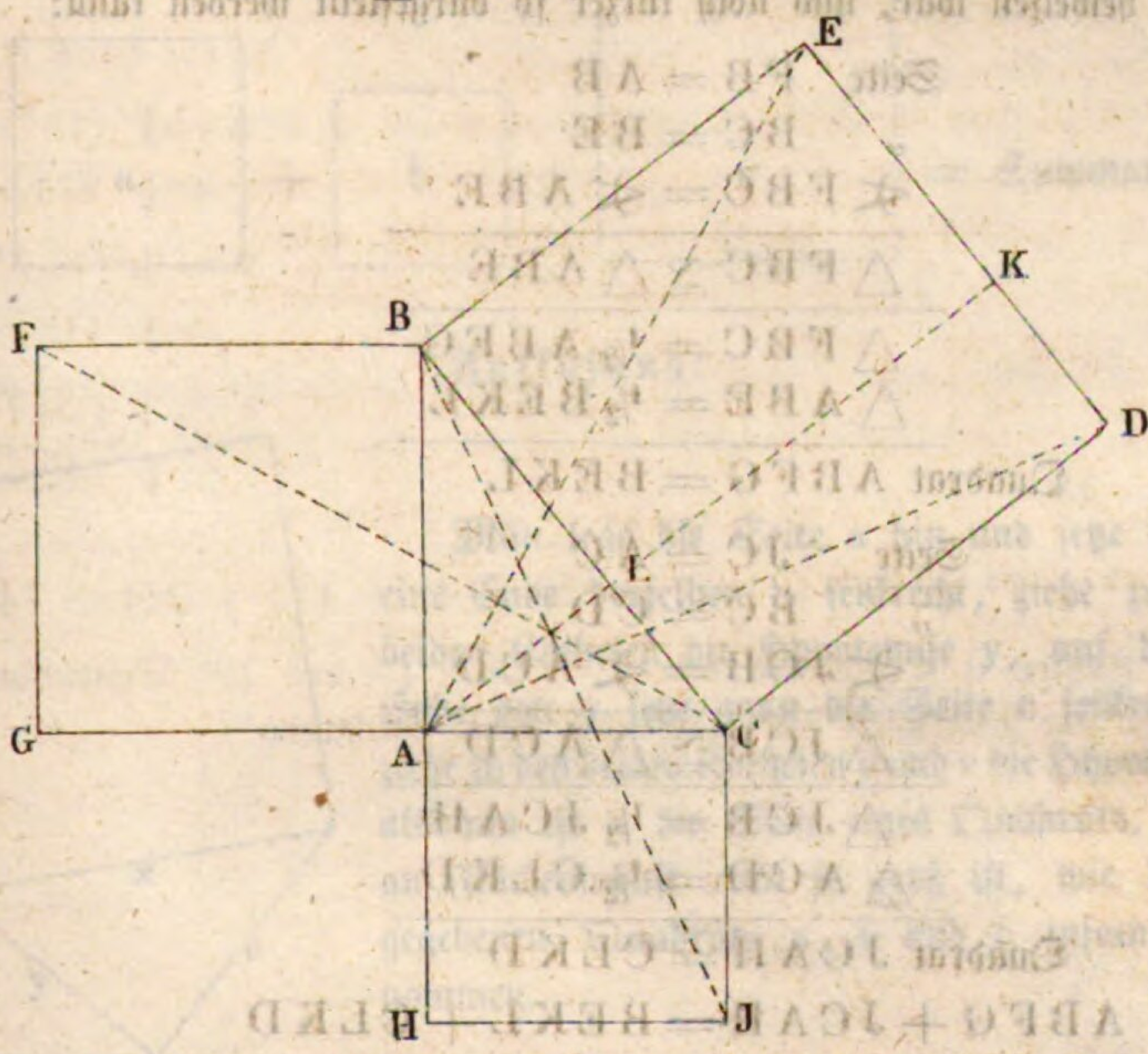
Man mußte also auf den Gedanken kommen, daß dieser Satz eine allgemeine Gültigkeit habe, welche zuerst von Pythagoras gefunden und bewiesen und vom Euklid auf die leichteste Weise so dargestellt ist:

Beweis:

Es soll bewiesen werden, daß das Quadrat A G F B + A C J H = ist dem Quadrat B C D E. Zu diesem Zweck ziehen wir zuerst aus dem rechten Winkel A des Dreiecks eine Parallele A K mit der Seite C D oder B E des Quadrats B C D E, wodurch dieses in die beiden Rechtecke C D K L und L K E B zerlegt wird. In den beiden Dreiecken F B C und A B E ist

Seite F B = A B } Seiten des Quadrats
" B C = B E }
$\sphericalangle$ F B C = $\sphericalangle$ A B E, denn R + X = R + X;

Dreieck F B C $\cong$ A B E



Nun ist aber das Dreieck F B C = ½ A B F G, weil beide Figuren dieselbe Grundlinie B F und dieselbe Höhe A B haben; eben so ist das Dreieck A B E = der Hälfte von dem Rechteck B E K L, weil beide Figuren dieselbe Grundlinie B E und dieselbe Höhe B L haben; also ist ½ A B F G = ½ B E K L; sind aber die Hälften sich gleich, so sind auch die Ganzen sich gleich; mithin ist das Quadrat A B F G = dem Rechteck B E K L.

Ferner ist in dem Dreieck J C B und dem Dreieck A C D

Seite J C = A C } Seiten im Quadrat,
" B C = C D }
$\sphericalangle$ J C B = $\sphericalangle$ A C D; denn R + Y = R + Y

Dreieck J C B $\cong$ $\triangle$ A C D

Nun ist aber das Dreieck J C B = $\frac{1}{2}$ J C A H, weil beide Figuren dieselbe Grundlinie J C und dieselbe Höhe C A haben; eben so ist △ A C D = $\frac{1}{2}$ C L K D, weil beide Figuren dieselbe Grundlinie C D und dieselbe Höhe C L haben, also ist $\frac{1}{2}$ J C A H = $\frac{1}{2}$ C L K D; sind aber die Hälften sich gleich, so sind auch die Ganzen sich gleich, also ist das Quadrat J C A H = dem Rechteck C L K D. Bis jetzt ist also bewiesen, daß das Quadrat A B F G = dem Rechtecke B E K L und das Quadrat J C A H = dem Rechteck C L K D ist. Addiren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir:

Quadrat A B F G + J C A H = dem Quadrat B C D E, d. h. das Quadrat der Hypotenuse ist = dem Quadrat der beiden Katheten, was zu beweisen war, und noch kürzer so dargestellt werden kann:

Seite F B = A B
" B C = B E
∢ F B C = ∢ A B E
△ F B C ≅ △ A B E
△ F B C = $\frac{1}{2}$ A B F G
△ A B E = $\frac{1}{2}$ B E K L
Quadrat A B F G = B E K L

Seite J C = A C
" B C = C D
∢ J C B = ∢ A C D
△ J C B ≅ △ A C D
△ J C B = $\frac{1}{2}$ J C A H
△ A C D = $\frac{1}{2}$ C L K D
Quadrat J C A H = C L K D

A B F G + J C A H = B E K L + C L K D
= B C D E,

das ist das Quadrat der Hypotenuse.

§. 7.

Aufgaben für den pythagoräischen Lehrsatz.

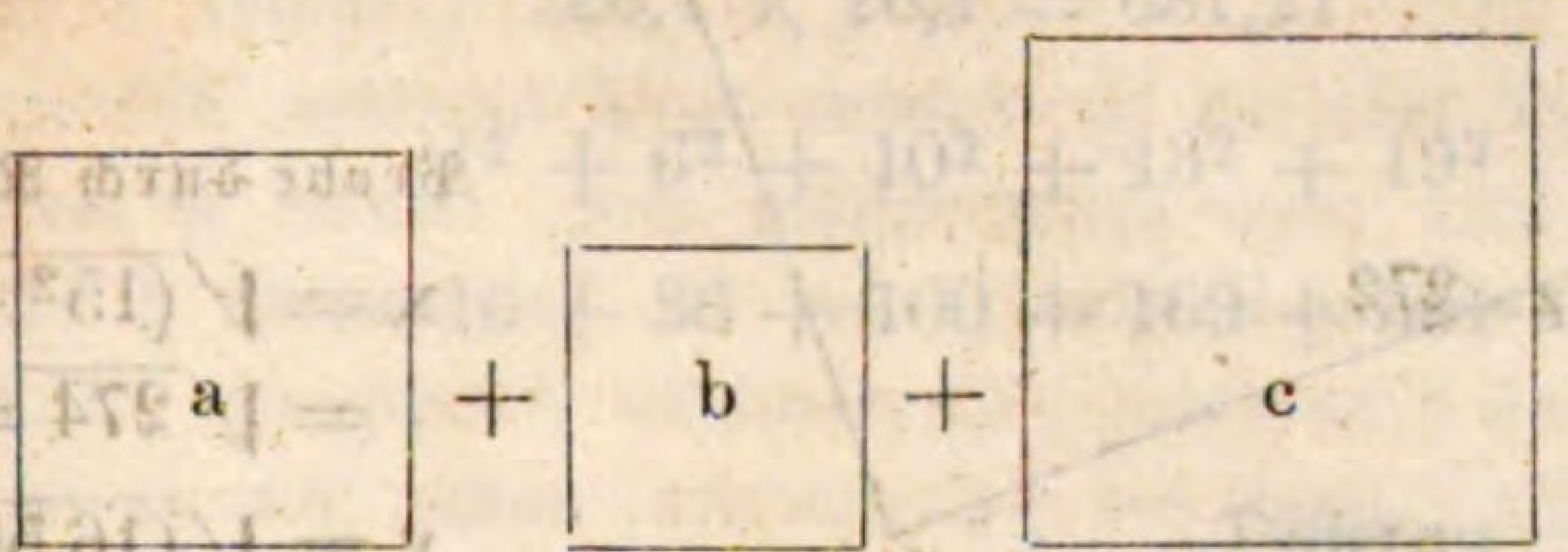
Mit Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes lassen sich viele Aufgaben lösen, von denen sich einige auf die Quadrate, einige auf die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks beziehen. Die erstern wollen wir zuerst lösen, indem wir die vier Rechnungsarten auf die Quadrate des rechtwinkligen Dreiecks anwenden.

I. Addition von Quadraten.

Addiren heißt: Summanden von verschiedener und beliebiger Größe in eine Summe vereinigen. Sollen also Quadrate addirt werden, so heißt das: es sollen zwei oder mehrere Quadrate von verschiedener Größe als ein Quadrat dargestellt werden, welches den gegebenen an Flächeninhalt gleich ist.

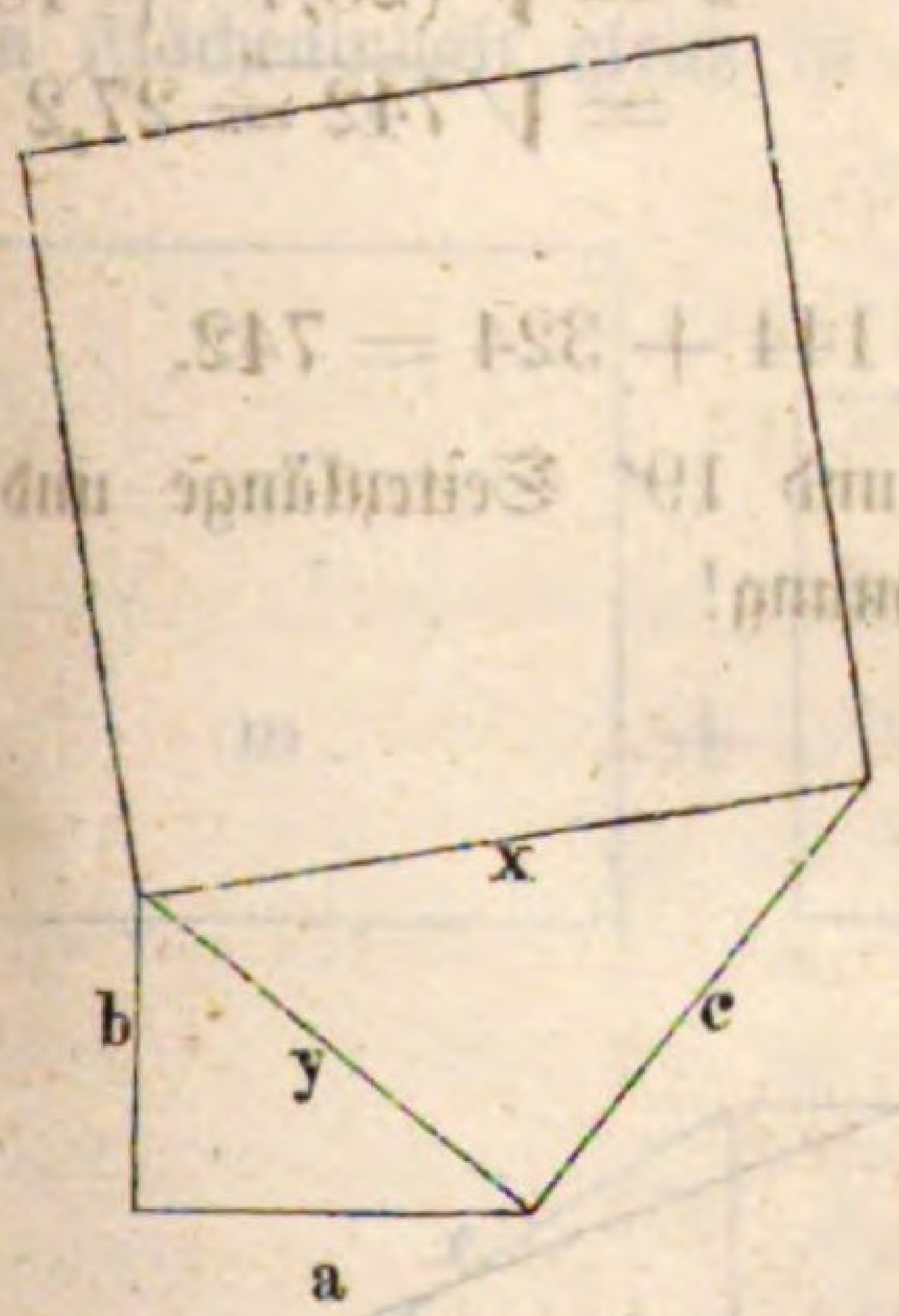
Aufgaben:

1) Addire die Quadrate a, b und c!



= Summanden.

Auflösung:

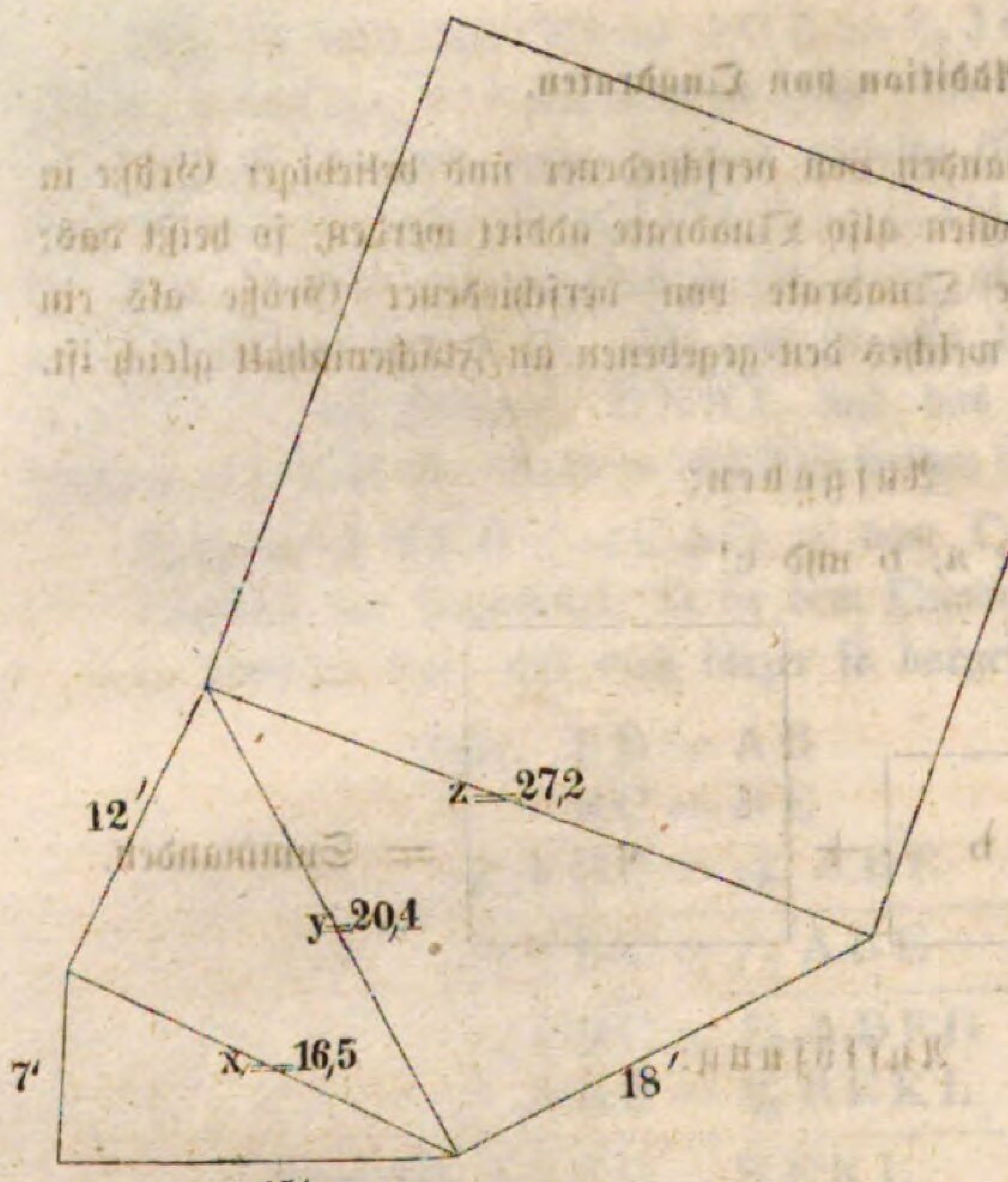


Man lege die Seite a hin und setze auf das eine Ende derselben b senkrecht, ziehe zu diesen beiden Katheten die Hypotenuse y, auf das eine Ende von y setze man die Seite c senkrecht und ziehe zu den beiden Katheten y und c die Hypotenuse x, alsdann ist x die Seite eines Quadrats, welches an Flächeninhalt eben so groß ist, wie die drei gegebenen Quadrate a, b und c zusammen genommen.

Beweis:

$$a^2 + b^2 = y^2$$
$$y^2 + c^2 = x^2$$
$$\overline{a^2 + b^2 + c^2 = x^2,}$$

2) Addire vier Quadrate, von denen das eine 15′, das zweite 7′, das dritte 12′ und das vierte 18′ Seitenlänge hat, und beweise die Richtigkeit der Zeichnung durch Rechnung!



Probe durch Rechnung:

$$x = \sqrt{(15^2 + 7^2)} = \sqrt{274} = 16{,}55$$

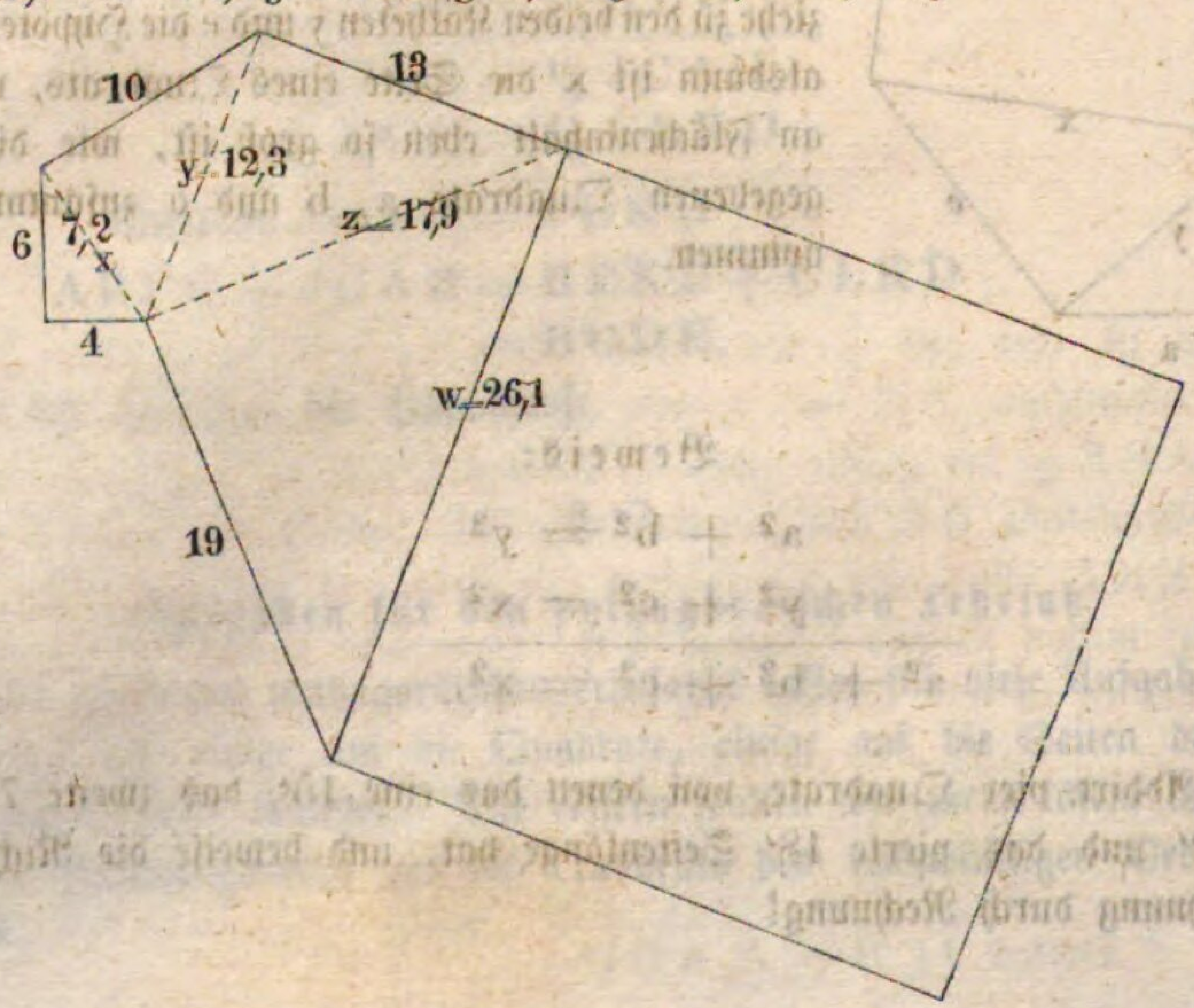
$$y = \sqrt{(16{,}55^2 + 12^2)} = \sqrt{418} = 20{,}4$$

$$z = \sqrt{(20{,}4^2 + 18^2)} = \sqrt{742} = 27{,}2$$

$$27{,}2^2 = 742$$

$$(15^2 + 7^2 + 12^2 + 18^2) = 225 + 49 + 144 + 324 = 742.$$

3) Addire 5 Quadrate von 4, 6, 10, 13 und 19' Seitenlänge und untersuche die Richtigkeit der Zeichnung durch Rechnung!



Probe durch Rechnung:

$$x = \sqrt{(4^2 + 6^2)} = 7{,}2$$

$$y = \sqrt{(7{,}2^2 + 10^2)} = 12{,}3$$

$$z = \sqrt{(12{,}3^2 + 13^2)} = 17{,}9$$

$$w = \sqrt{(17{,}9^2 + 19^2)} = 26{,}1$$

$$26{,}1 \times 26{,}1 = 681{,}21$$

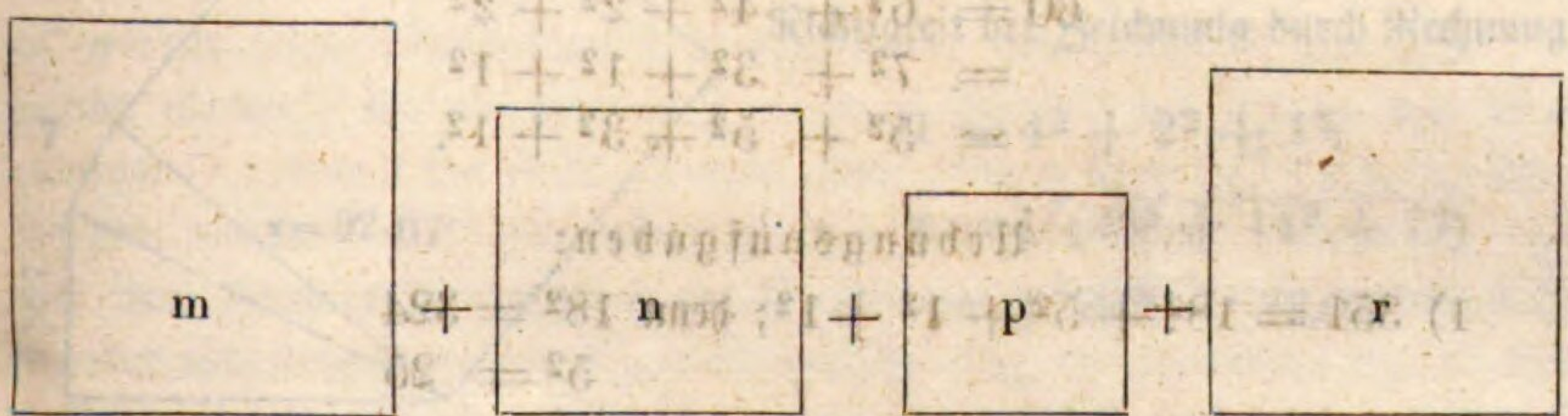
$$4^2 + 6^2 + 10^2 + 13^2 + 19^2$$

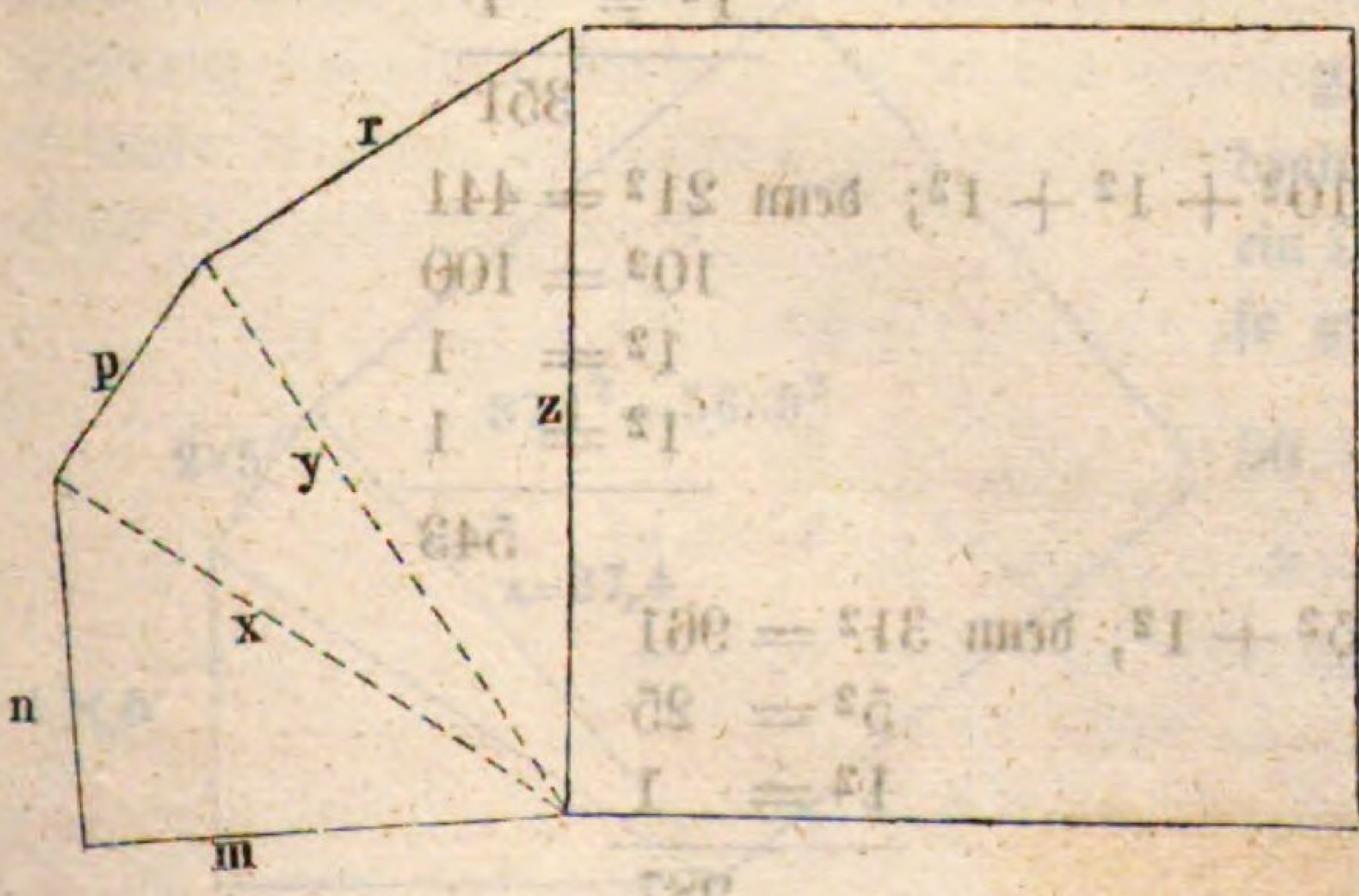
$$= 16 + 36 + 100 + 169 + 361 = 682$$

$$681{,}21$$

$$\text{Differenz} = 0{,}79$$

4) Construire ein Quadrat, welches den gegebenen Quadraten m+n+p+r an Flächeninhalt gleich ist und beweise die Richtigkeit der Construction!





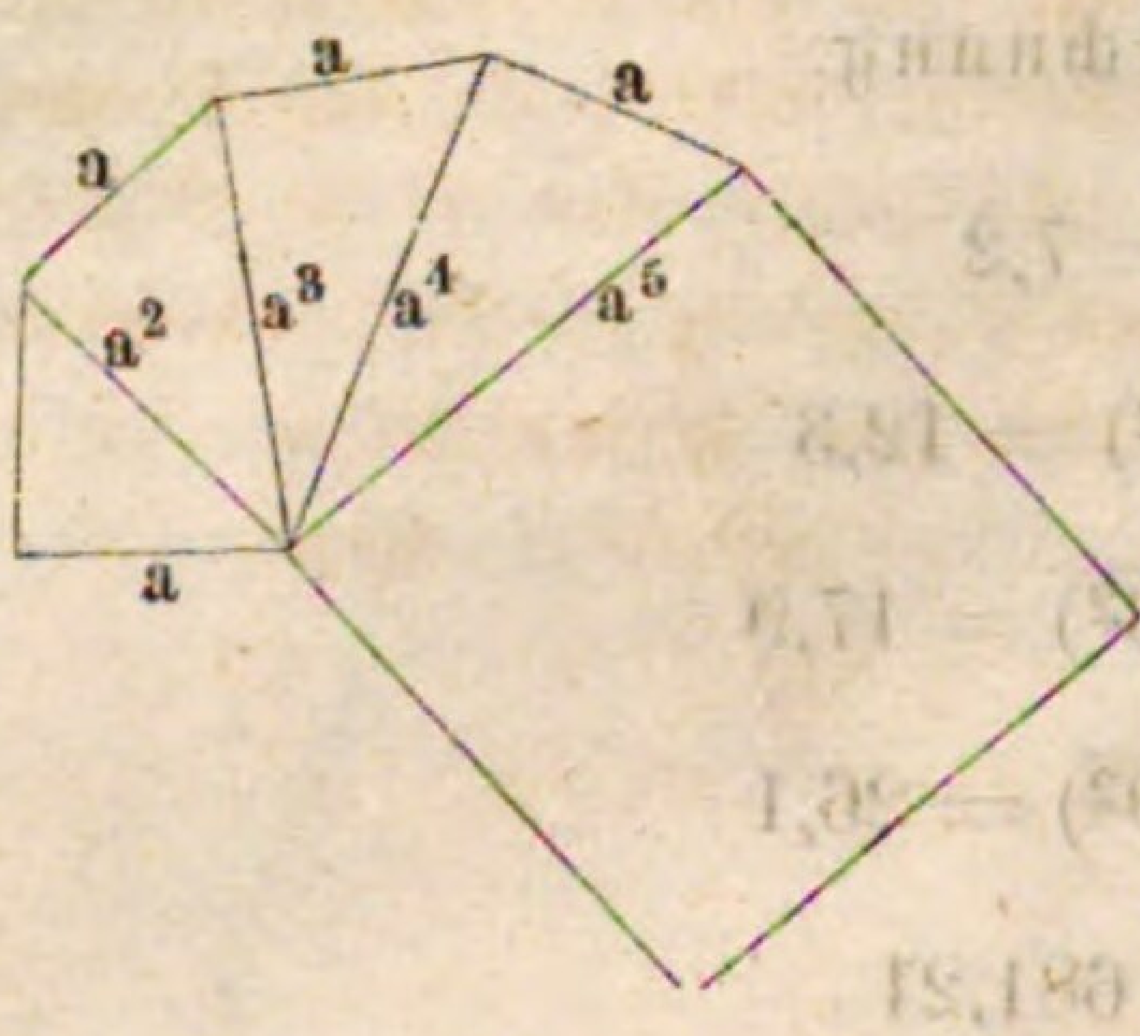
$$m^2 + n^2 = x^2$$

$$x^2 + p^2 = y^2$$

$$y^2 + r^2 = z^2$$

$$m^2 + n^2 + p^2 + r^2 = z^2$$

II. Multiplication der Quadrate.



Die Multiplication ist nichts als Addition gleicher Summanden; tritt also der Fall ein, daß die zu addirenden Quadrate gleich groß sind, so kann man sie entweder durch Addition zu einer Summe verbinden, was aber sehr mühsam werden kann, oder man muß für ihre Verbindung zu einer Größe eine neue Constructionsmethode auffinden. Soll z. B. das Quadrat a fünf Mal genommen werden, so läßt sich die Summe durch successive Addition finden.

Nun gibt es aber einen arithmetischen Satz, welcher so lautet: Jede Zahl ist entweder selbst ein Quadrat, oder die Summe von 2 Quadraten, oder die Summe von 3 Quadraten, oder endlich die Summe von 4 Quadraten; nie aber größer als die Summe von 4 Quadraten; mithin sind wir im Stande, jede Zahl in die Summe von höchstens 4 Quadraten aufzulösen, z. B.

$$81 = 9^2$$
$$89 = 8^2 + 5^2$$
$$3456 = 56^2 + 16^2 + 8^2$$
$$60 = 6^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2$$
$$= 7^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$$
$$= 5^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2.$$

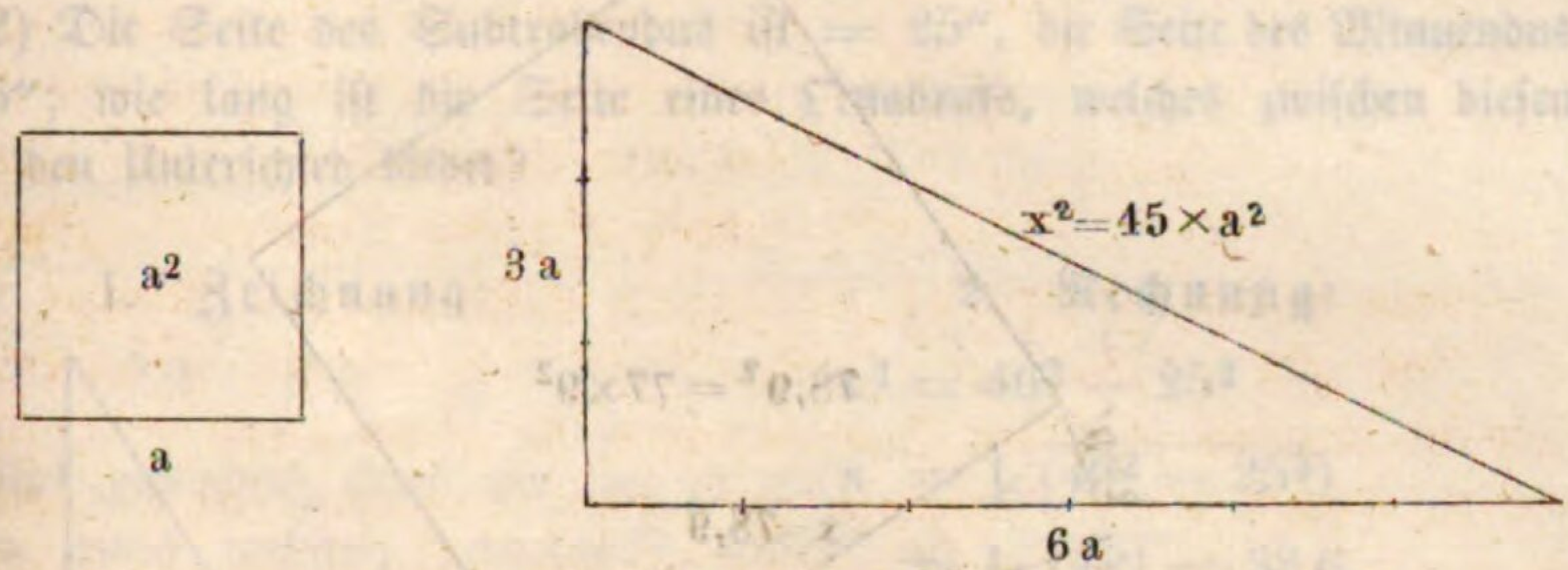
Uebungsaufgaben:

1) $351 = 18^2 + 5^2 + 1^2 + 1^2$; denn $18^2 = 324$, $5^2 = 25$, $1^2 = 1$, $1^2 = 1$; Summe 351

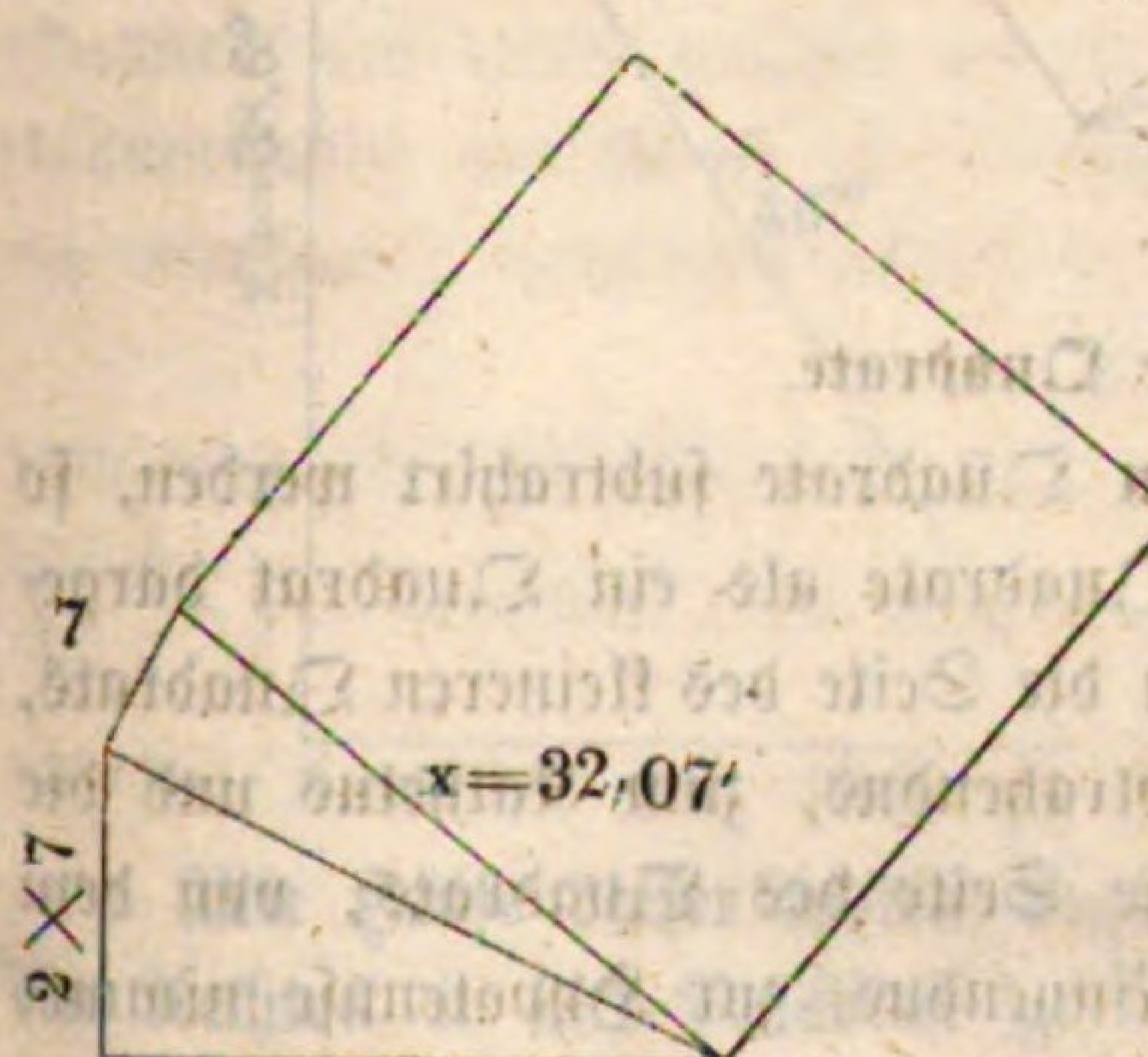
2) $543 = 21^2 + 10^2 + 1^2 + 1^2$; denn $21^2 = 441$, $10^2 = 100$, $1^2 = 1$, $1^2 = 1$; Summe 543

3) $987 = 31^2 + 5^2 + 1^2$; denn $31^2 = 961$, $5^2 = 25$, $1^2 = 1$; Summe 987.

Wenden wir diesen arithmetischen Satz auf die Multiplication der Quadrate an, so erhalten wir ein Mittel, auf eine sehr einfache Weise jedes Quadrat eine beliebige Anzahl Mal zu nehmen; sollte z. B. das Quadrat a 45 Mal genommen werden, so ist $45 = 6^2 + 3^2$, oder $5^2 + 4^2 + 2^2$. Legt man nun die Seite a des gegebenen Quadrats 6 Mal in gerader Linie hin und setzt auf das Ende dieser Linie ein Perpendikel $= 3\,a$ und zieht hierzu die Hypotenuse x, so ist $x^2 = (3^2 + 6^2)\,a^2 = 45\,a^2$.



Aufgaben:

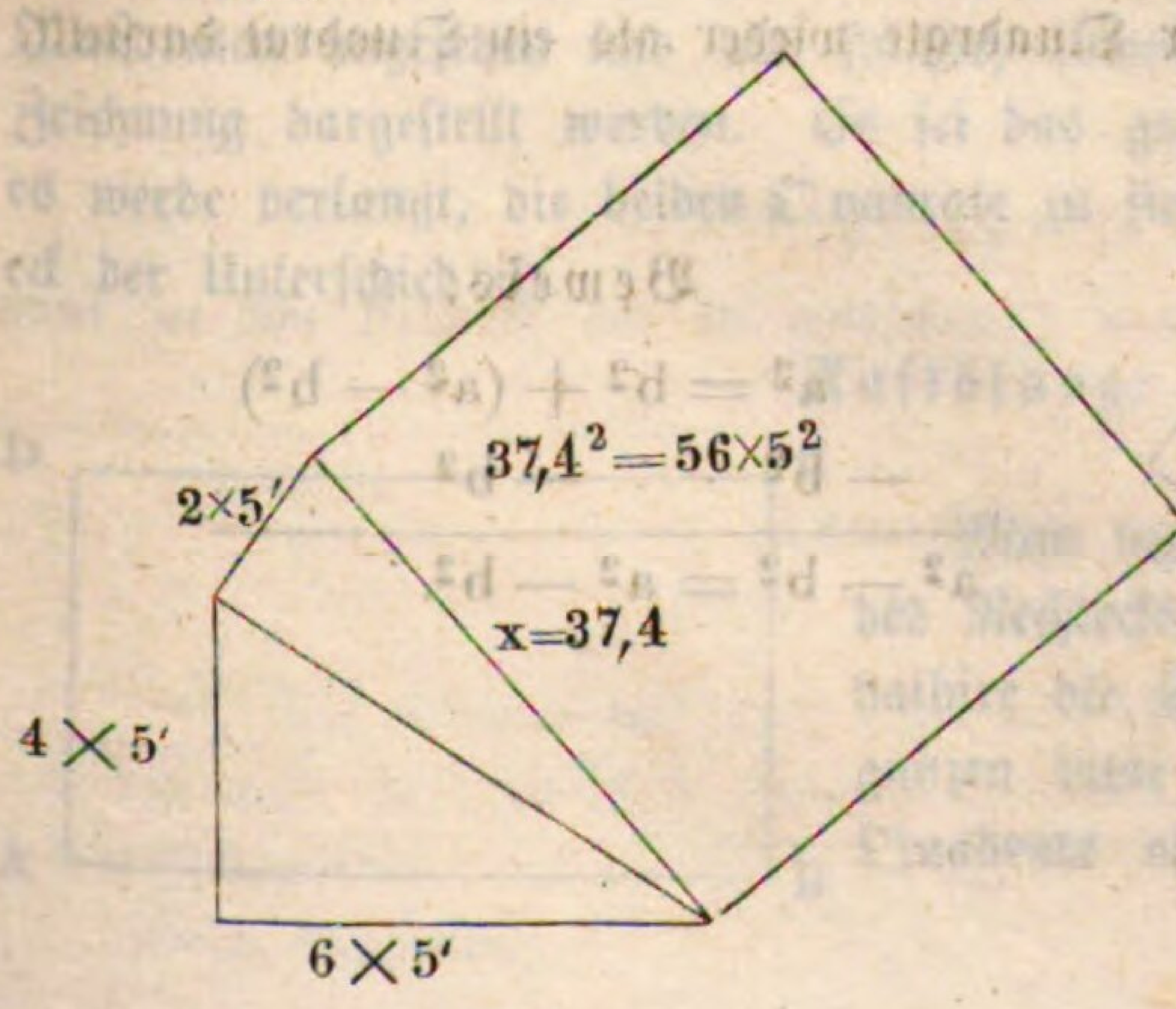


1) Construire ein Quadrat, welches 21 Mal so groß ist, als ein Quadrat von 7′ Seitenlänge und beweise die Richtigkeit der Zeichnung durch Rechnung!

$21 = 4^2 + 2^2 + 1^2$.

$x = \sqrt{(28^2 + 14^2 + 7^2)}$

$= \sqrt{1029} = 32{,}07'$.



2) Die Seite eines Quadrats ist 5′ lang; construire ein Quadrat, welches 56 Mal so groß ist!

$56 = 6^2 + 4^2 + 2^2$.

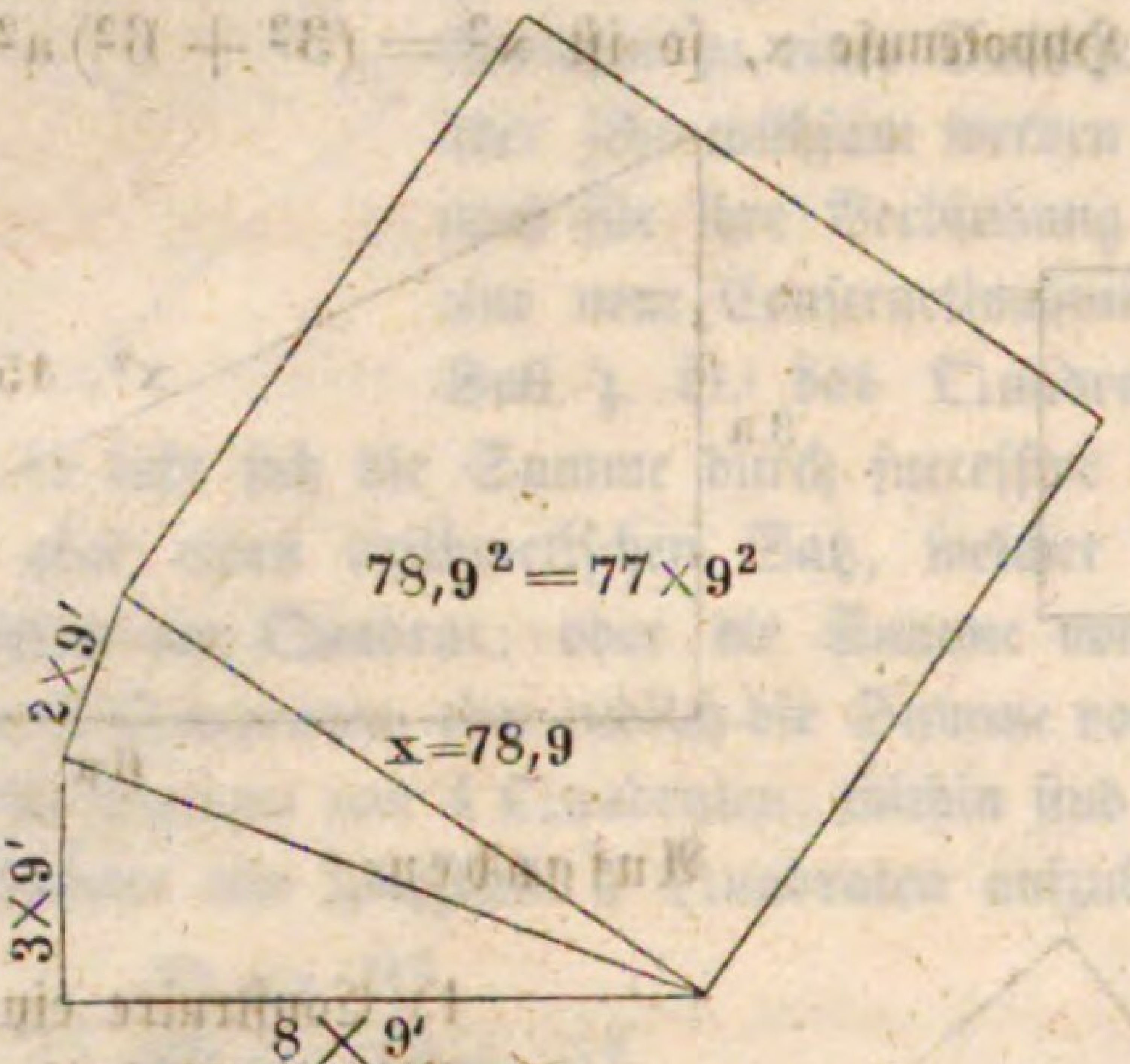
$x = \sqrt{(30^2 + 20^2 + 10^2)}$

$= \sqrt{1400} = 37{,}4'$.

3) Construire ein Quadrat, welches 77 Mal so groß ist als ein Quadrat von 9′ Seitenlänge und untersuche die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!

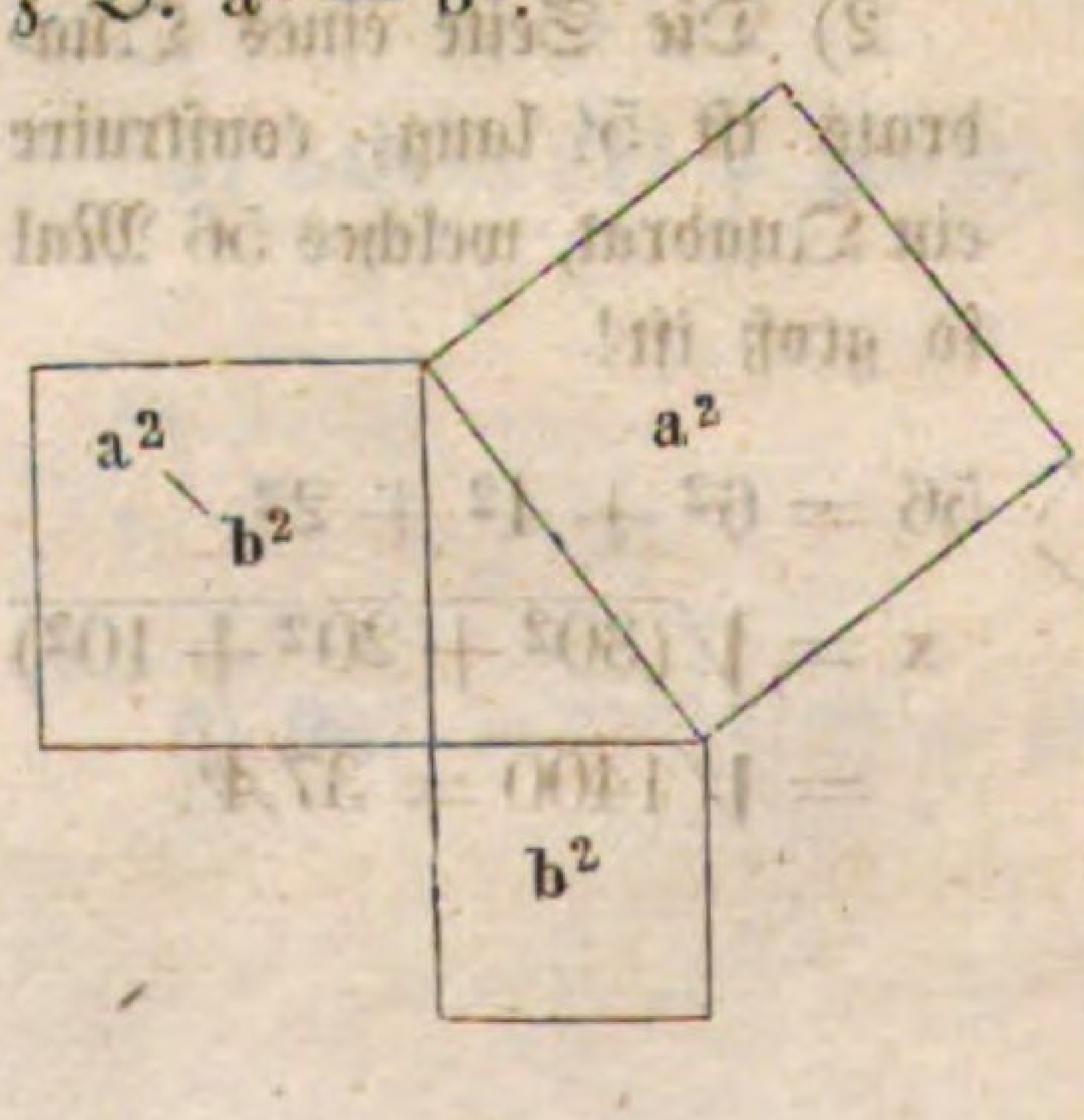
$$77 = 8^2 + 3^2 + 2^2.$$

$$x = \sqrt{(72^2 + 27^2 + 18^2)} = \sqrt{6237} = 78{,}9'.$$



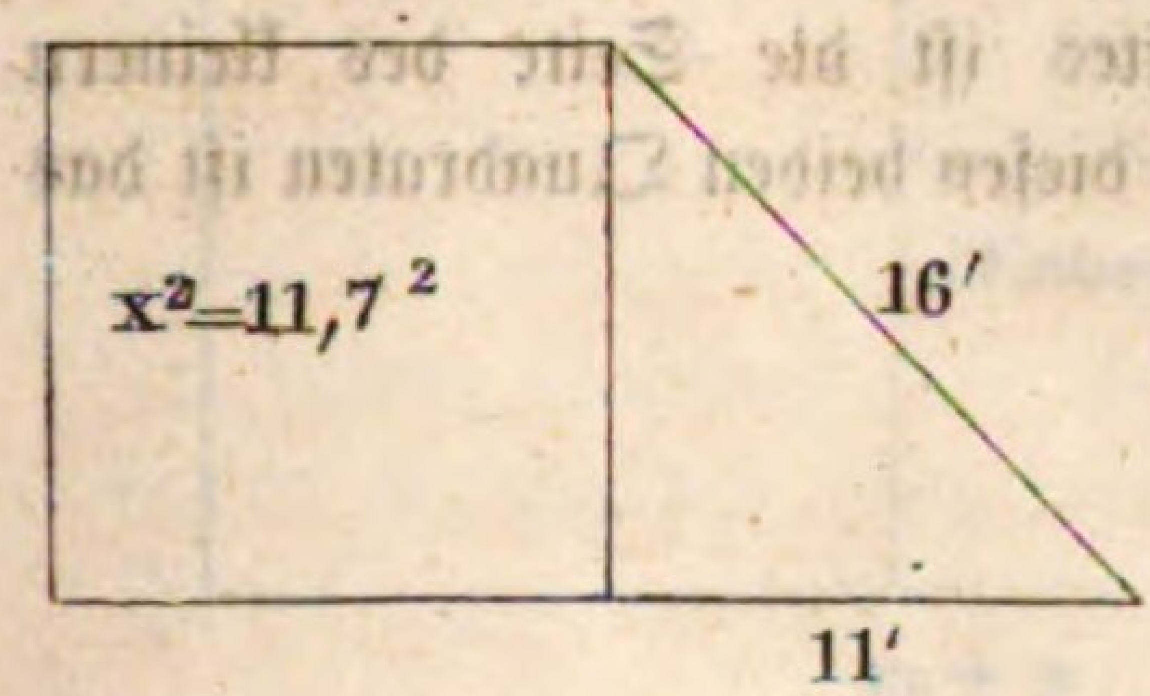
III. Subtraction der Quadrate.

Soll ein Quadrat von einem andern Quadrate subtrahirt werden, so heißt das, es soll der Unterschied zweier Quadrate als ein Quadrat dargestellt werden. Das wird erreicht, wenn man die Seite des kleineren Quadrats, das ist die des abzunehmenden, des Subtrahendus, zum Kathetus und die Seite des größeren Quadrats, das ist die Seite des Quadrats, von dem das kleinere abgezogen werden soll, des Minuendus, zur Hypotenuse nimmt; der zweite unbekannte Kathetus ist alsdann die Seite eines Quadrats, welches den gesuchten Unterschied beider Quadrate wieder als ein Quadrat darstellt, z. B. $a^2 - b^2$.



Beweis:

$$a^2 = b^2 + (a^2 - b^2)$$
$$-\,b^2 \qquad -\,b^2$$
$$\overline{a^2 - b^2 = a^2 - b^2.}$$



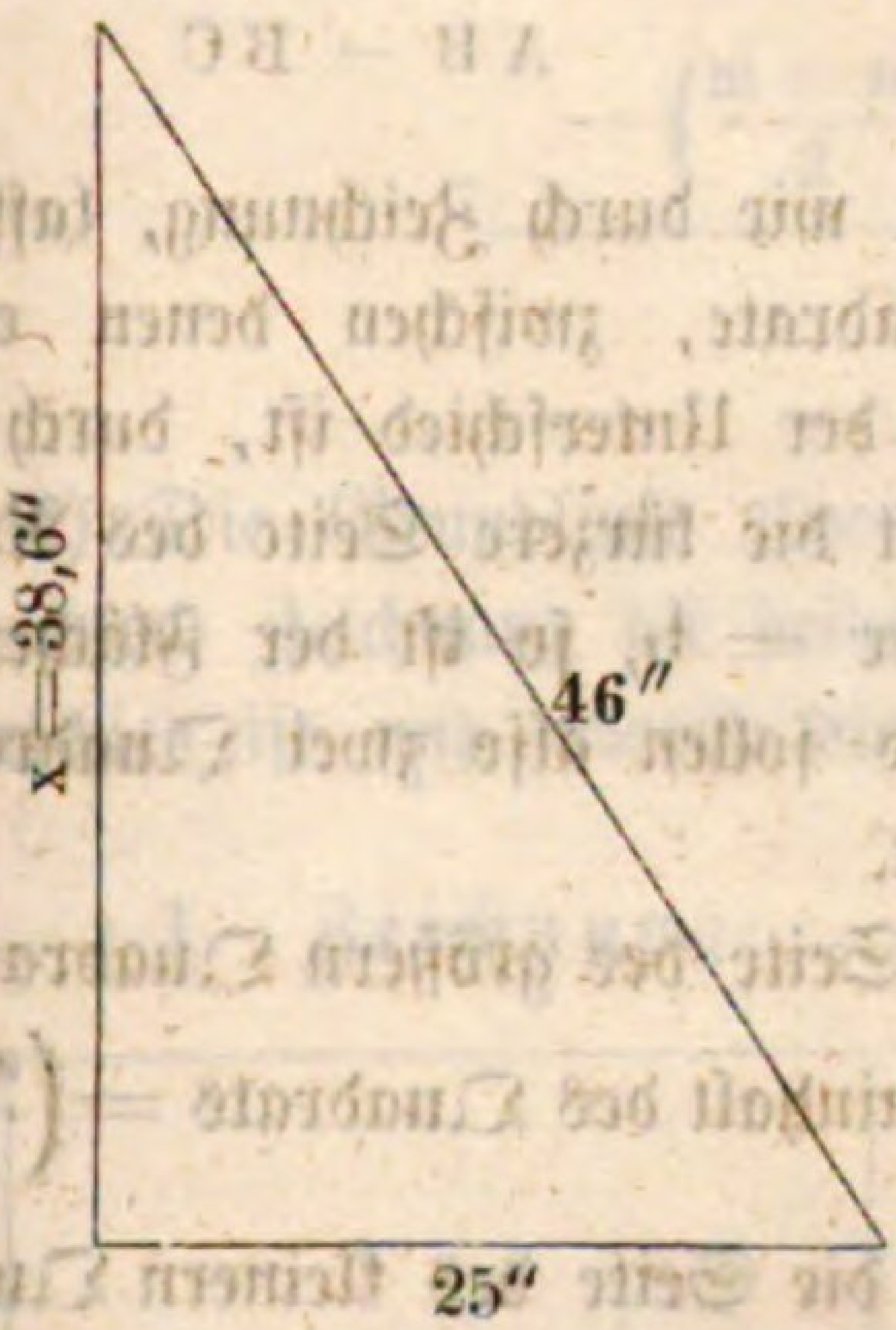
Aufgaben:

1) Die Seite eines Quadrats ist 16′ lang, die Seite eines andern 11′; subtrahire das letztere Quadrat von dem erstern und stelle die Differenz als ein Quadrat dar!

$$x = \sqrt{(16^2 - 11^2)} = \sqrt{135} = 11,7'.$$

2) Die Seite des Subtrahendus ist $= 25''$, die Seite des Minuendus $= 46''$; wie lang ist die Seite eines Quadrats, welches zwischen diesen beiden den Unterschied bildet?

1. Zeichnung:



2. Rechnung:

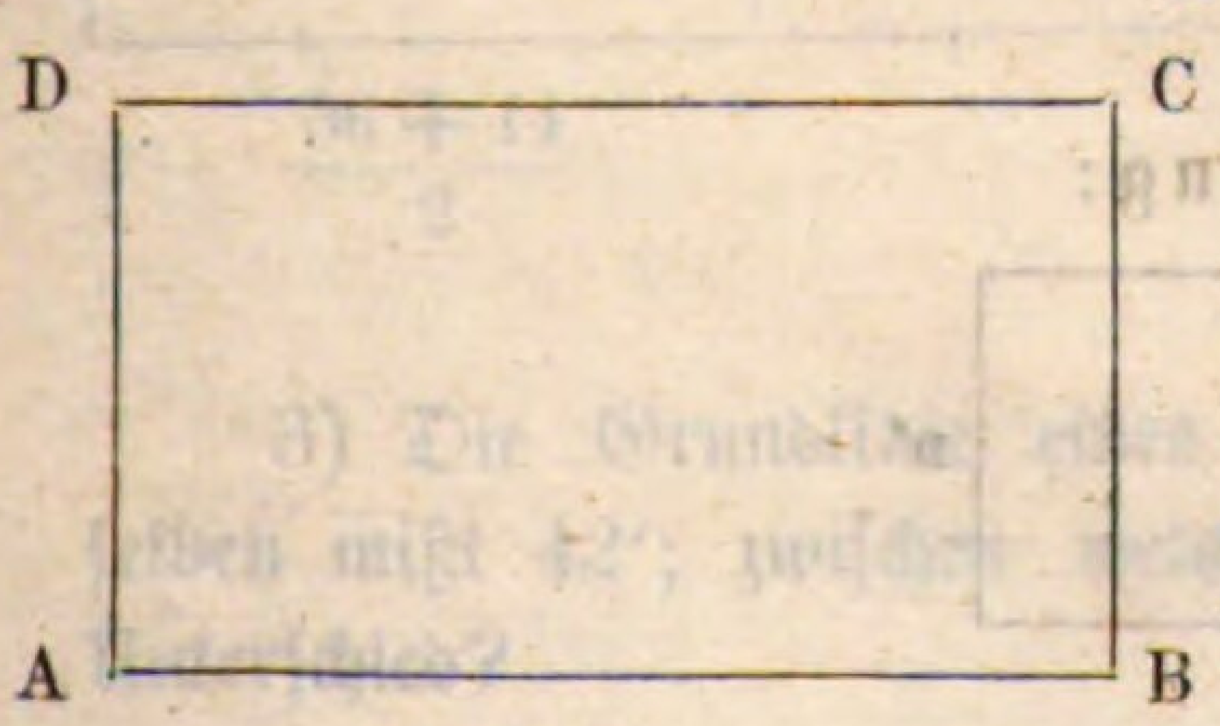
$$x^2 = 46^2 - 25^2$$

$$x = \sqrt{(46^2 - 25^2)}$$

$$= \sqrt{1491} = 38,6.$$

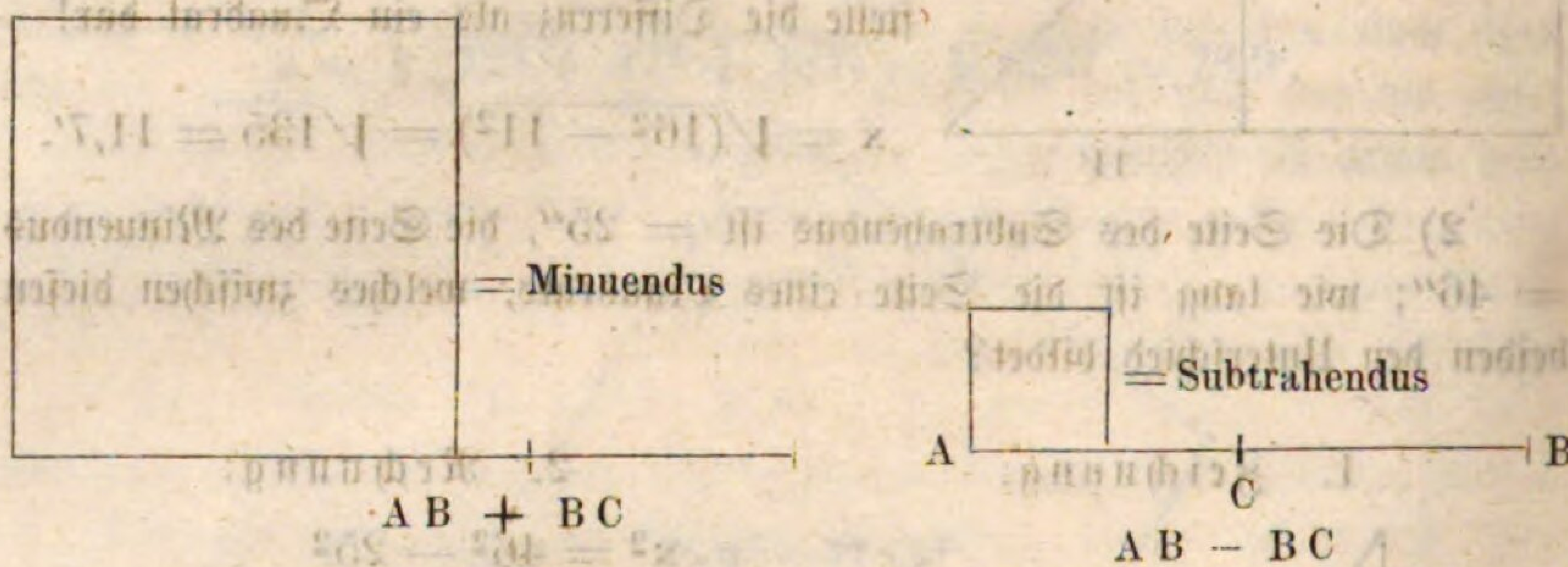
Mit Hülfe dieser letzten Aufgabe sind wir endlich nun auch im Stande, ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, wozu aber folgender Satz voraus geschickt werden muß: Jedes Rechteck kann als der Unterschied von zwei Quadraten angesehen und als solcher, sowohl durch Rechnung, wie durch Zeichnung dargestellt werden. Es sei das gegebene Rechteck ABCD, und es werde verlangt, die beiden Quadrate zu finden, zwischen denen dies Rechteck der Unterschied ist.

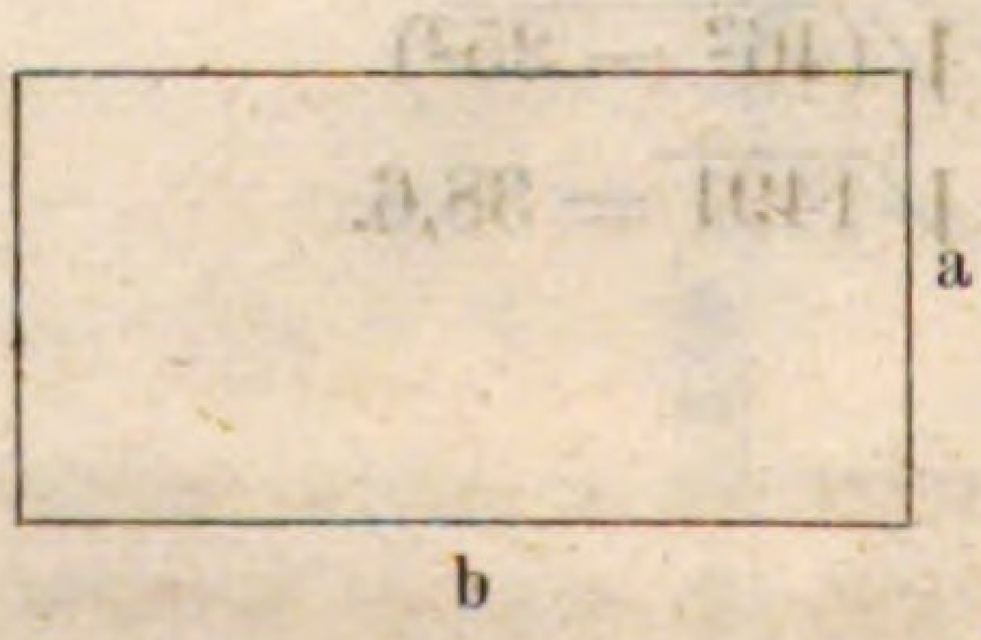
Auflösung:



Man lege die beiden ungleichen Seiten des Rechtecks AB und BC zusammen und halbire die Summe, so ist die Hälfte der ganzen Linie gleich der Seite des größern Quadrats oder des Minuendus. Darauf

subtrahire man die kleinere Seite des Rechtecks, B C, von der größern A B und halbire den Rest; die Hälfte des Restes ist die Seite des kleinern Quadrats oder des Subtrahendus. Zwischen diesen beiden Quadraten ist das gegebene Rechteck A B C D der Unterschied.





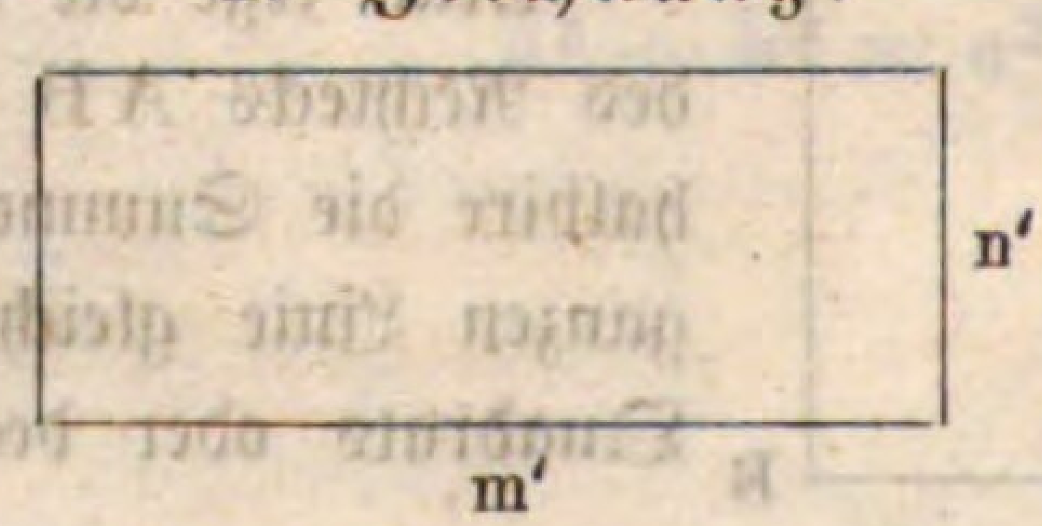
Eben so gut, wie durch Zeichnung, lassen sich die beiden Quadrate, zwischen denen ein gegebenes Rechteck der Unterschied ist, durch Rechnung finden. Ist die kürzere Seite des Rechtecks = a, die längere = b, so ist der Flächeninhalt desselben a b; es sollen also zwei Quadrate gefunden werden, deren Unterschied = a b ist.

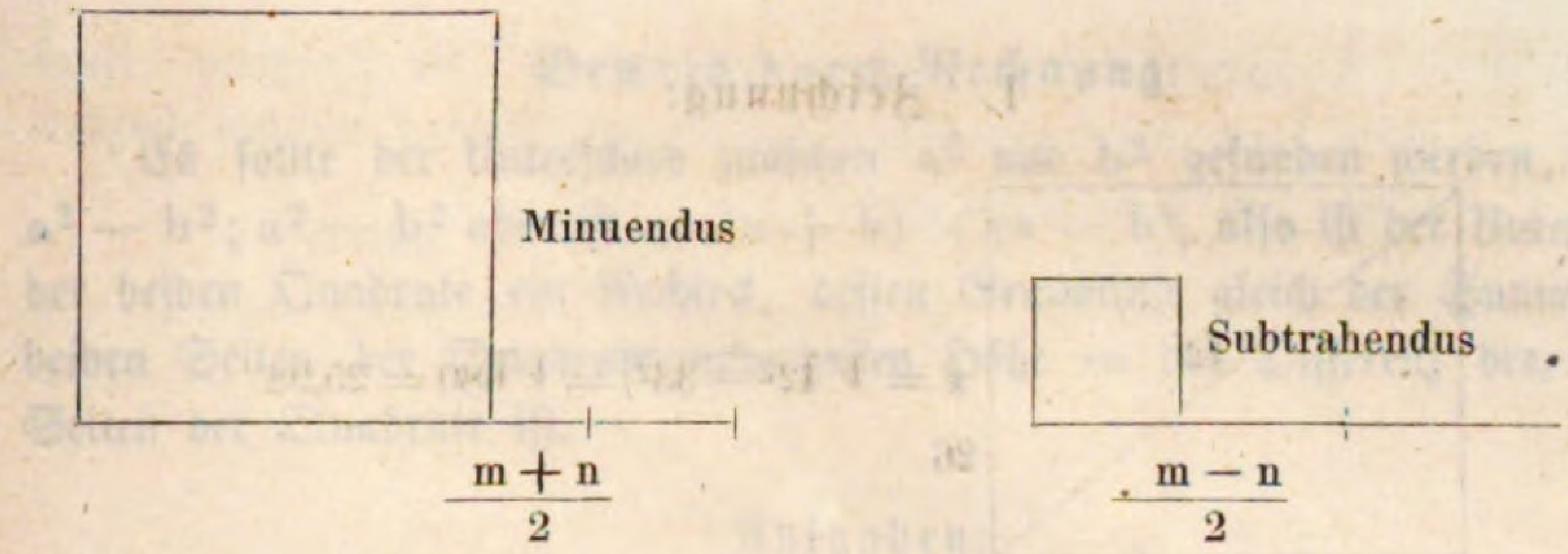
Nehmen wir zu diesem Zweck also die Seite des größern Quadrats oder des Minuendus $= \frac{a+b}{2}$, so ist der Flächeninhalt des Quadrats $= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$, und nehmen wir ferner die Seite des kleinern Quadrats $= \frac{b-a}{2}$, so ist der Flächeninhalt dieses Quadrats $= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{b^2-2ab+a^2}{4}$. Wird aber von $\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$ $\frac{a^2-2ab+b^2}{4}$ abgenommen, so bleibt als Rest a b.

Aufgaben:

1) Zwischen welchen beiden Quadraten ist ein Rechteck von m′ lang und n′ breit der Unterschied?

1. Zeichnung:





Beweis durch Rechnung:

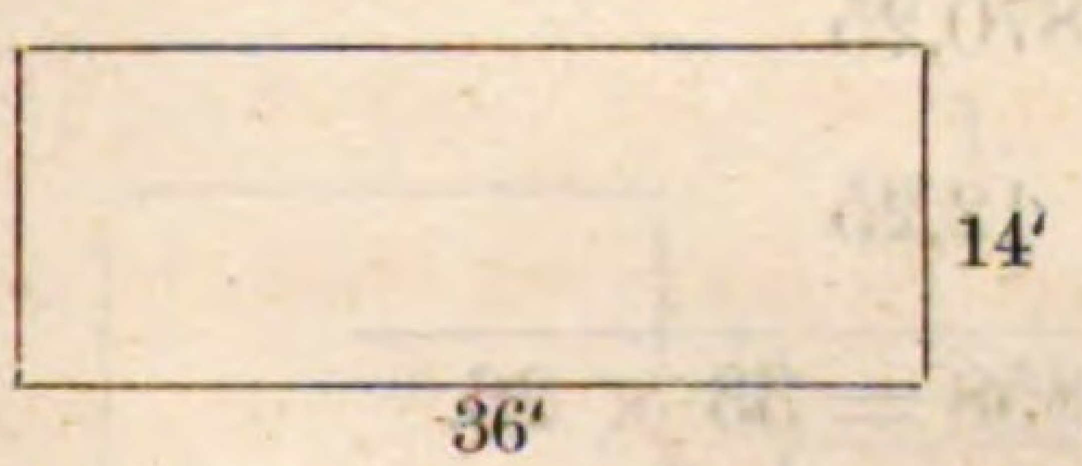
$$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 = \frac{m^2+2mn+n^3}{4}$$

$$-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = \frac{m^2-2mn+n^2}{4}$$

Rest $= mn.$

2) Die Grundlinie eines Rechtecks ist 36′ lang, die Höhe = 14′; finde durch Zeichnung die beiden Quadrate, zwischen denen das Rechteck der Unterschied ist und beweise die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!

1. **Zeichnung:**

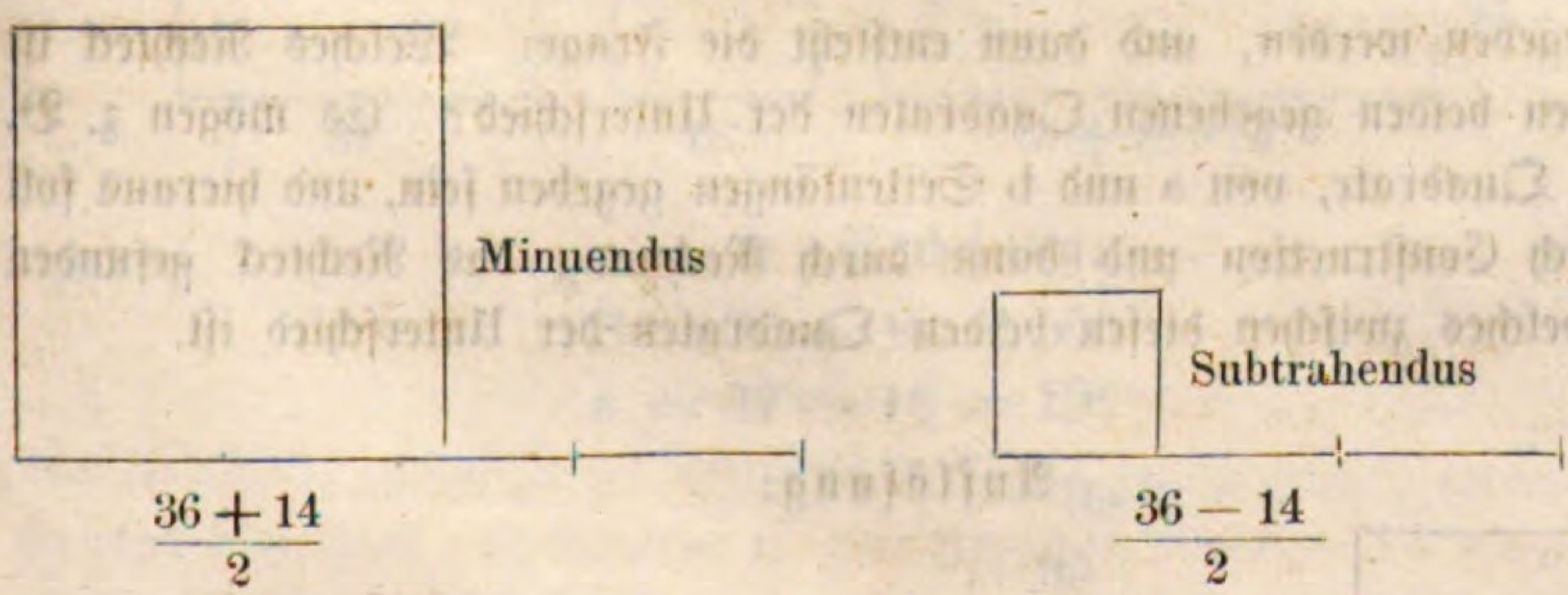


2. **Rechnung:**

$$\left(\frac{36+14}{2}\right)^2 = 625$$

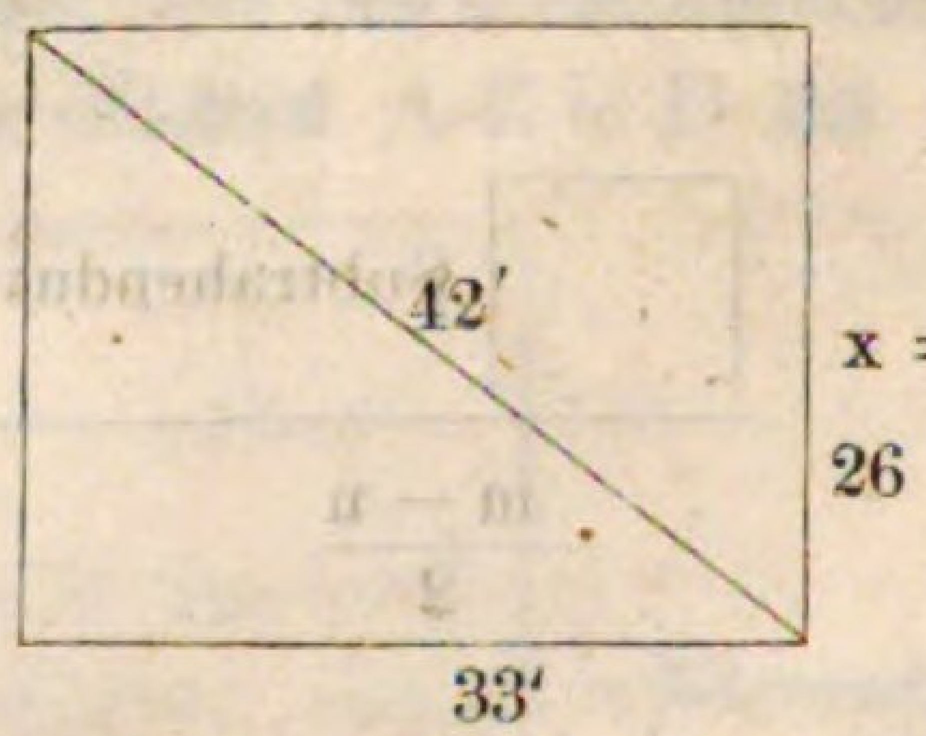
$$\left(\frac{36-14}{2}\right)^2 = 121$$

Rest $= 504 = 14' \times 36'$.

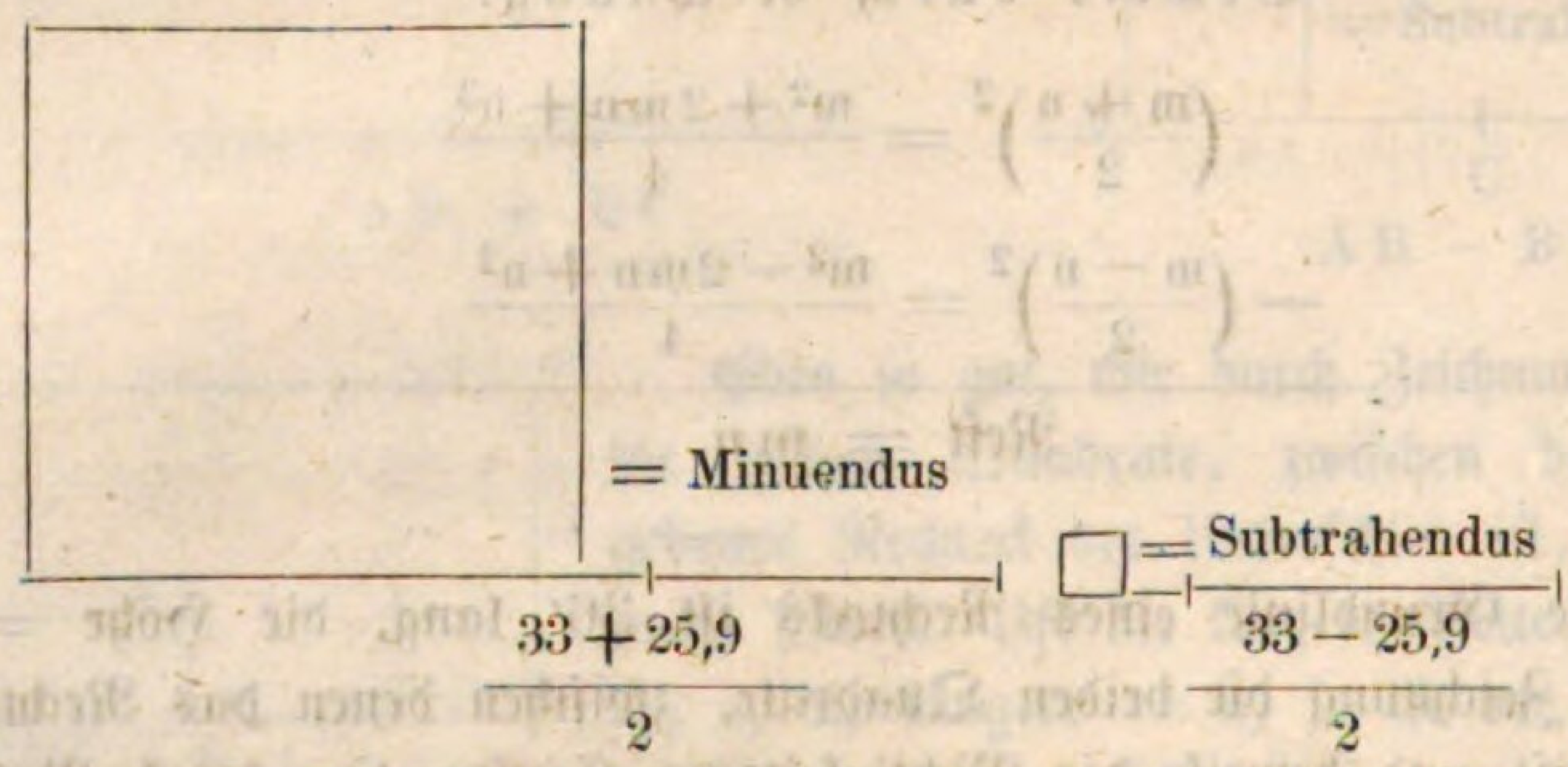


3) Die Grundlinie eines Rechtecks ist 33′ lang, die Diagonale desselben mißt 42′; zwischen welchen beiden Quadraten ist dieses Rechteck der Unterschied?

1. Zeichnung:



$$x = \sqrt{42^2 - 33^2)} = \sqrt{680} = 25{,}98$$



2. Rechnung:

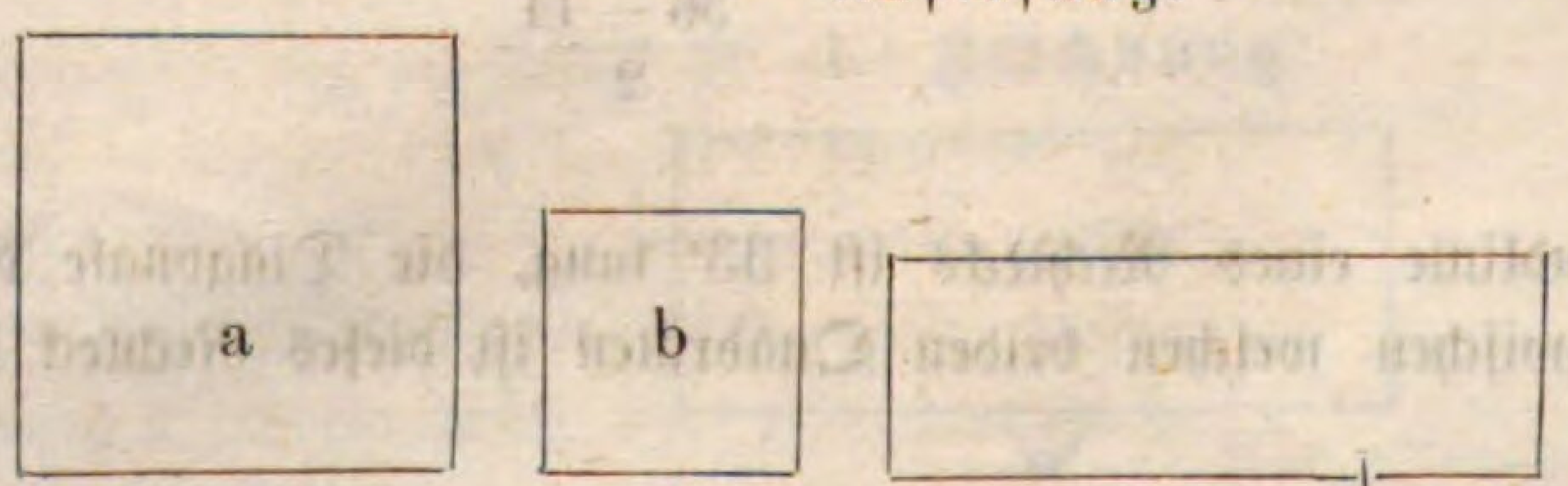
$$\left(\frac{33 + 25{,}9}{2}\right) = 870{,}25$$

$$\left(\frac{33 - 25{,}9}{2}\right) = \quad 12{,}25$$

$$\text{Rest} = 858 = 33 \times 26.$$

Umgekehrt können, wie eben das Rechteck, so die beiden Quadrate als bekannt gegeben werden, und dann entsteht die Frage: Welches Rechteck ist zwischen den beiden gegebenen Quadraten der Unterschied? Es mögen z. B. die beiden Quadrate, von a und b Seitenlängen gegeben sein, und hieraus soll zuerst durch Construction und dann durch Rechnung das Rechteck gefunden werden, welches zwischen diesen beiden Quadraten der Unterschied ist.

Auflösung:



$S = a + b$

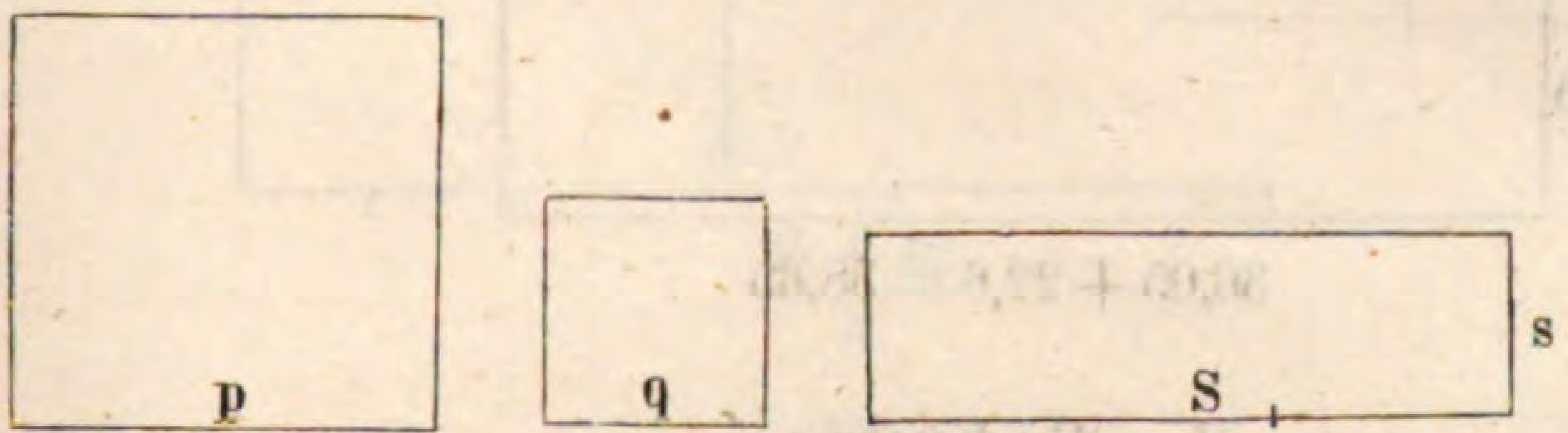
$s = a - b$

Beweis durch Rechnung:

Es sollte der Unterschied zwischen a^2 und b^2 gefunden werden, d. h. $a^2 - b^2$; $a^2 - b^2$ aber ist $= (a + b) \times (a - b)$, also ist der Unterschied der beiden Quadrate ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Summe der beiden Seiten der Quadrate und dessen Höhe = der Differenz der beiden Seiten der Quadrate ist.

Aufgaben:

1) Die beiden Seiten zweier Quadrate sind p' und q' lang; wie lang sind die beiden ungleichen Seiten des Rechtecks, welches zwischen diesen beiden Quadraten den Unterschied bildet?

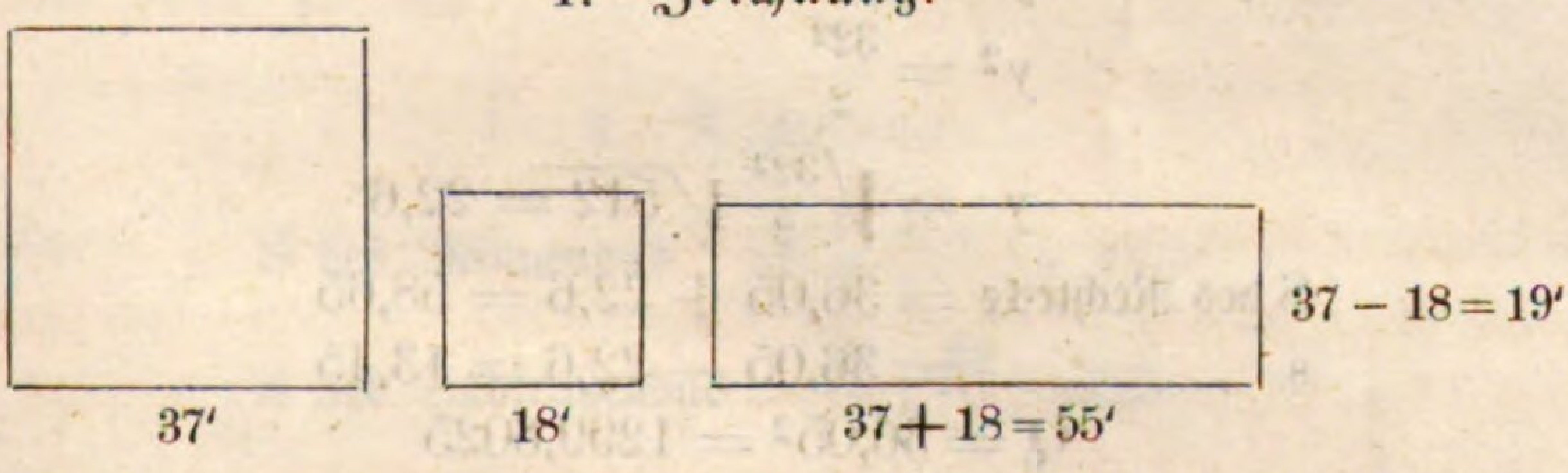


$S = p + q$
$s = p - q$

$$S \times s = (p + q) \times (p - q) = p^2 - q^2.$$

2) Die Seite eines Quadrats ist 37' lang, die Seite eines andern 18'; wie lang sind die beiden ungleichen Seiten eines Rechtecks, welches zwischen diesen beiden Quadraten den Unterschied bildet?

1. Zeichnung:



2. Rechnung:

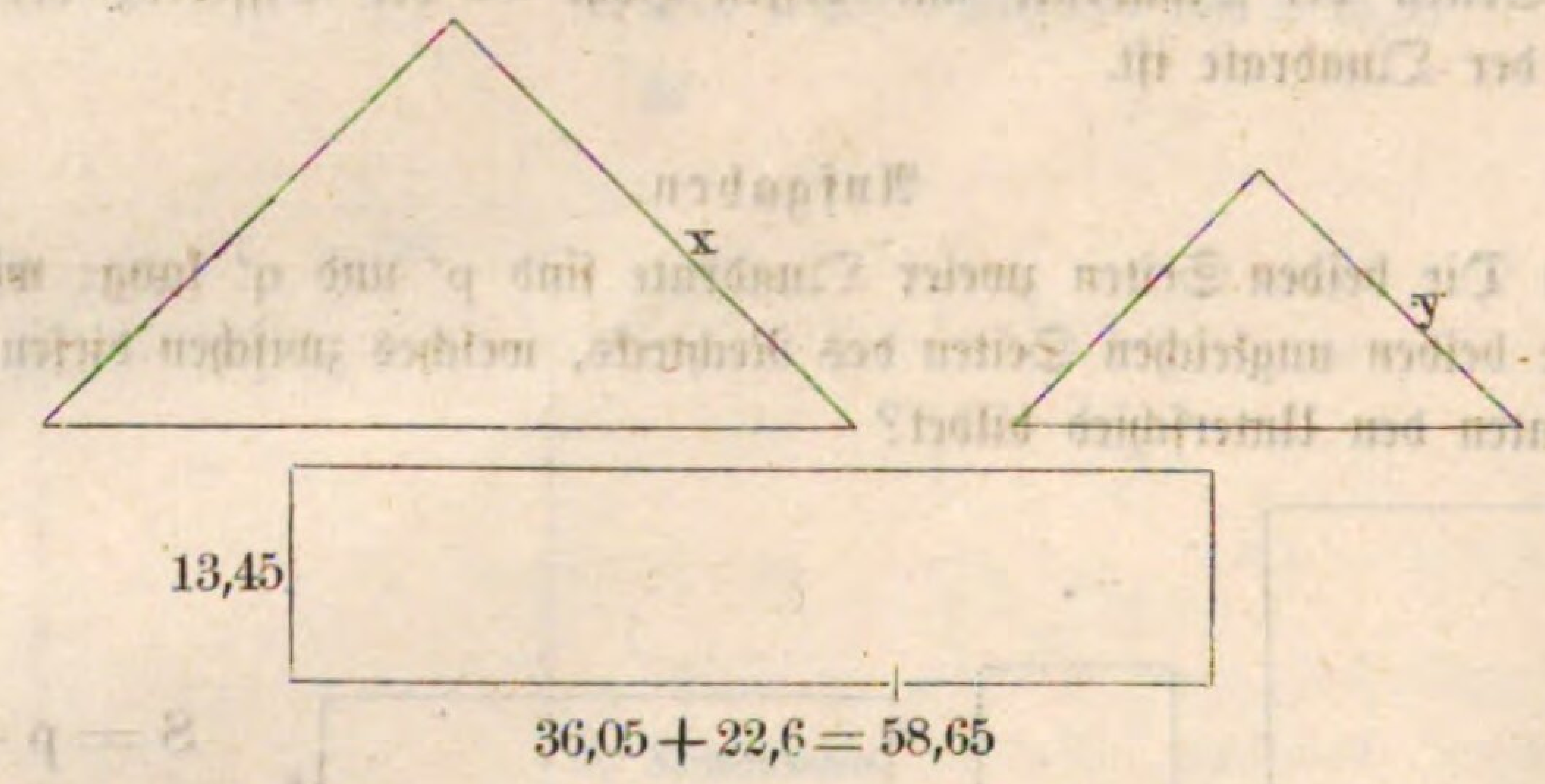
$$S = 37 + 18 = 55'$$
$$s = 37 - 18 = 19'$$

95
95
1045 □ fuß

$37^2 = 1369$ □ fuß
$-18^2 = 324$ "
1045 □ fuß $= 19 \times 55$.

3) Die Diagonale eines Quadrats ist 51′ lang, die Diagonale eines andern 32′; finde durch Zeichnung und Rechnung das Rechteck, welches zwischen beiden Quadraten den Unterschied bildet?

1. Zeichnung:



2. Rechnung:

$$2x^2 = 51^2$$

$$x^2 = \frac{51^2}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{51^2}{2}}\ \sqrt{1300,5} = 36,05$$

$$2y^2 = 32^2$$

$$y^2 = \frac{32^2}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{32^2}{2}}\ \sqrt{512} = 22,6$$

S des Rechtecks $= 36,05 + 22,6 = 58,65$

s „ „ $= 36,05 - 22,6 = 13,45$

$$Q = 36,05^2 = 1299,6025$$

$$-q = 22,6^2 = 510,76$$

$$= 788,8425\,\square'$$

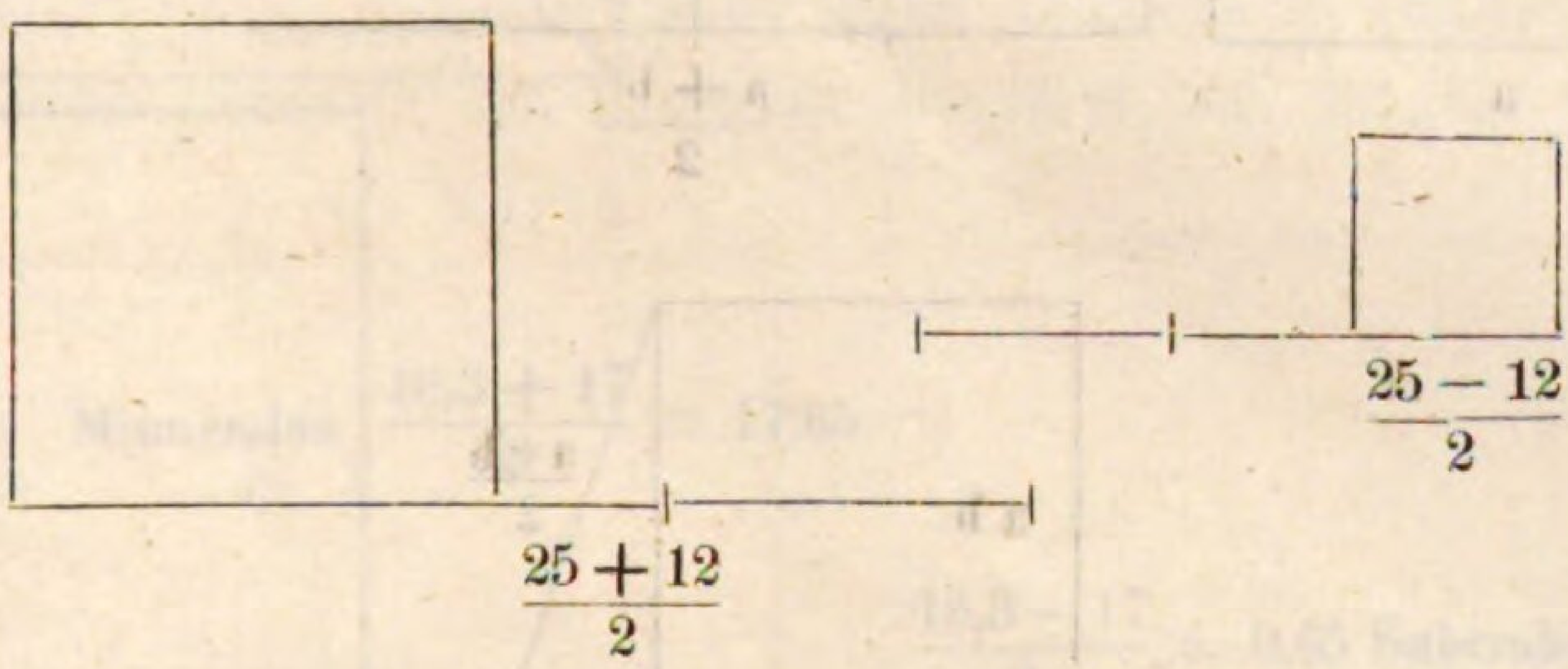
$$= 58,65' \times 13,45'.$$

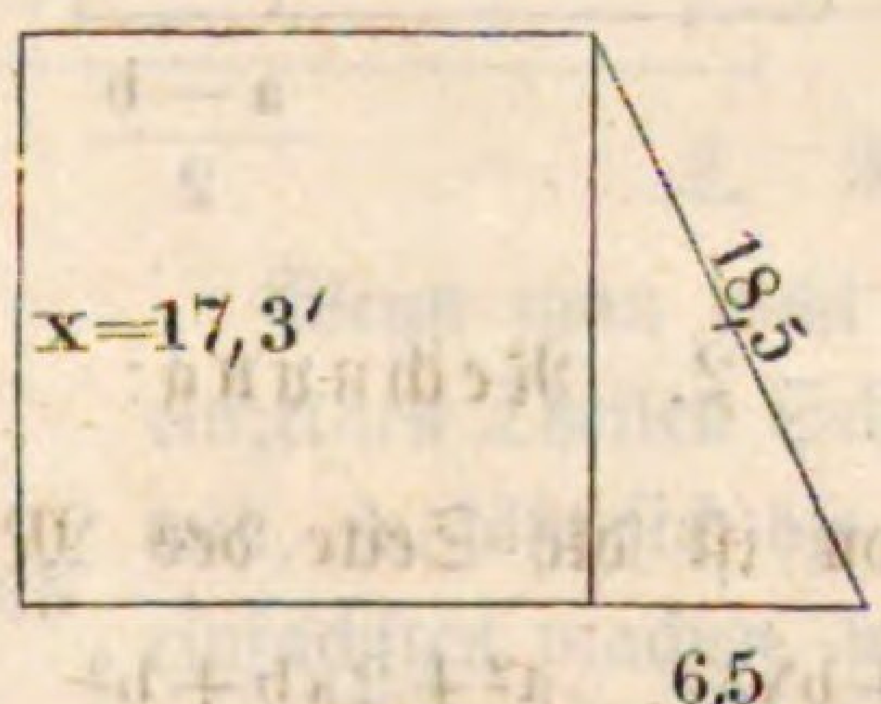
Nach dieser Vorbereitung sind wir nunmehr im Stande, jedes Rechteck in ein Quadrat von gleichem Flächeninhalte zu verwandeln; man sucht nämlich zuerst die beiden Quadrate, zwischen denen das gegebene Rechteck der Unterschied ist. Sind diese gefunden, so subtrahirt man mit Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes das kleinere Quadrat von dem größern, wodurch der gesuchte Unterschied wieder als Quadrat gefunden wird, welches dem gegebenen Rechteck an Flächeninhalt gleich ist, und dieses also als Quadrat darstellt.

Aufgaben:

1) Verwandle ein Rechteck von 25′ lang und 12′ breit in ein Quadrat von gleichem Flächeninhalt und beweise die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!

1. Zeichnung:





2. Rechnung:

$$\text{S des Minuendus} = \frac{12+25}{2} = 18{,}5'$$

$$\text{S des Subtrahendus} = \frac{25-12}{2} = 6{,}5'$$

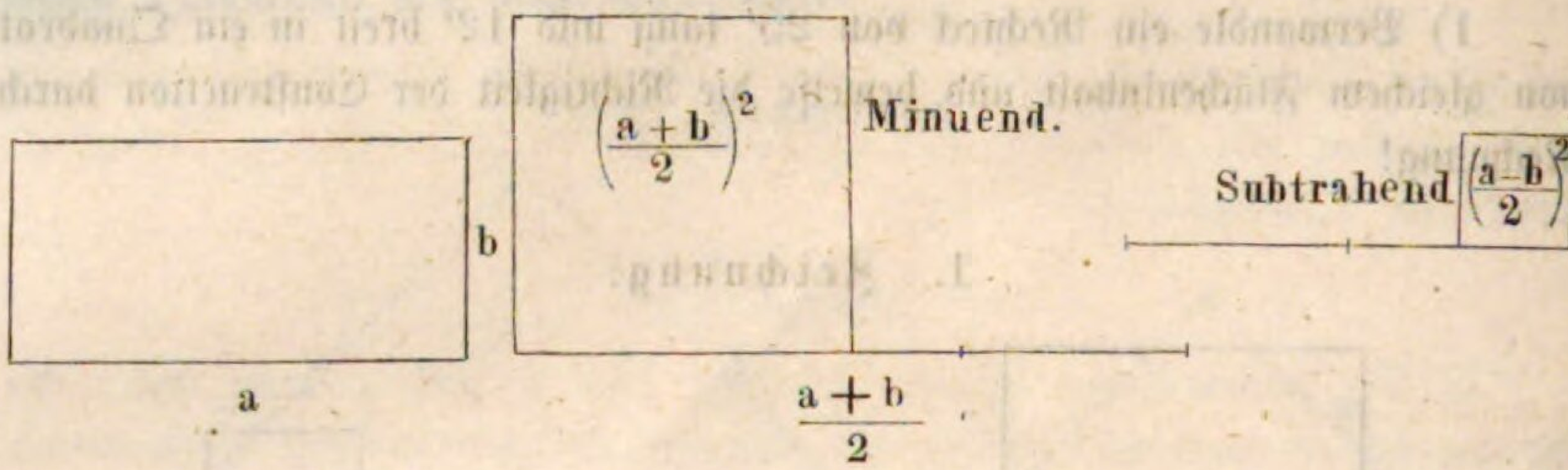
$$18{,}5^2 = 342{,}25$$
$$6{,}5^2 = 42{,}25$$

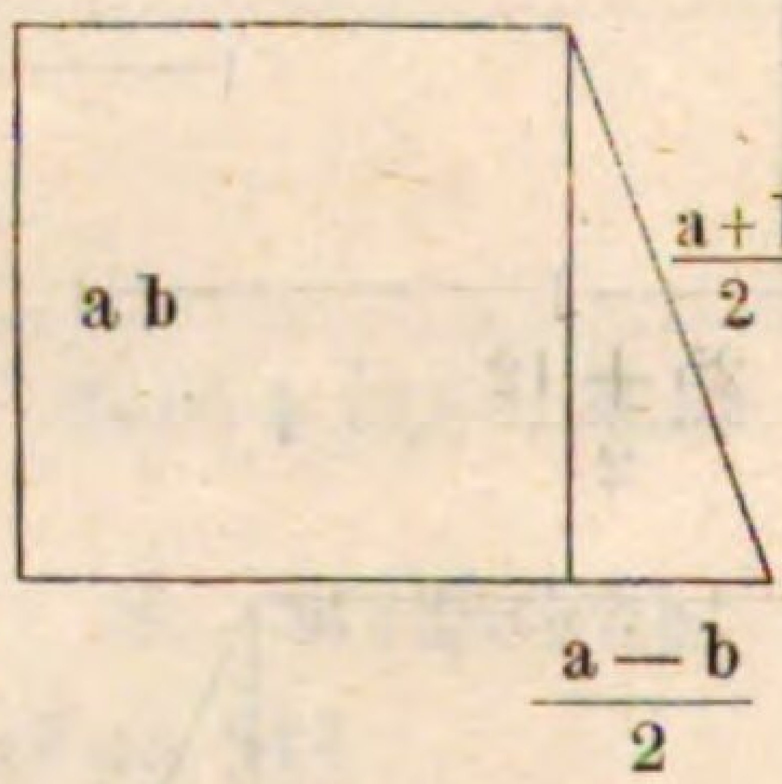
$$\text{Rest} = 300\,\square' = 12' \times 25'$$

Die Seite der Differenz, als Quadrat $= \sqrt{300} = 17{,}32'$.

2) Ein Rechteck ist a′ lang und b′ breit; verwandle dasselbe durch Construction in ein Quadrat von gleichem Flächeninhalt und beweise die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!

1. Zeichnung:





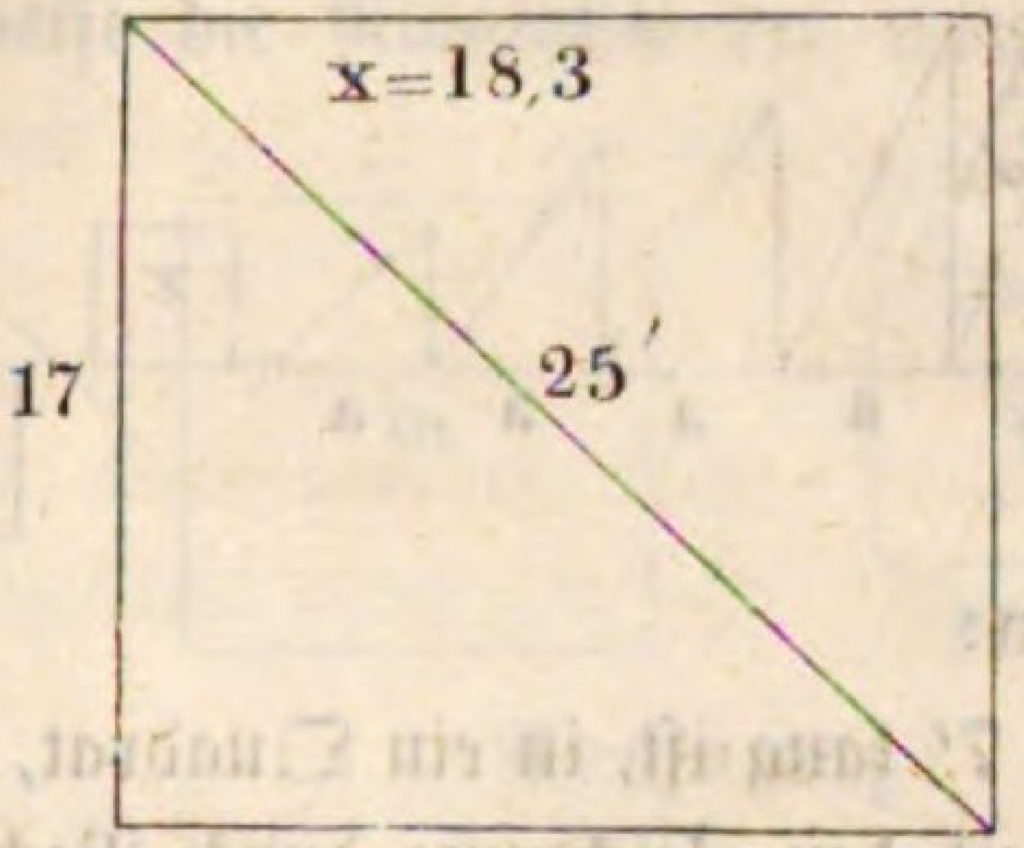
2. Rechnung:

Nach der Construction ist die Seite des Minuendus $= \frac{a+b}{2}$, folglich sein Flächeninhalt $= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$, und die Seite des Subtrahendus $\frac{a-b}{2}$, also sein Flächeninhalt $= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2-2ab+b^2}{4}$; werden diese beiden Größen von einander subtrahirt, so ist der Rest $\frac{4ab}{4} = ab$, was auch der Flächeninhalt des gegebenen Rechtecks ist.

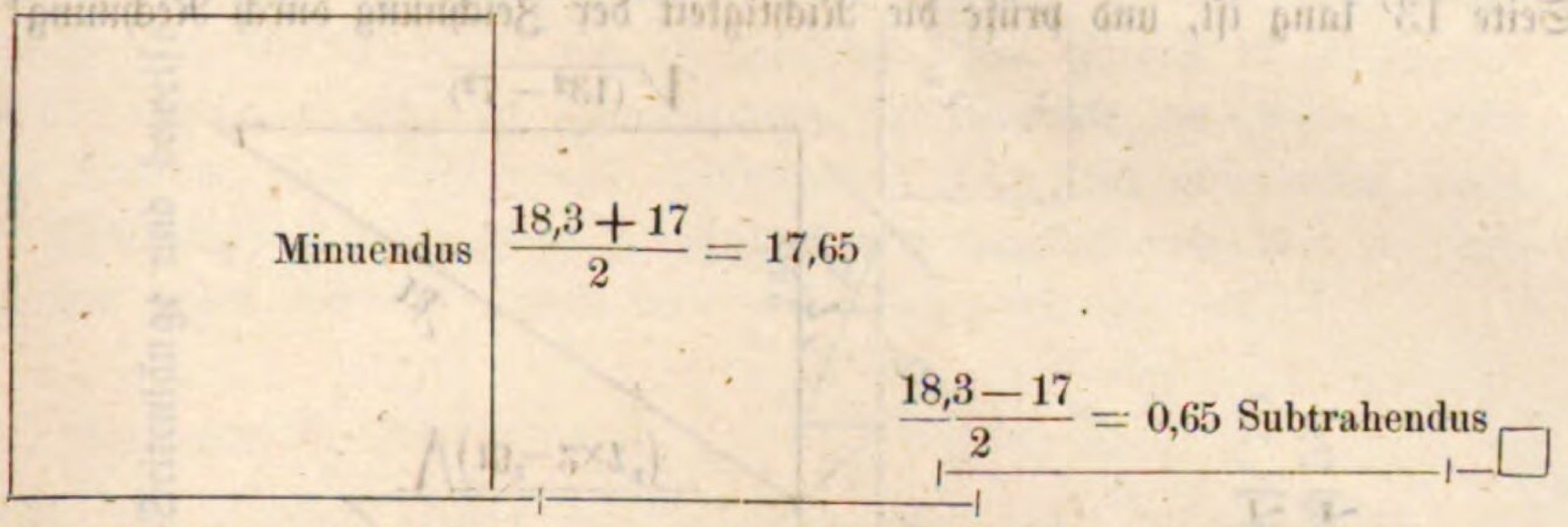
$x = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$. Es ist also x, d. h. die Seite des gesuchten Quadrats $= \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$; die Quadratwurzel aus ab aber ist eine Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, ab zum Produkte gibt, d. h. die Seite eines Quadrats darstellt, welches ab zum Flächeninhalte hat, was verlangt wurde.

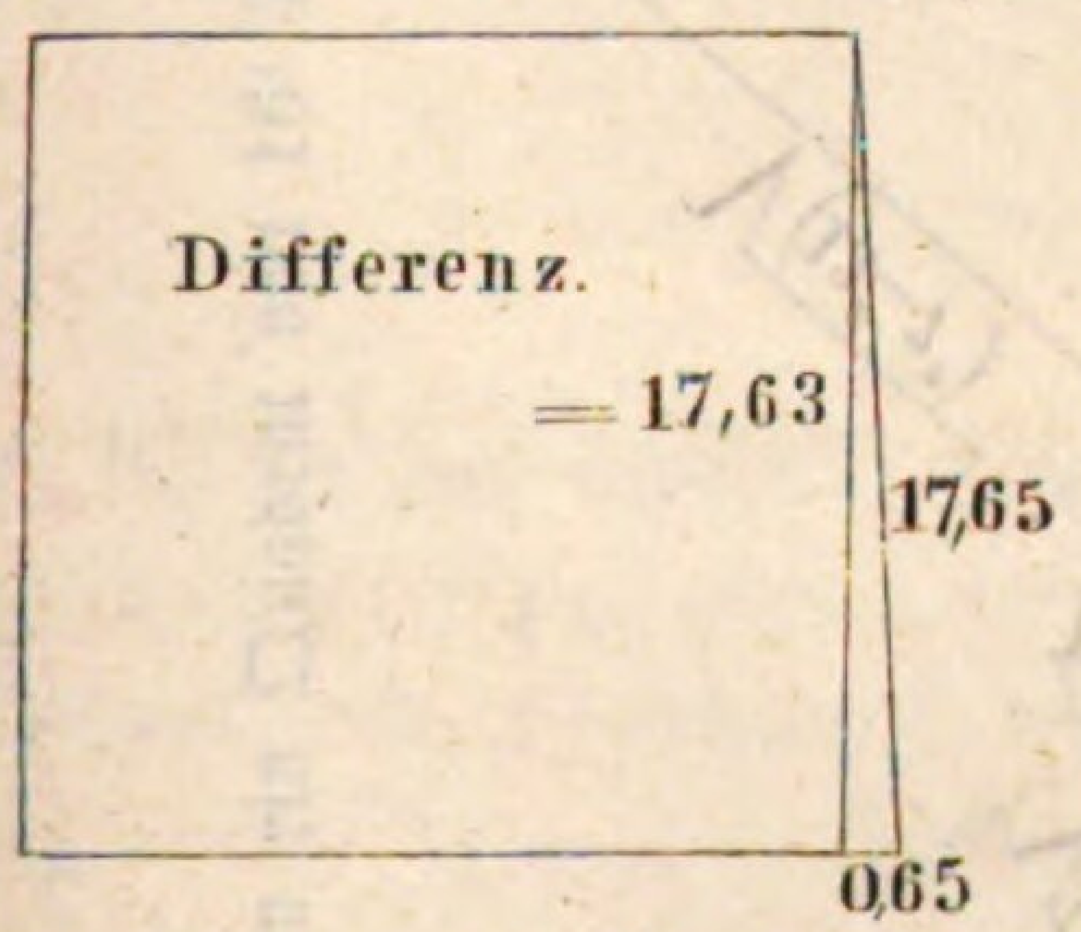
3) Die Höhe eines Rechtecks ist 17′, die Diagonale desselben 25′; verwandle dieses Rechteck durch Zeichnung in ein Quadrat von gleichem Flächeninhalte und prüfe die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!

1. Zeichnung:



Die Grundlinie des Rechtecks = $\sqrt{(25^2 - 17^2)} = \sqrt{(625 - 289)} =$
$= \sqrt{336} = 18,3'$



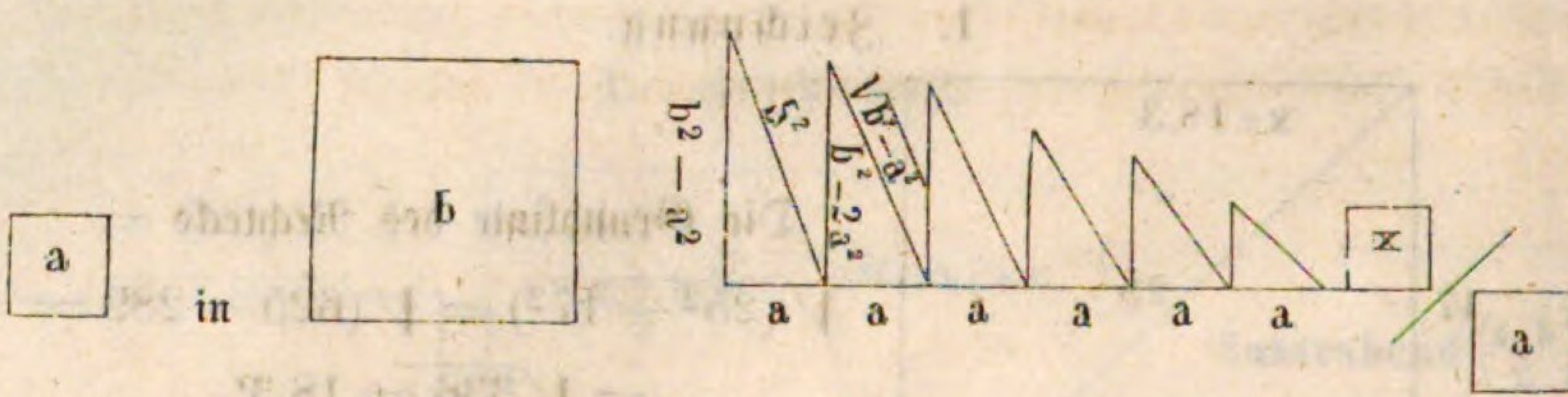


2. Rechnung:

Wenn man nicht die Construction in ihren einzelnen Theilen Schritt für Schritt nachrechnen will, so läßt sich die Probe durch Rechnung am einfachsten machen, wenn man den Flächeninhalt des gegebenen Rechtecks berechnet und aus dem gefundenen Resultat die Quadratwurzel zieht; es muß also in diesem Fall die Seite des gesuchten Quadrats $= \sqrt{17 \times 18,3} = \sqrt{311,1} = 17,63$ sein, wobei wir zugleich bemerken, daß auch die Construction für die Lösung dieser Aufgaben mit Hülfe der Theorie des Kreises noch leichter ausgeführt werden kann.

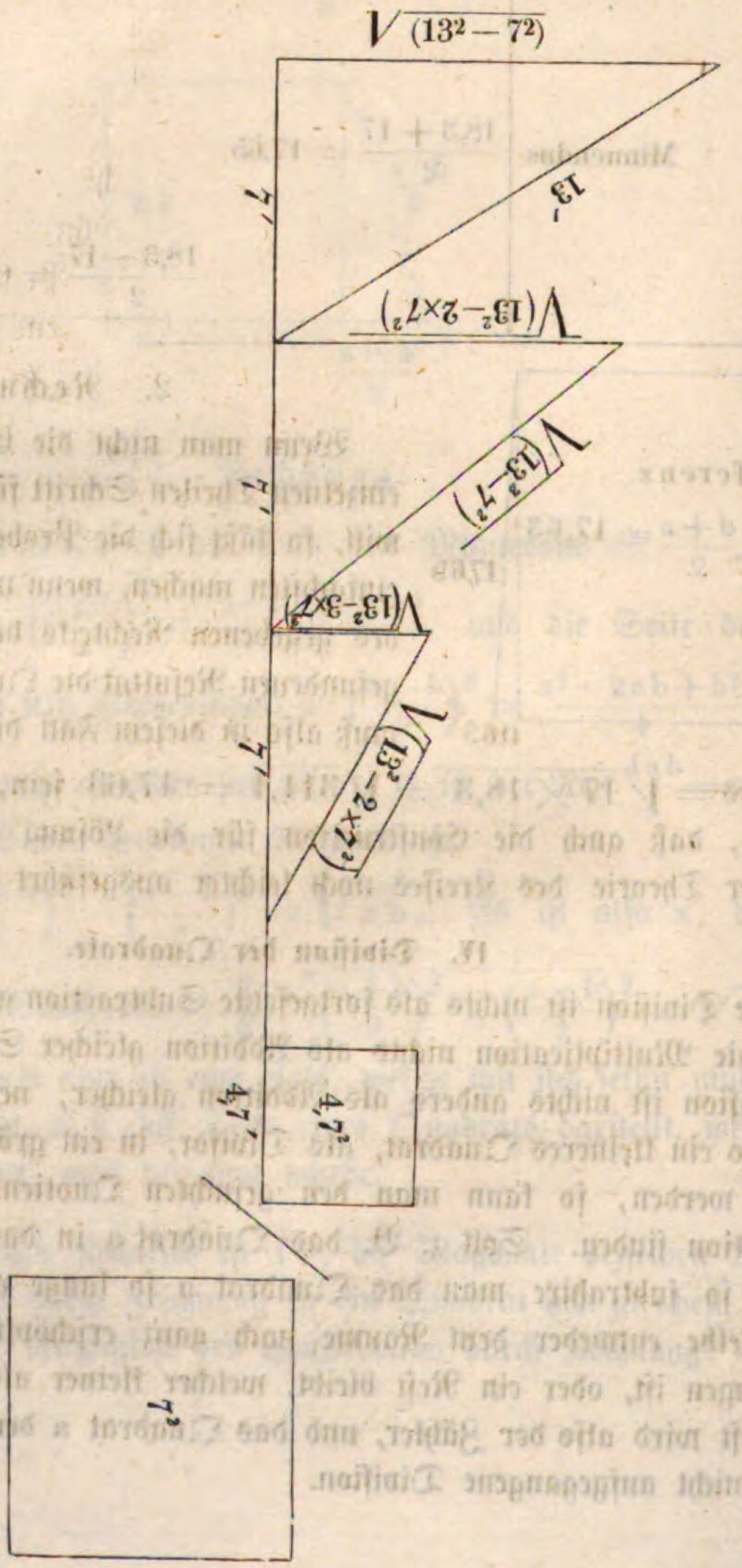
IV. Division der Quadrate.

Die Division ist nichts als fortgesetzte Subtraction gleicher Subtrahenden, so wie die Multiplication nichts als Addition gleicher Summanden ist; oder: die Division ist nichts anders als Addition gleicher, negativer Summanden. Soll also ein kleineres Quadrat, als Divisor, in ein größeres als Dividendus dividirt werden, so kann man den gesuchten Quotienten durch fortgesetzte Subtraction finden. Soll z. B. das Quadrat a in das Quadrat b getheilt werden, so subtrahire man das Quadrat a so lange von dem Quadrat b, bis dasselbe entweder dem Raume nach ganz erschöpft, d. h. die Division aufgegangen ist, oder ein Rest bleibt, welcher kleiner als das Quadrat a ist. Der Rest wird also der Zähler, und das Quadrat a der Nenner des Bruches für die nicht aufgegangene Division.



Aufgaben:

1) Dividire ein Quadrat, dessen Seite 7′ lang ist, in ein Quadrat, dessen Seite 13′ lang ist, und prüfe die Richtigkeit der Zeichnung durch Rechnung!

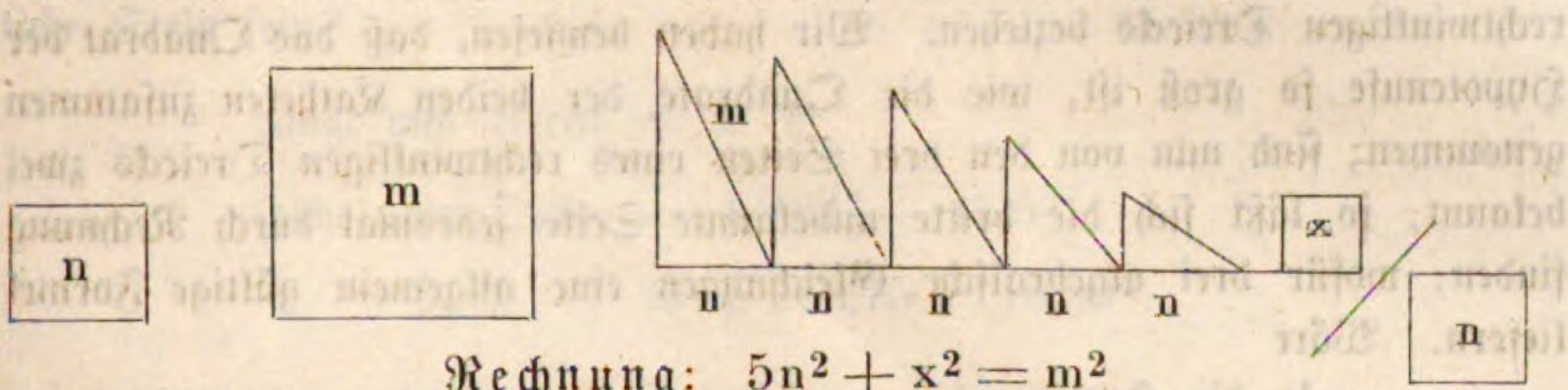


Rechnung:

7^2 in $13^2 = 49$ in $169 = 3^{22}/_{49}$; oder:

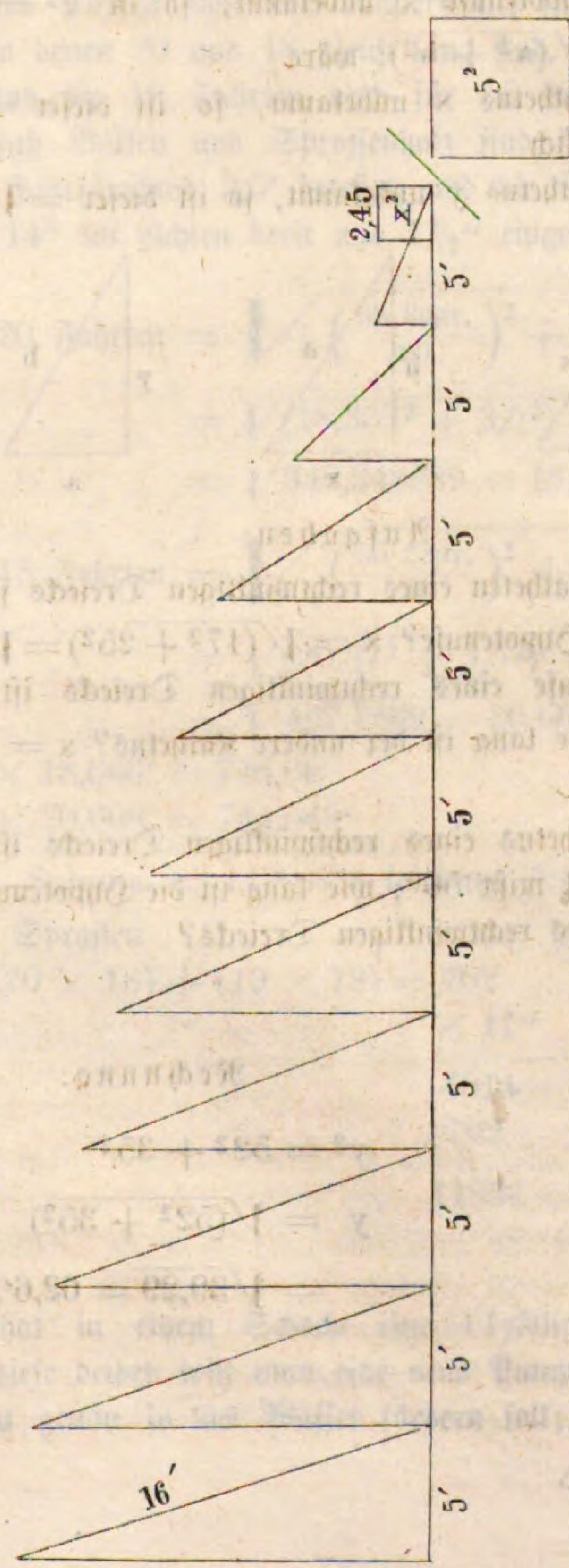
7^2 in $13^2 = (1^6/_7)^2 = 3^{22}/_{49}$.

2) Dividire das Quadrat n in das Quadrat m; bestimme den Quotienten und beweise die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!



Rechnung: $5n^2 + x^2 = m^2$

3) Dividire ein Quadrat von 5′ Seitenlänge in ein Quadrat von 16′ Seitenlänge und beweise die Richtigkeit der Zeichnung durch Rechnung!



5^2 in 16^2

$= 25$ in $256 = 10\frac{6}{25}$

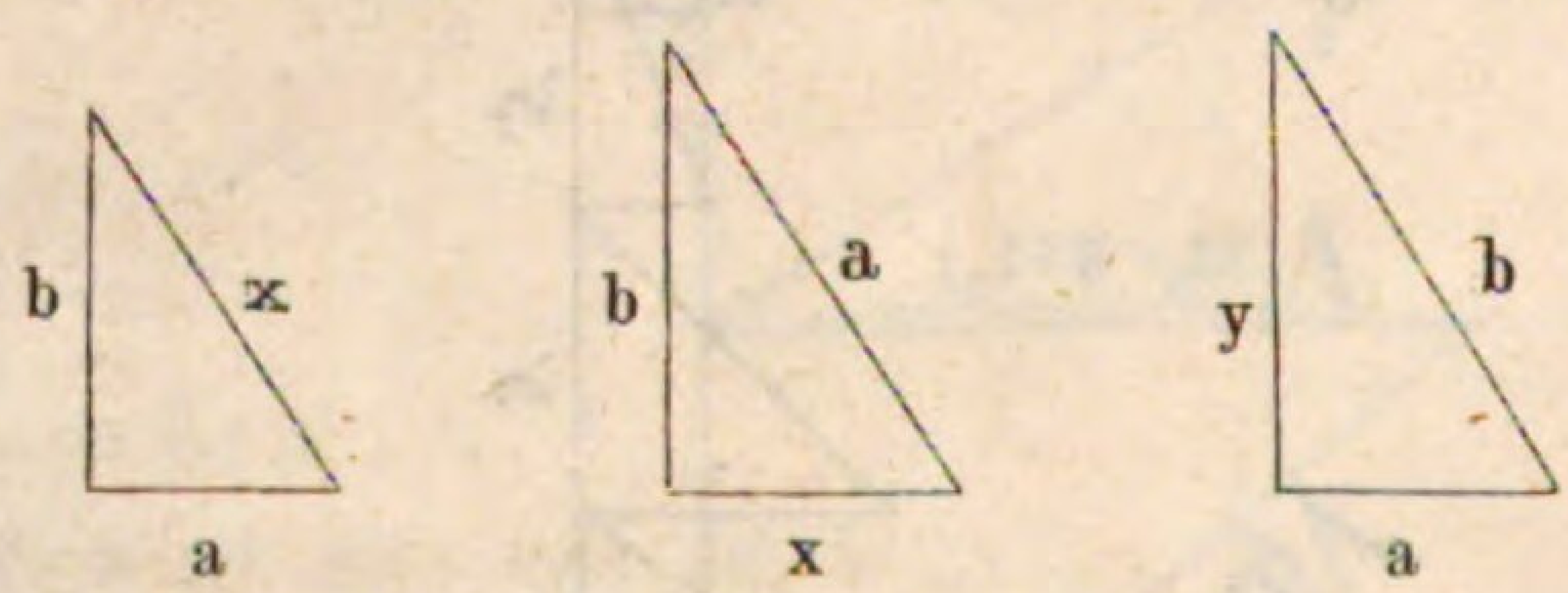
oder: 5^2 in $16^2 = (3\frac{1}{5})^2 = 10\frac{6}{25}$. $\frac{6}{25}\, 5^2 = \sqrt{6}$ dividirt durch $\sqrt{25}$

$= 2{,}45^2$ dividirt durch 5^2.

V. Aufgaben, welche sich auf die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks beziehen.

Endlich sind noch die Aufgaben zu lösen, welche sich auf die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks beziehen. Wir haben bewiesen, daß das Quadrat der Hypotenuse so groß ist, wie die Quadrate der beiden Katheten zusammen genommen; sind nun von den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks zwei bekannt, so läßt sich die dritte unbekannte Seite jedesmal durch Rechnung finden, wofür drei algebraische Gleichungen eine allgemein gültige Formel liefern. Wäre

1. die Hypotenuse x unbekannt, so ist $x^2 = a^2 + b^2$, also $x = \sqrt{(a^2 + b^2)}$; wäre
2. der Kathetus x unbekannt, so ist dieser $= \sqrt{(a^2 - b^2)}$; ist endlich
3. der Kathetus y unbekannt, so ist dieser $= \sqrt{(b^2 - a^2)}$.

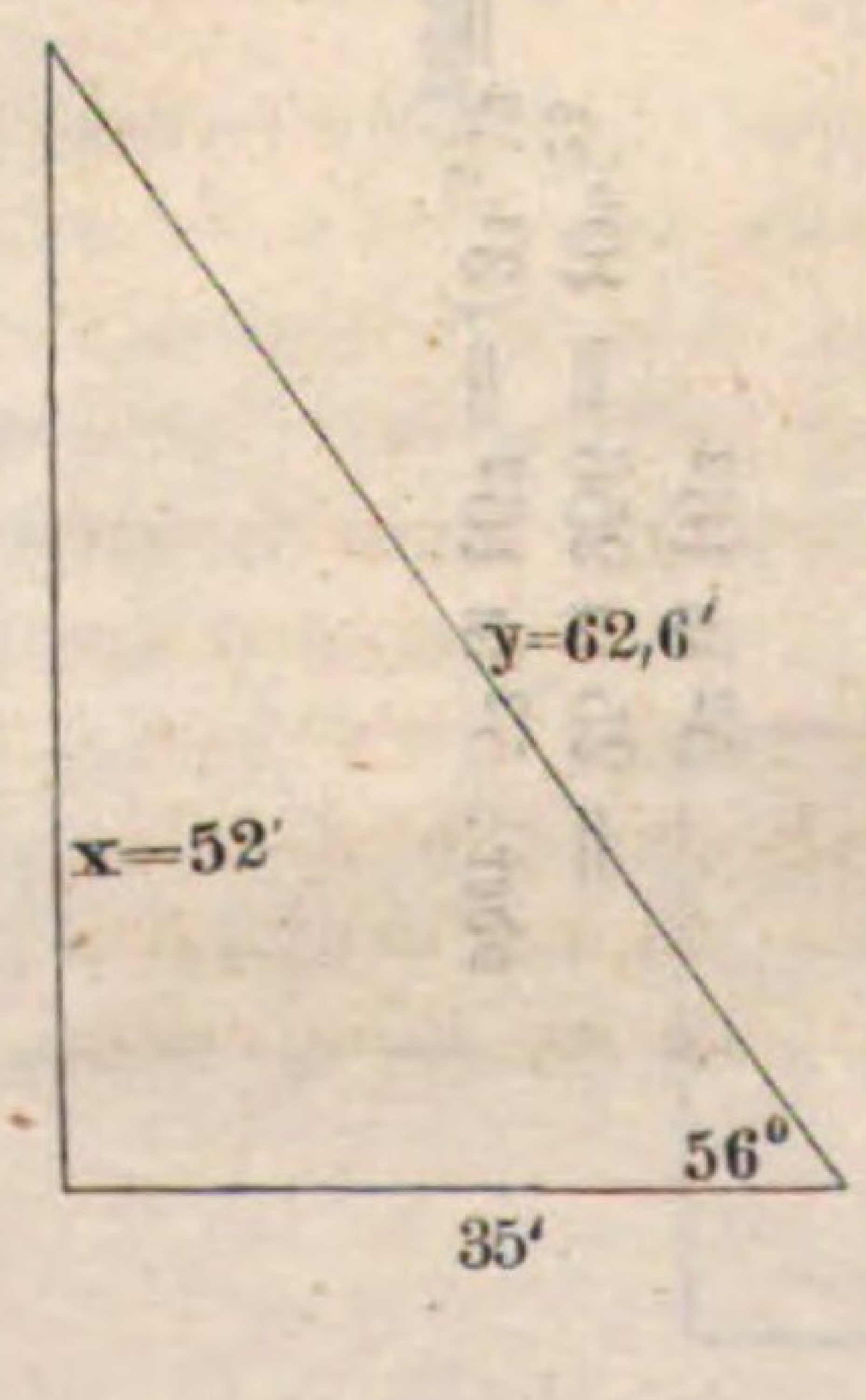


Aufgaben:

1) Die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 17 und 25′ lang; wie lang ist die Hypotenuse? $x = \sqrt{(17^2 + 25^2)} = \sqrt{914} = 30{,}23'$.

2) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist 29′, der eine Kathetus mißt 19′; wie lang ist der andere Kathetus? $x = \sqrt{(29^2 - 19^2)}$ $\sqrt{480} = 21{,}9'$.

3) Der eine Kathetus eines rechtwinkligen Dreiecks ist 35′ lang, der anliegende spitze Winkel mißt 56⁰; wie lang ist die Hypotenuse und wie lang der andere Kathetus des rechtwinkligen Dreiecks?



Rechnung:

$y^2 = 52^2 + 35^2$

$y = \sqrt{(52^2 + 35^2)}$

$= \sqrt{39{,}29} = 62{,}6'$.

4) Ein Steinhauer hat einen Kegel von 2′ 7″ Durchmesser und 1′ 11″ Seitenlänge zu verfertigen; wie lang, breit und dick muß der dazu erforderliche Stein sein?

$$\text{Länge und Breite} = 2'\ 7''$$

$$\text{Höhe oder Dicke} = \sqrt{(23^2 - 15{,}5^2)}$$

$$= \sqrt{288{,}75} = 16{,}99''.$$

5) In einem Schacht von 110 Lachtern tief sollen 38 Fahrten eingebaut werden, von denen 20 und 18 gleich lang sind, so daß die 20 Fahrten für 55 Lchtr. und die 18 Fahrten auch für 55 Lchtr. ausreichen. Wie viele laufende Fuß Balken und Sprossenholz sind dazu erforderlich, wenn die Breite des Fahrschachtes 3,5′ beträgt, und die Sprossen circa 1′ auseinander liegen, 14″ im Lichten breit und 1½″ eingezapft sind?

$$\text{Länge der 20 Fahrten} = \sqrt{\left(\frac{55 \text{ Lchtr.}}{20}\right)^2 + (3{,}5')^2}$$

$$= \sqrt{(18{,}333^2 + 3{,}5^2)}$$

$$= \sqrt{348{,}348889} = 18{,}666'.$$

$$\text{Länge der 18 Fahrten} = \sqrt{\left(\frac{55 \text{ Lchtr.}}{18}\right)^2 + (3{,}5^2)}$$

$$= \sqrt{(20{,}37^2 + 3{,}5^2)}$$

$$= \sqrt{427{,}1869} = 20{,}668'.$$

$$40 \times 18{,}666' = 746{,}64'$$

$$36 \times 20{,}668' = 744{,}048'$$

Summa = 1490,688 laufende Fuß Balken.

Anzahl der Sprossen

$$= (20 \times 18) + (19 \times 18) = 702$$

$$\times 17''$$

$$4914$$

$$702$$

11934 = 994,5 laufende Fuß Sprossenholz.

6) Man hat in einem Schacht eine 14zöllige und eine 11zöllige Pumpe. Für diese beiden will man eine neue Pumpe hinein bauen, welche in derselben Zeit genau so viel Wasser fördern soll, wie die beiden alten

zusammen genommen; wie groß ist der Durchmesser dieser neuen Pumpe zu nehmen?

Durchmesser $= \sqrt{(14^2 + 11^2)} = \sqrt{317} = 17{,}8''$.

7) Wie groß muß der Durchmesser einer Pumpe gemacht werden, die in derselben Zeit eben so viel Wasser fördert, wie drei Pumpen, deren Durchmesser 10, 17 und 19″ sind?

$$x = \sqrt{10^2 + 17^2 + 19^2} = \sqrt{750} = 27{,}38''.$$

Probe:

Die erste	fördert	$5^2 \times 3{,}14 = 78{,}5 \square''$
„ zweite	„	$8{,}5^2 \times 3{,}14 = 226{,}865 \square''$
„ dritte	„	$9{,}5^2 \times 3{,}14 = 283{,}385 \square''$
		$588{,}75 \square''$

Die neu einzubauende Pumpe fördert

$$13{,}69^2 \times 3{,}14 = 588{,}486554 \square''.$$

8) Man hat eine Wasserhaltungspumpe von 21″ Durchmesser, welche die zuströmenden Wasser nicht fördern kann; es soll daher eine zweite Pumpe hinzu gebaut werden, welche $^7/_{11}$ Mal so viel Wasser heben kann, wie die von 21″ Durchmesser; wie lang ist der Durchmesser der neuen Pumpe zu nehmen?

$^7/_{11} \times 10{,}5^2 \times 3{,}14$; $10{,}5^2 = 110{,}25 \times 3{,}14 = 346{,}185$

$^7/_{11} \times 346{,}185 = 220{,}281 \square''$ muß der Querschnitt der neueinzubauenden Pumpe sein.

$r = 3{,}14$) $220{,}281 \square'' = 70{,}15$

$r = \sqrt{70{,}15} = 8{,}37 \times 2 = 16{,}74''$ muß der Durchmesser sein.

9) In einem Schacht steht eine Pumpe von 23″ Durchmesser, in einem andern Schacht eine Pumpe von 14″ Durchmesser. Zu der letztern soll eine neue Pumpe hineingebaut werden, welche mit ihr eben so viel Wasser heben kann, wie die 23zöllige allein; wie groß muß der Durchmesser dieser neuen Pumpe genommen werden?

$$x = \sqrt{(23^2 - 14^2)} = \sqrt{333} = 18{,}248''.$$

IV. Ein pythagoräisches Dreieck zu verfertigen.

Rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten in einem rationalen Verhältnisse zu einander stehen, heißen pythagoräische Dreiecke. Die Auflösung dieser Aufgabe läuft also darauf hinaus, ein Paar Zahlen zu finden, deren Quadrate zusammen addirt wiederum ein Quadrat geben, welches eine rationale

Wurzel hat; denn ob ein Paar Linien in einem rationalen oder irrationalen Verhältnisse zu einander stehen, läßt sich nur aus der Beschaffenheit der Zahlen, durch die ihr Verhältniß ausgedrückt wird, erkennen.

Man nehme also irgend ein Paar ganze Zahlen, a und b, von denen a größer als b ist, und leite daraus zwei andere her, nämlich:

1. $a^2 - b^2$;

2. $2ab$, so haben diese die verlangte Eigenschaft. Zwei Linien also, die sich wie diese Zahlen verhalten, rechtwinklig zusammen gesetzt, geben nebst der Hypotenuse ein pythagoräisches Dreieck.

Beweis:

Es ist

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2)^2 &= a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \\ (2ab)^2 &= \quad\ \ + 4a^2b^2 \\ \hline (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4. \end{aligned}$$

Ziehen wir hieraus die Quadratwurzel, so muß diese eine rationale Zahl sein, welcher die Hypotenuse an Länge gleich zu setzen ist.

$\sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = a^2 + b^2$; die Hypotenuse ist also gleich $a^2 + b^2$.

$$\begin{array}{l} a^4 \\ \hline \quad 2a^2b^2 + b^4 \\ \quad 2a^2b^2 \\ \hline \qquad\qquad b^4 \\ \qquad\qquad b^4 \\ \hline \end{array}$$

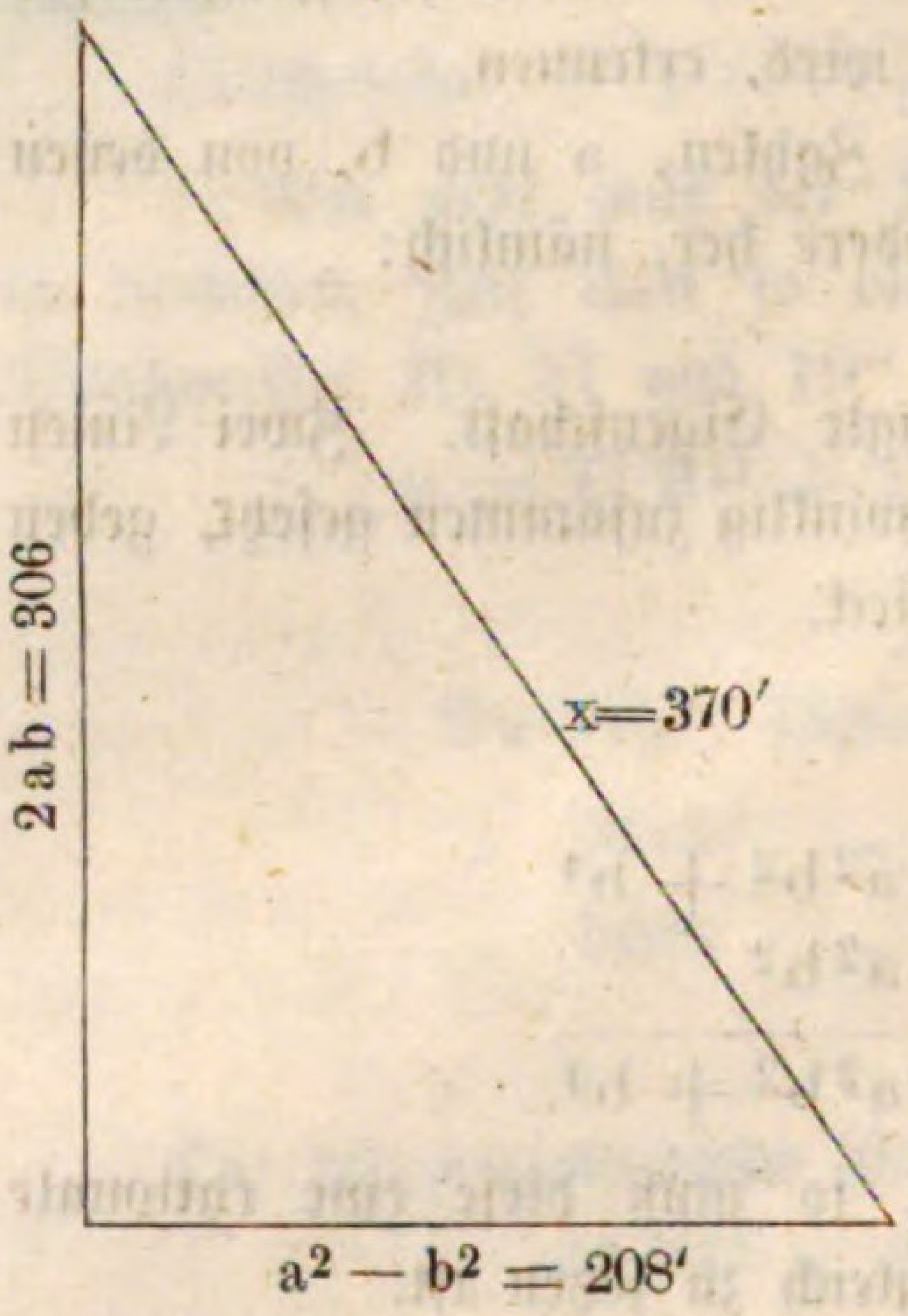
Man nehme z. B. für a und b die zwei kleinsten ganzen Zahlen 2 und 1, so wird

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 4 - 1 = 3 \\ 2ab &= 4 \\ a^2 + b^2 &= 5. \end{aligned}$$

Daß aber drei Seiten, die sich wie 3, 4 und 5 verhalten, ein rechtwinkliges Dreieck bilden, wußte schon Pythagoras. Der Unterschied zwischen dem einen Katheten und der Hypotenuse kann 1, 2, 3 u. s. w., jede ganze Zahl sein, und für jeden Unterschied kann man eine unendliche Reihe verschiedener pythagoräischer Dreiecke erhalten; mithin sind unendlich viele Reihen unendlich vieler pythagoräischer Dreiecke möglich.

Für jeden bestimmten Unterschied läßt sich aber eine allgemeine Formel für jede Seite geben, die man leicht aus folgenden, ganz allgemeinen Ausdrücken erhält; man setze nämlich den einen Kathetus = a und den Unterschied zwischen dem andern und der Hypotenuse = d, so ist der andere $= \frac{a^2 - d^2}{2d}$ und die Hypotenuse $= \frac{a^2 + d^2}{2d}$.

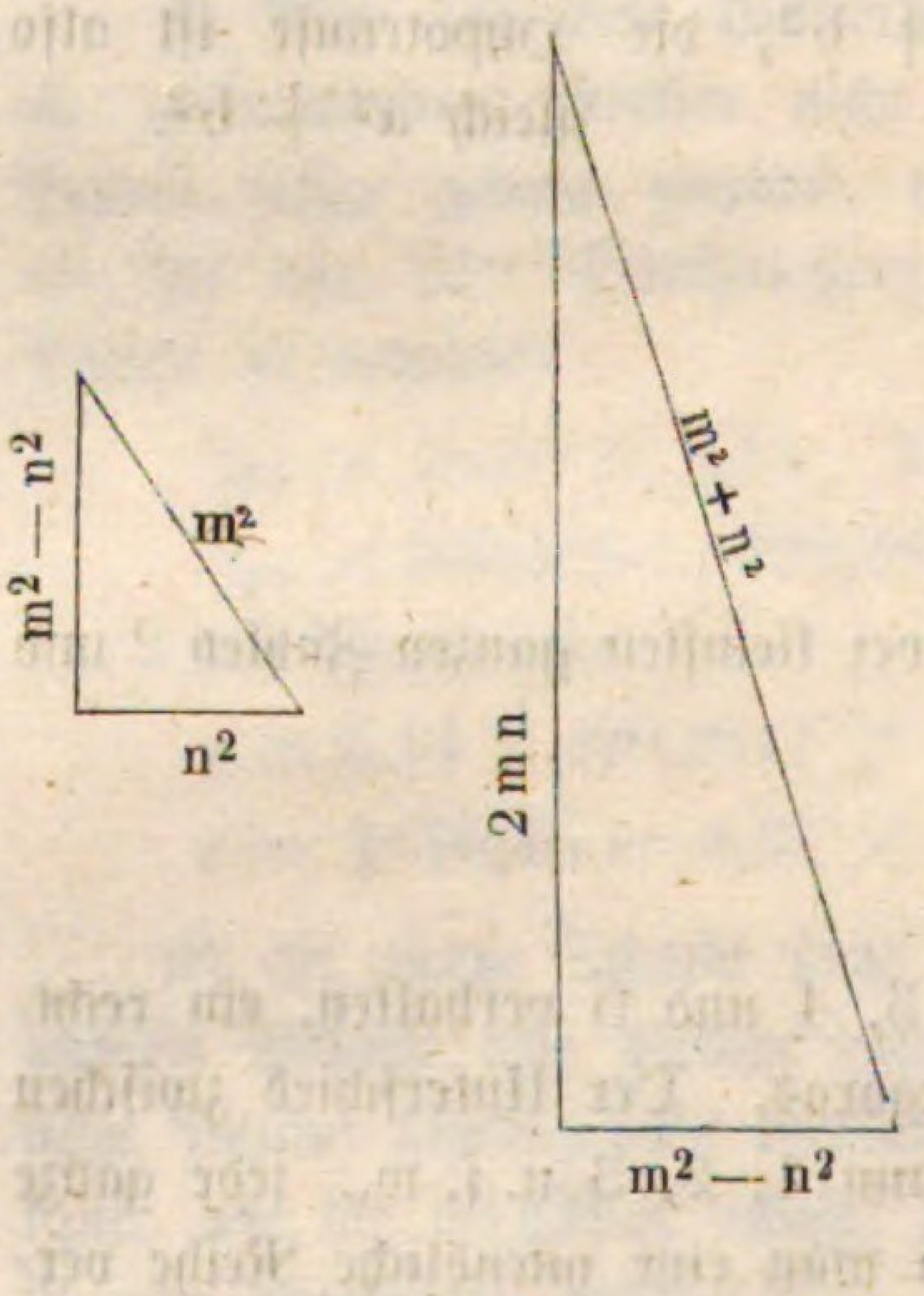
Aufgaben:



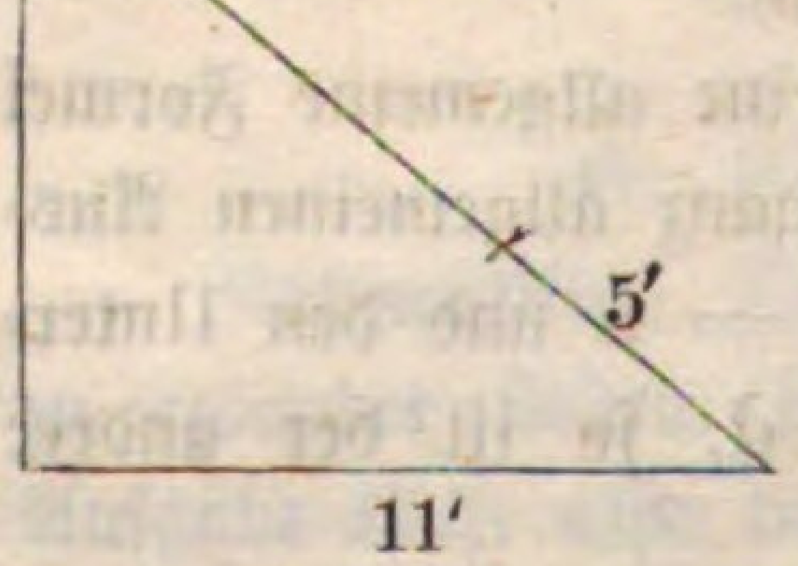
1) Construire zu den Zahlen $17' = a$ und $9' = b$ ein pythagoräisches Dreieck und beweise die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!

Rechnung:

$$(208^2 + 306^2) = 136900 = 370^2.$$



2) Construire zu den beiden Zahlen m und n, von denen m größer ist als n, ein pythagoräisches Dreieck!



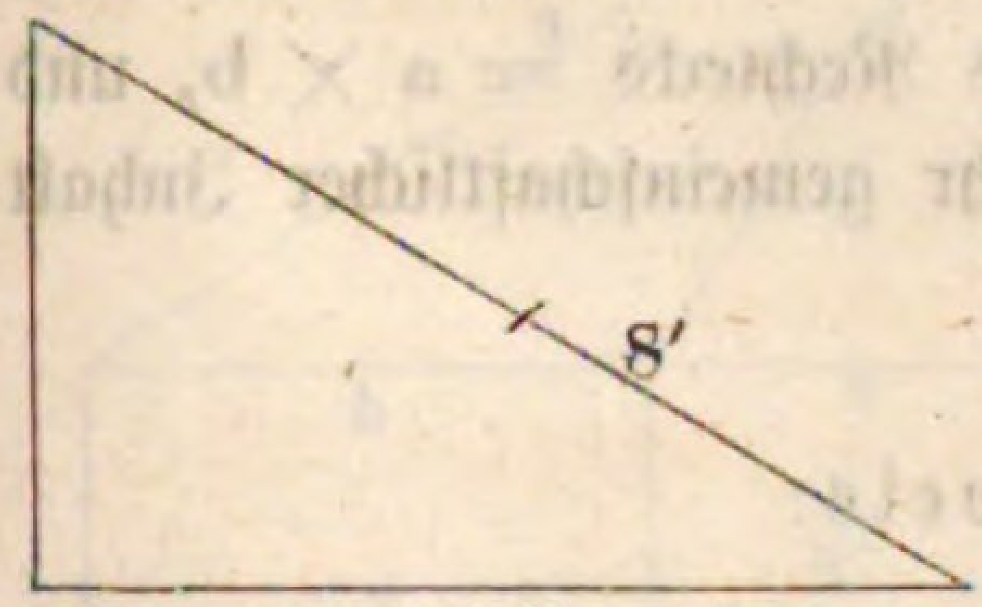
3) Der eine Kathetus ist 11′ lang, und der Unterschied zwischen dem andern und der Hypotenuse ist 5′; wie lang ist der zweite Kathetus und wie lang ist die Hypotenuse?

Der Kathetus $= \frac{11^2 - 5^2}{2 \times 5} = 9{,}6'.$

Die Hypotenuse $= \frac{11^2 + 5^2}{2 \times 5} = 14{,}6'.$

Beweis:

$$11^2 + (9,6)^2 = 121 + 92,16 = 213,16$$
$$(14,6)^2 = 213,16.$$



4) Der eine Kathetus eines rechtwinkligen Dreiecks ist 14′ lang, der Unterschied zwischen dem andern Kathetus und der Hypotenuse ist $= 8'$; construire hieraus ein pythagoräisches Dreieck!

Kathetus $x = \frac{14^2 - 8^2}{2 \times 8} = 8,25'$

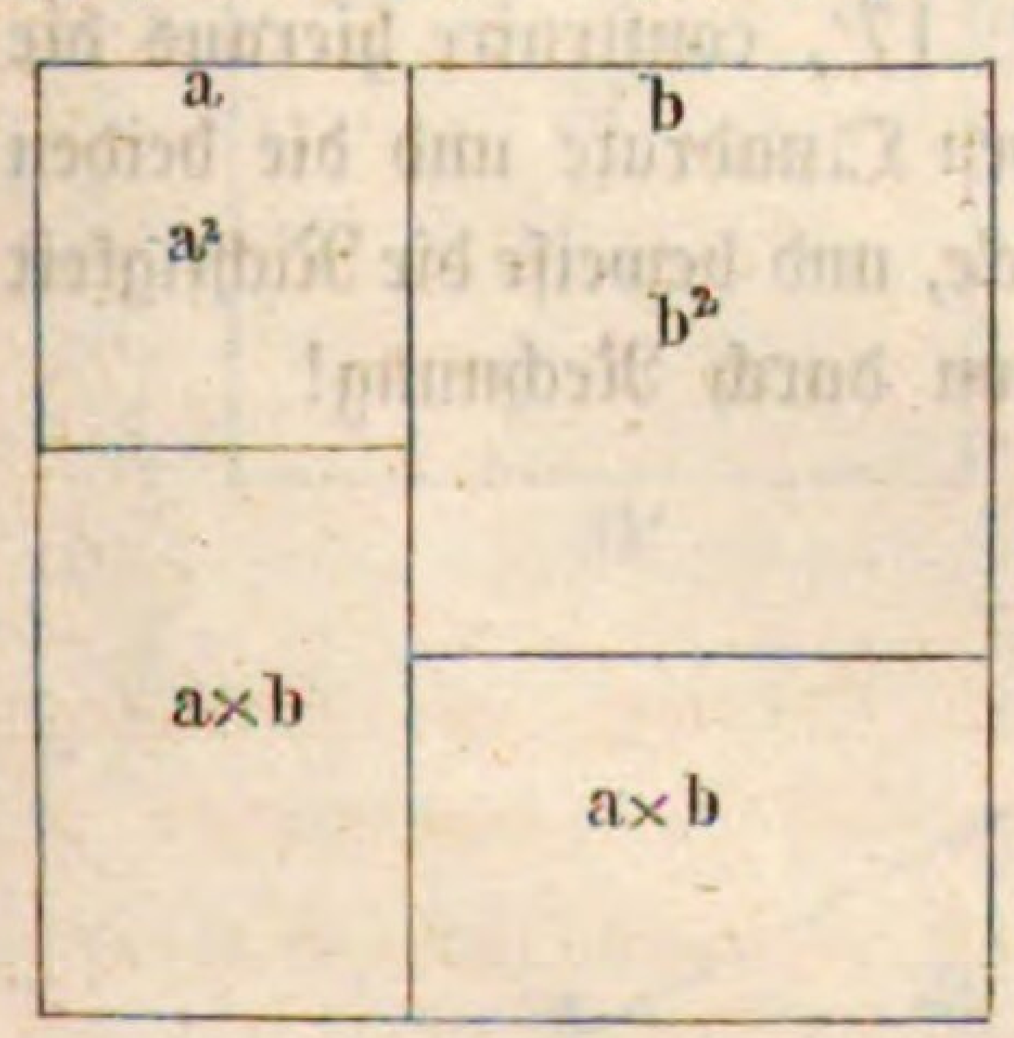
Hypotenuse $y = \frac{14^2 + 8^2}{2 \times 8} = 16,25'$;

$$(16,25)^2 = (14^2 + (8,25)^2)$$
$$\sqrt{(14^2 + 8,25^2)} = \sqrt{264,0625} = 16,25'.$$

§. 8.

Der erweiterte pythagoräische Lehrsatz.

Von allen planimetrischen Lehrsätzen hat sich der pythagoräische als besonders wichtig herausgestellt; dieser gilt aber nur für das rechtwinklige Dreieck, und also mußte über kurz oder lang die Frage entstehen: ob sich der pythagoräische Lehrsatz nicht auch auf das stumpf- und spitzwinklige Dreieck anwenden lasse. Direct und ohne jede Veränderung ist dieses nicht möglich; es können aber dem ursprünglichen pythagoräischen Lehrsatz solche Zusätze gegeben werden, daß er sich auf das stumpf- und spitzwinklige Dreieck anwenden läßt, und hat er diese Zusätze erhalten, so wird er der erweiterte pythagoräische Lehrsatz genannt. Um diese Zusätze zu finden, gehen wir von folgendem Satze aus: Wenn man die Seite eines Quadrats in zwei beliebige Theile theilt, und aus diesen Theilen Quadrate construirt, so sind die beiden erhaltenen Quadrate nicht gleich dem ursprünglichen Quadrat; sondern nur dann erst, wenn ihre Summe vermehrt wird um das doppelte Rechteck, dessen eine Seite gleich ist der Seite des größern Quadrats und dessen andere Seite = der Seite des kleinern Quadrats ist.



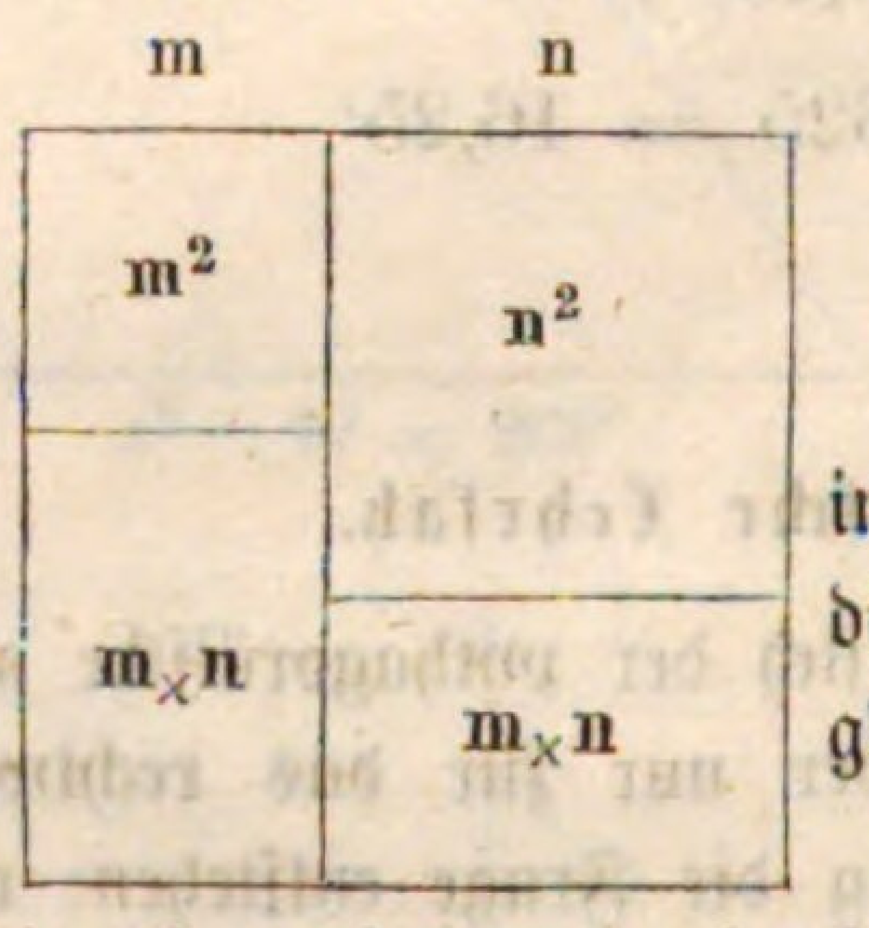
1. Geometrischer Beweis:

Es sei die Seite des vorgezeichneten Quadrats in die beiden ungleichen Theile a und b getheilt; construiren wir nun aus den beiden Theilen a und

b zwei Quadrate, so erhalten wir $a^2 + b^2$; nach der Construction bleiben aber dann noch zwei Rechtecke übrig, welche beide dieselben Eigenschaften haben. Jedes der beiden Rechtecke ist nämlich gebildet aus einer Seite des größern Quadrats b und aus einer Seite des kleinern Quadrats a, d. h. die beiden Seiten des Rechtecks sind immer gleich den beiden Seiten der beiden Quadrate; also ist der Flächeninhalt des Rechtecks $= a \times b$, und da zwei solcher Rechtecke vorhanden sind, so ist ihr gemeinschaftlicher Inhalt $= 2ab$.

2. Arithmetischer Beweis:

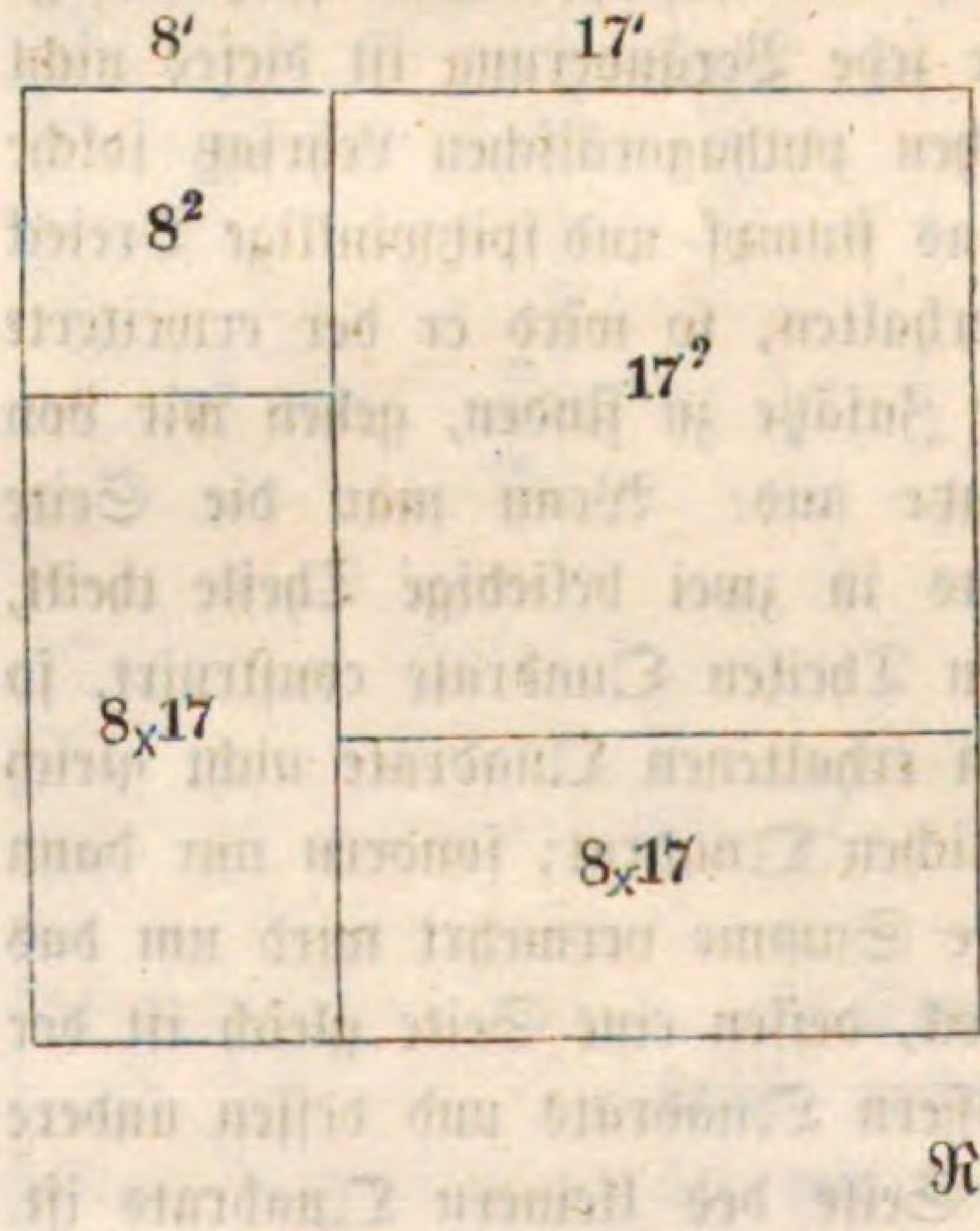
Die Seite des ursprünglichen Quadrats ist $= a + b$, der Flächeninhalt desselben ist also $(a + b)^2$, das ist $a^2 + 2ab + b^2$.



$$(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$$

Aufgaben:

1) Theile die Seite eines beliebigen Quadrats in zwei Stücke $= m + n$, construire hieraus die beiden ungleichen Quadrate und die beiden gleichen Rechtecke!



2) Construire ein Quadrat von 25′ Seitenlänge, theile die Seite in dem Verhältniß von 8′: 17′, construire hieraus die beiden ungleichen Quadrate und die beiden gleichen Rechtecke, und beweise die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!

Rechnung:

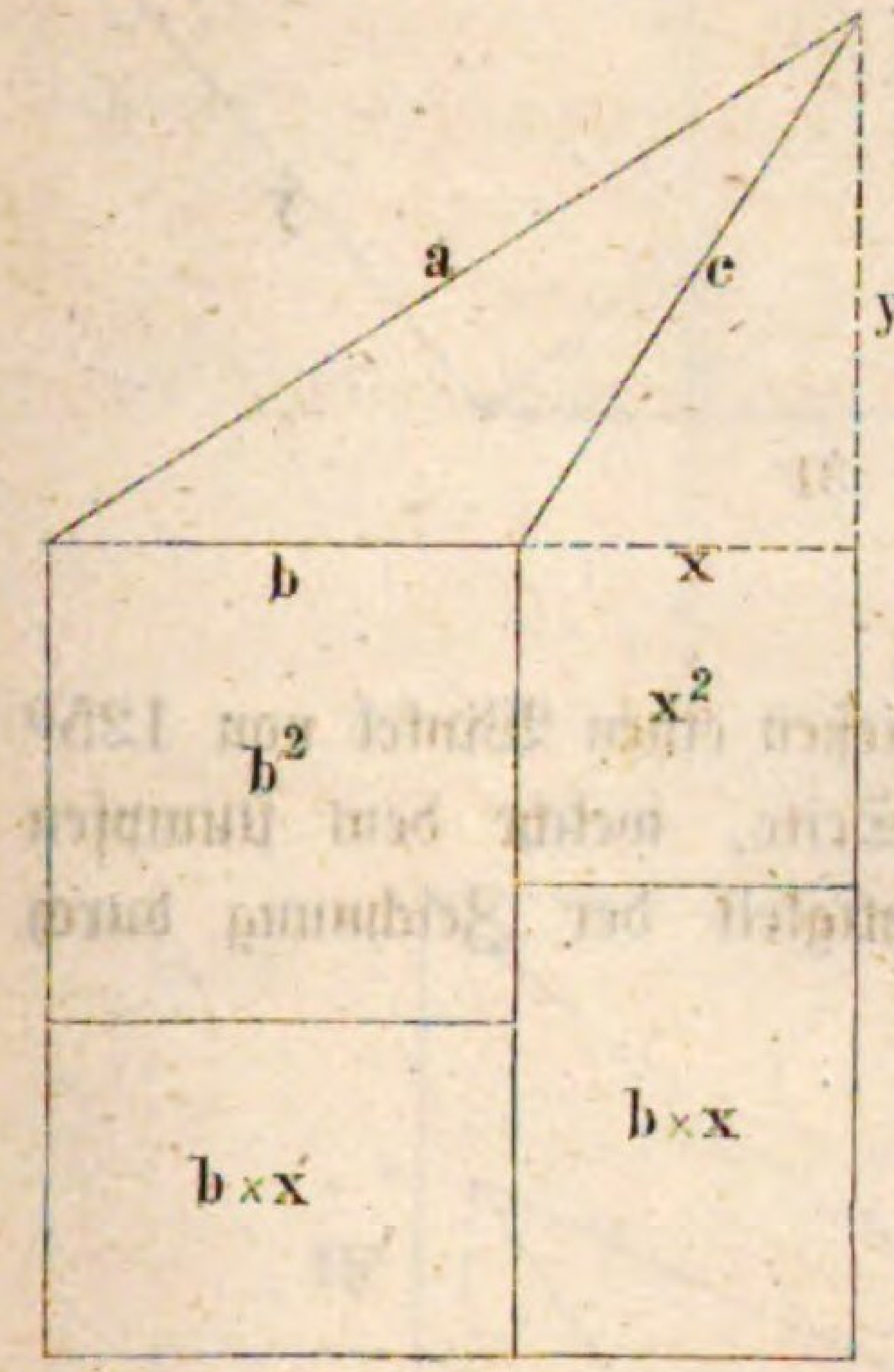
$8^2 = 64$ □ fuß

$17^2 = 289$ "

$2 \times 8' \times 17' = 272$ "

625 □ fuß $= 25^2 = (8 + 17)^2$.

Wenden wir nun diesen Satz zuerst auf das stumpfwinklige Dreieck an, so erhalten wir:

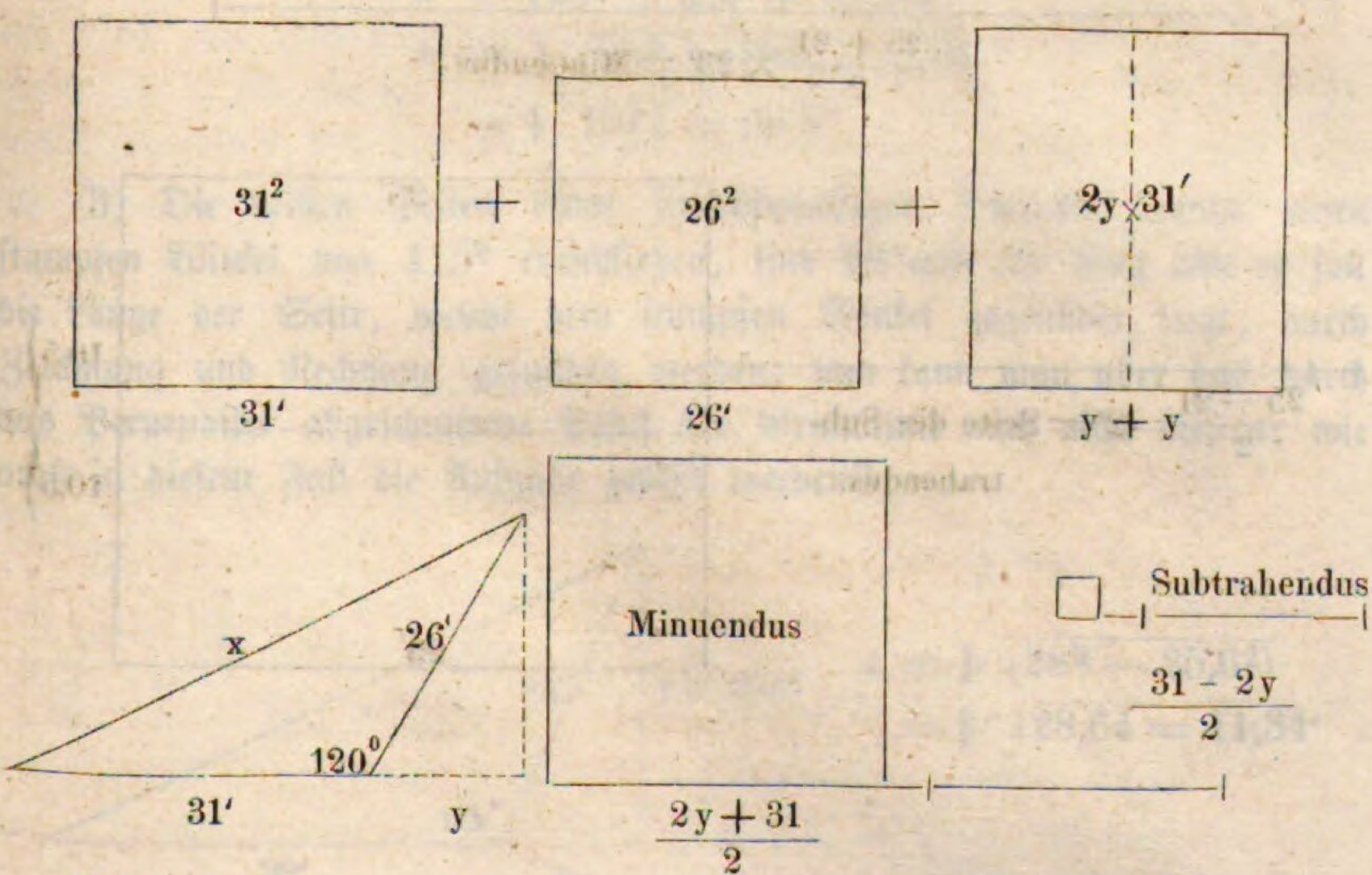


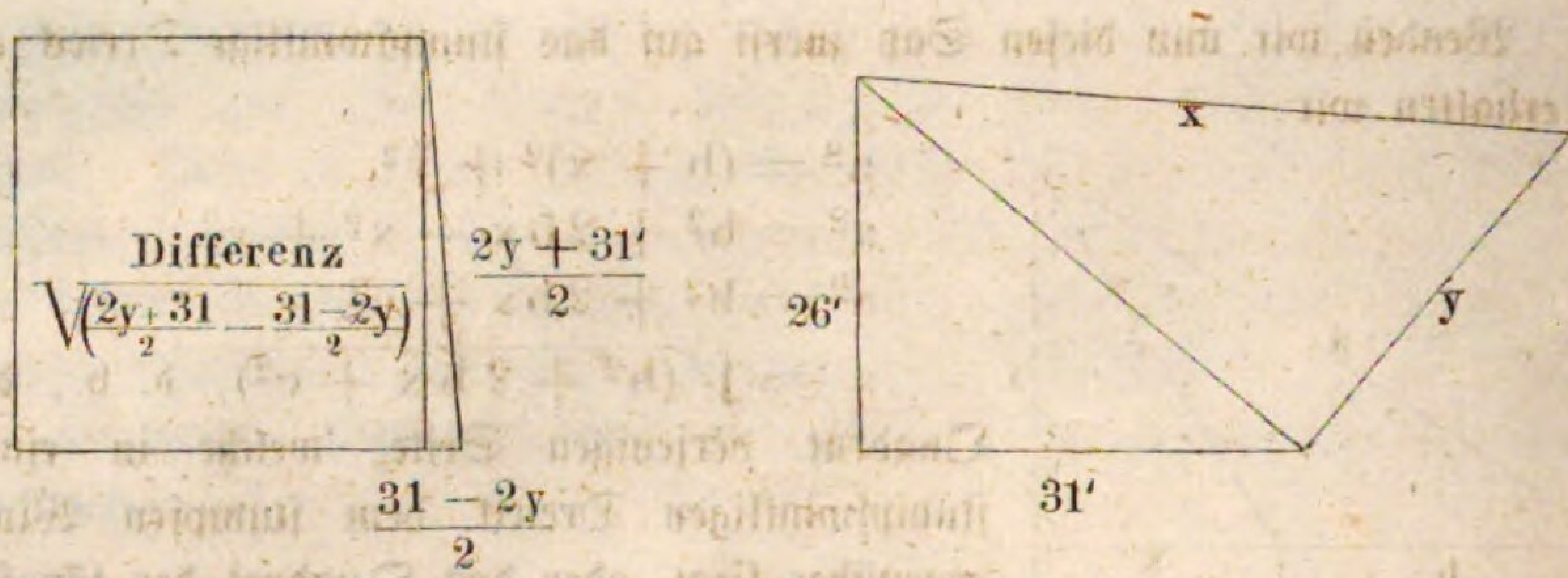
$$a^2 = (b + x)^2 + y^2$$
$$a^2 = b^2 + 2bx + x^2 + y^2$$
$$a^2 = b^2 + 2bx + c^2$$

$a = \sqrt{(b^2 + 2bx + c^2)}$, d. h., das Quadrat derjenigen Seite, welche in einem stumpfwinkligen Dreieck dem stumpfen Winkel gegenüber liegt, oder das Quadrat der längsten Seite in einem stumpfwinkligen Dreieck ist = dem Quadrat der beiden andern Seiten, welche den stumpfen Winkel einschließen, vermehrt um das doppelte Rechteck, welches gebildet ist aus der einen Seite des Dreiecks (b) und aus dem durch ein Perpendikel (y) von der verlängerten Grundlinie (b) abgeschnittenen Stück (x) derselben. Hieraus folgt nun von selbst, daß a = ist $\sqrt{(b^2 + 2bx + c^2)}$ und $b = \sqrt{a^2 - (2bx + c^2)}$ und $c = \sqrt{a^2 - (2bx + b^2)}$.

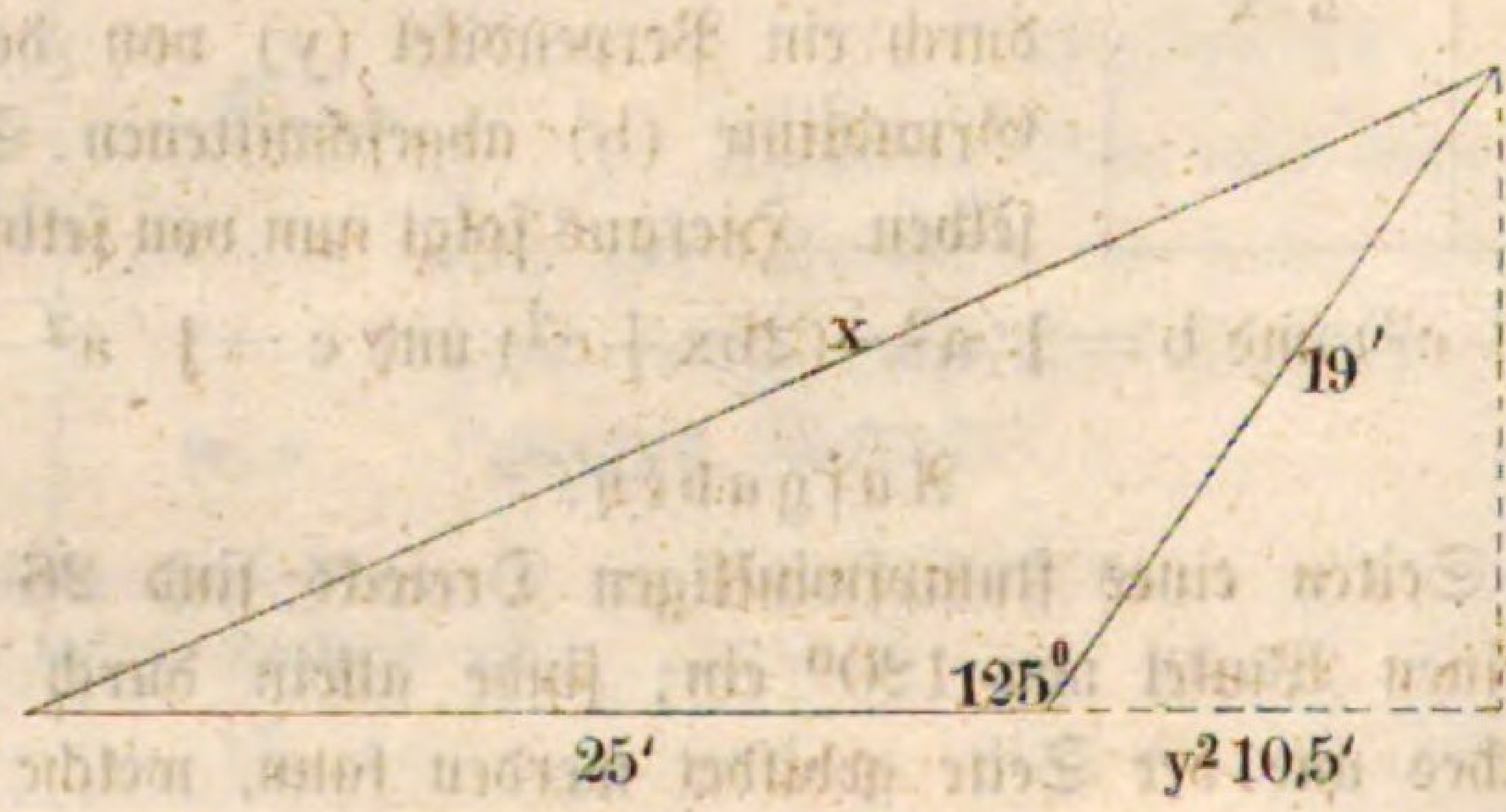
Aufgaben:

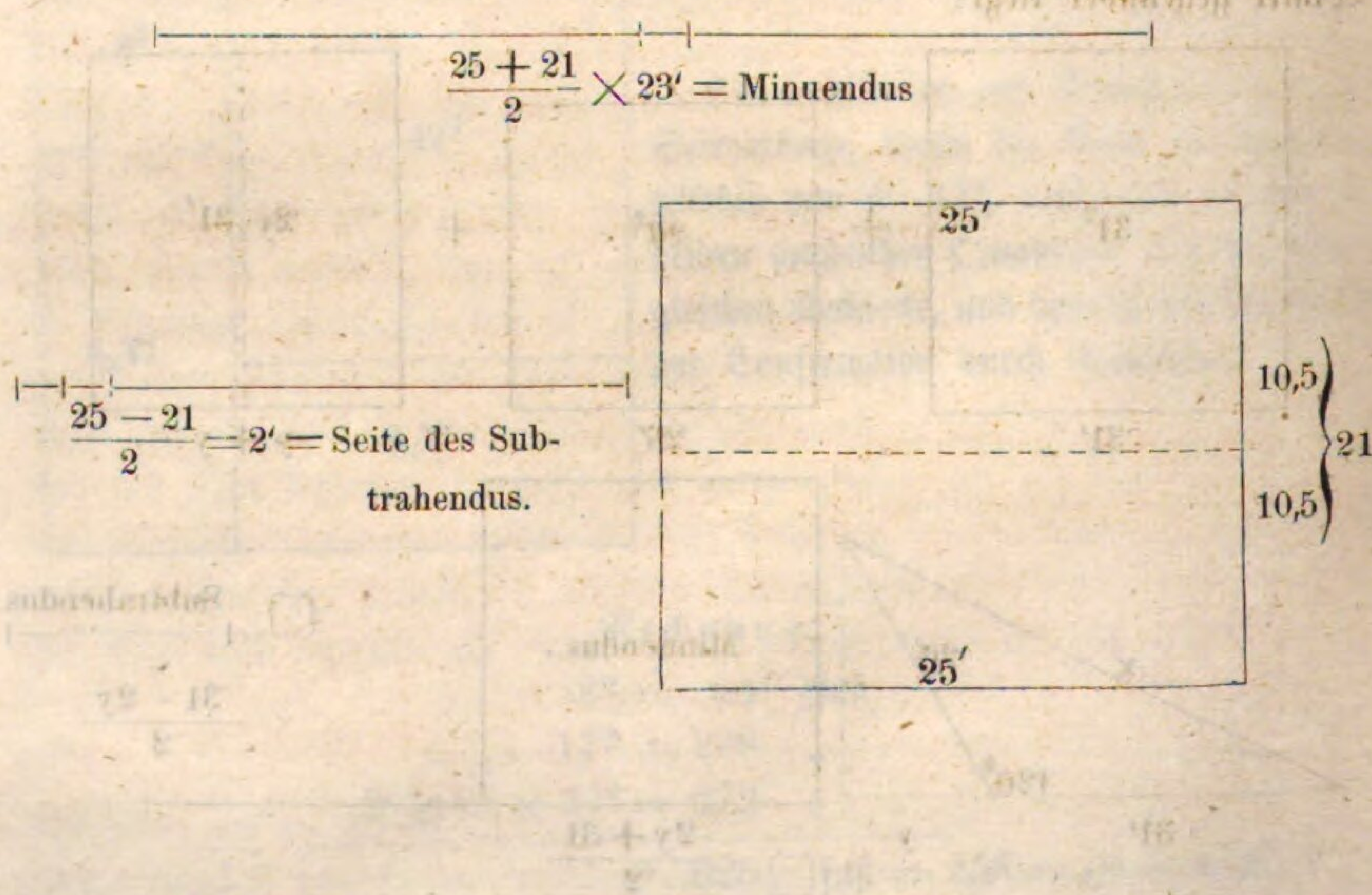
1) Zwei Seiten eines stumpfwinkligen Dreiecks sind 26 und 31′ lang und schließen einen Winkel von 120⁰ ein; finde allein durch Zeichnung das Quadrat, welches aus der Seite gebildet werden kann, welche dem stumpfen Winkel gegenüber liegt!

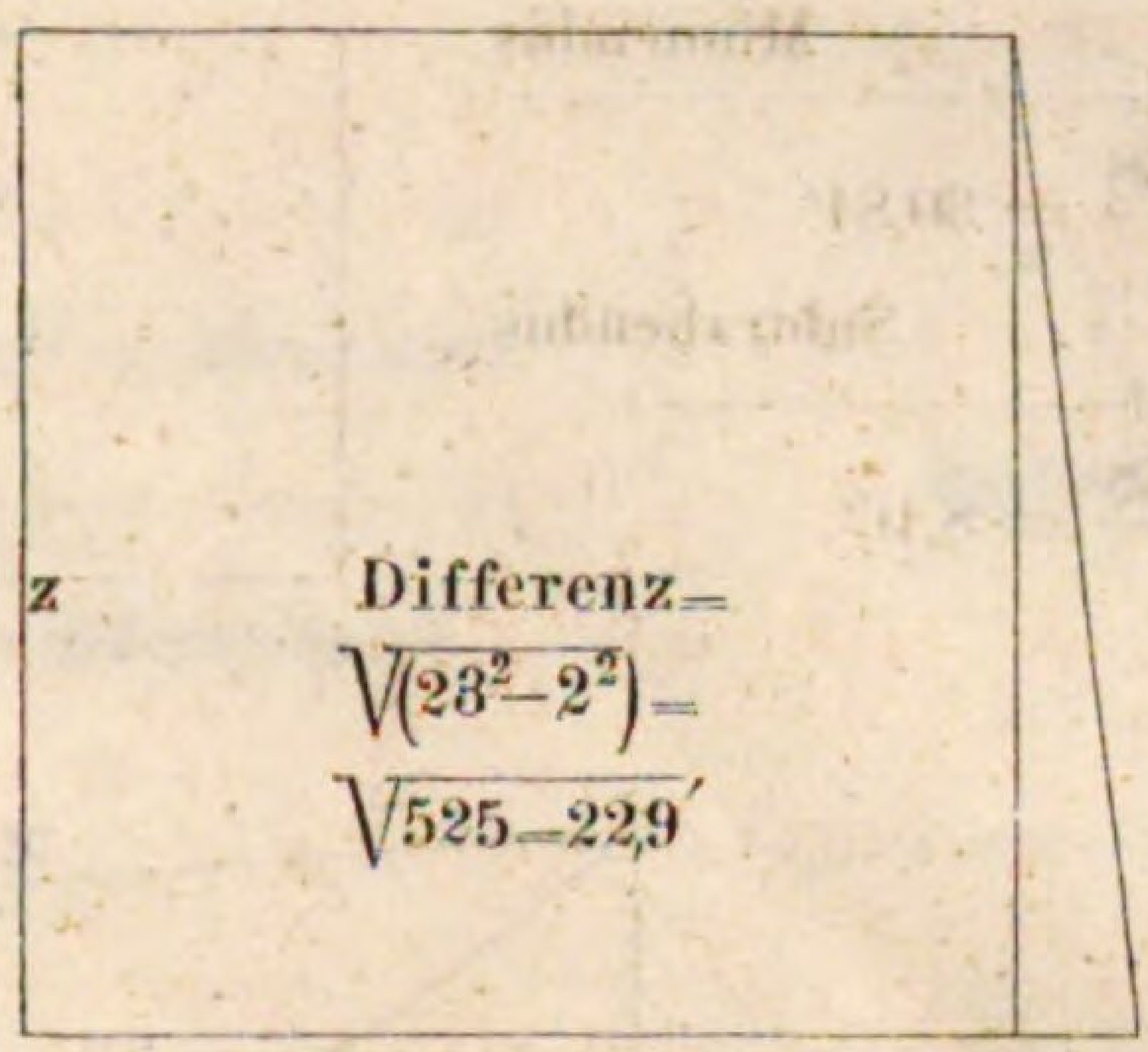


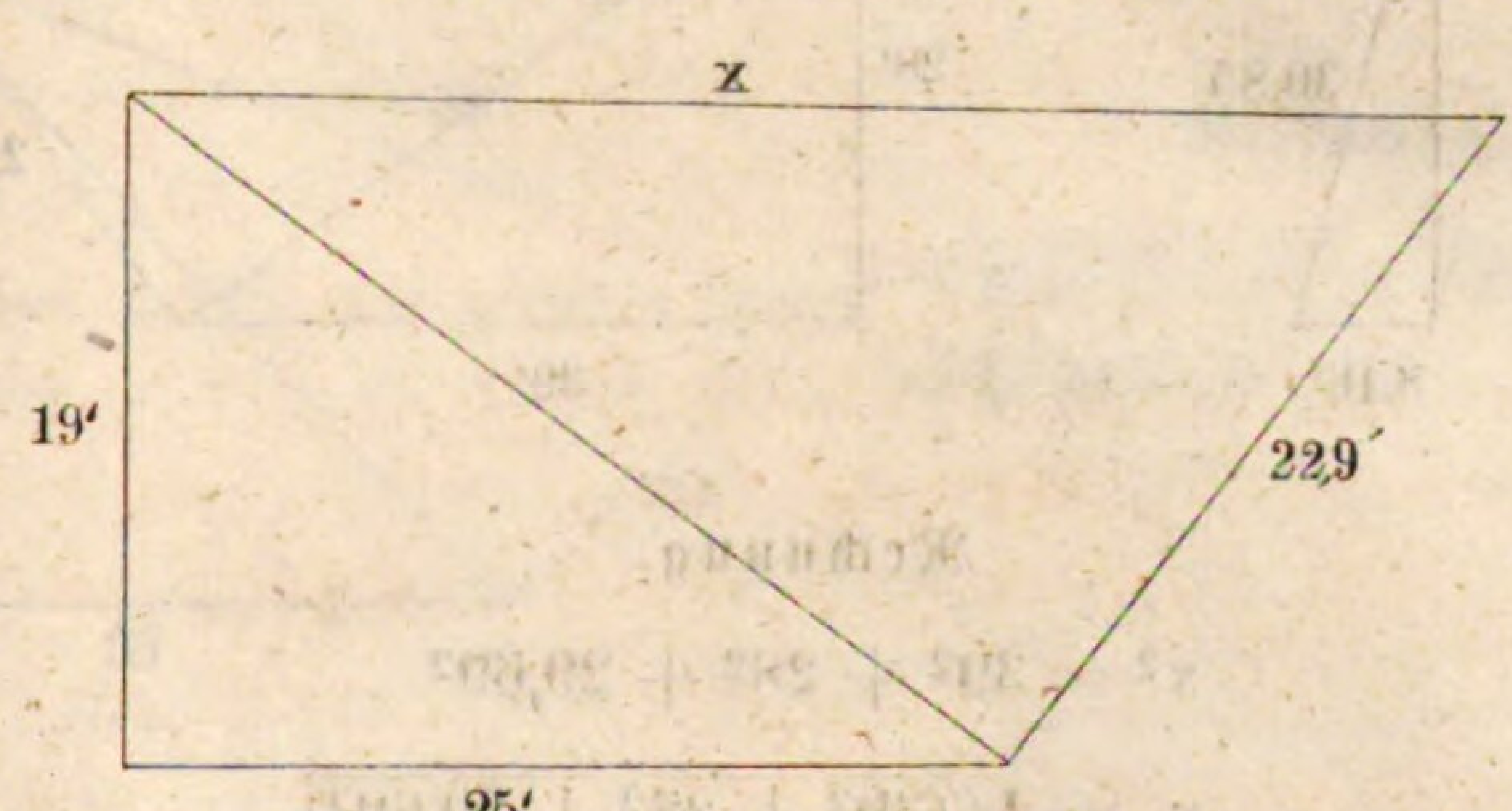


2) Zwei Seiten von 19 und 25′ lang schließen einen Winkel von 125⁰ ein; finde durch Construction die Länge der Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüber liegt, und beweise die Richtigkeit der Zeichnung durch Rechnung!





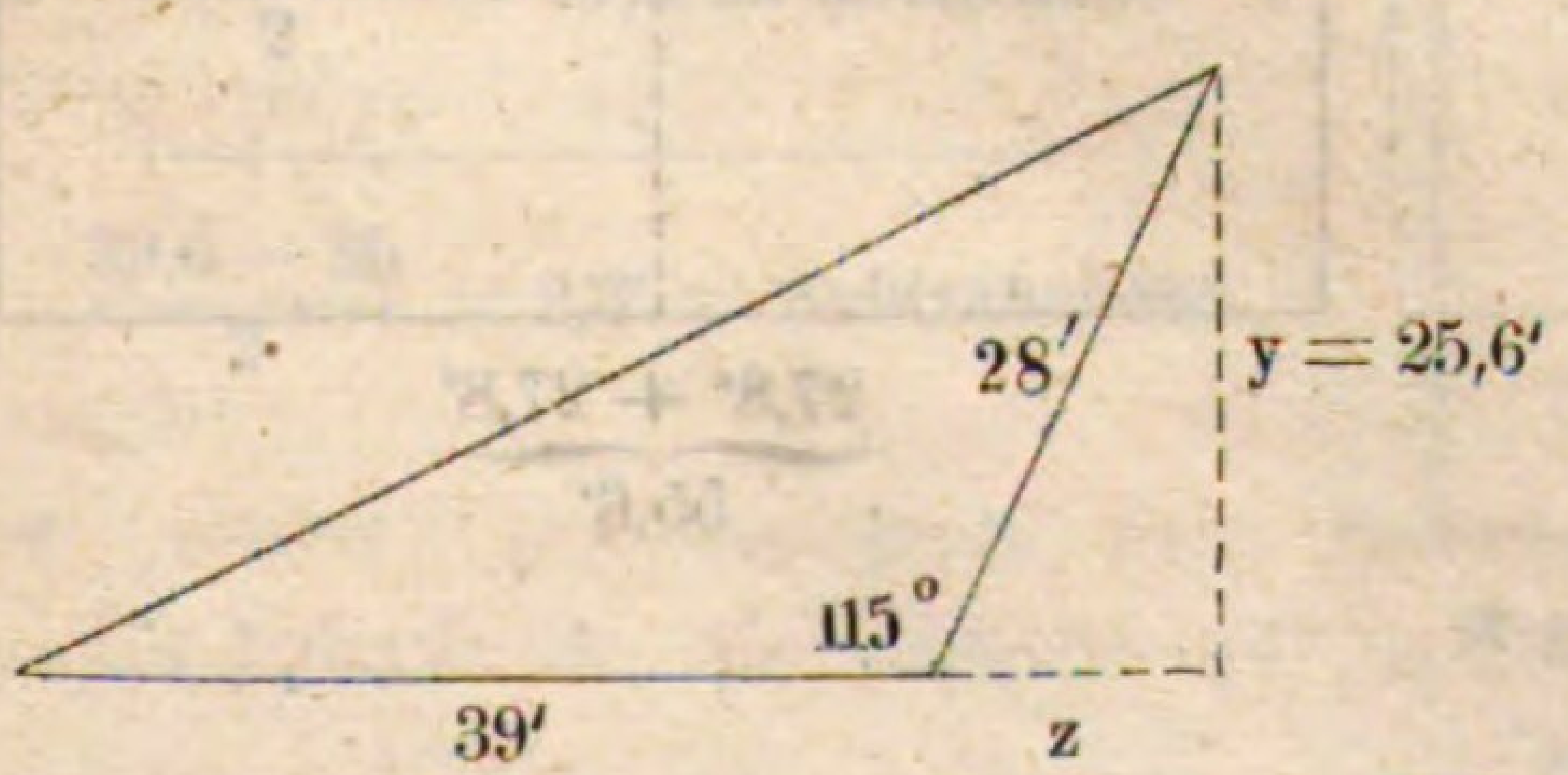




Rechnung:

$$x^2 = (25^2 + 19^2 + 22{,}9^2)$$
$$x = \sqrt{(25^2 + 19^2 + 22{,}9^2)}$$
$$= \sqrt{1511} = 38{,}8'$$

3) Die beiden Seiten eines stumpfwinkligen Dreiecks, welche einen stumpfen Winkel von 115⁰ einschließen, sind 28 und 39′ lang und es soll die Länge der Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüber liegt, durch Zeichnung und Rechnung gefunden werden; nun kann man aber das durch das Perpendikel abgeschnittene Stück der Grundlinie auch nicht messen; wie muß in diesem Fall die Aufgabe gelös't werden?



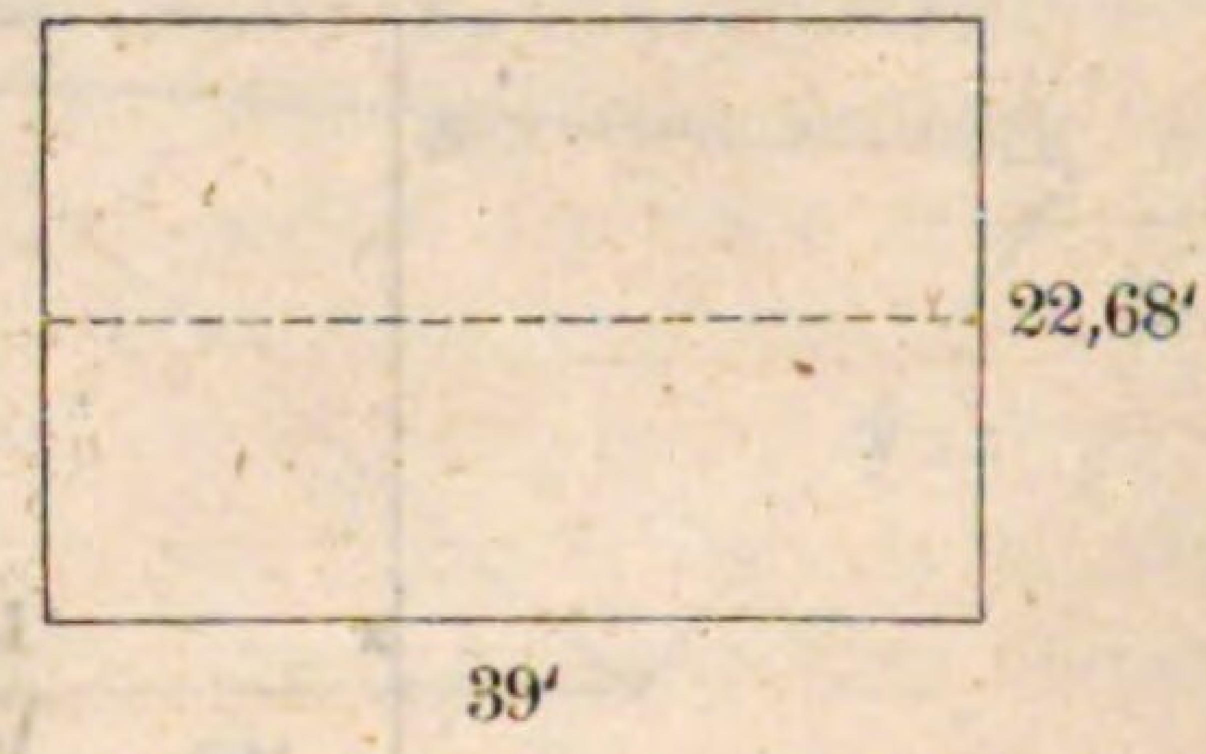
$$z = \sqrt{(28^2 - 25{,}6^2)}$$
$$= \sqrt{128{,}64} = 11{,}34'$$

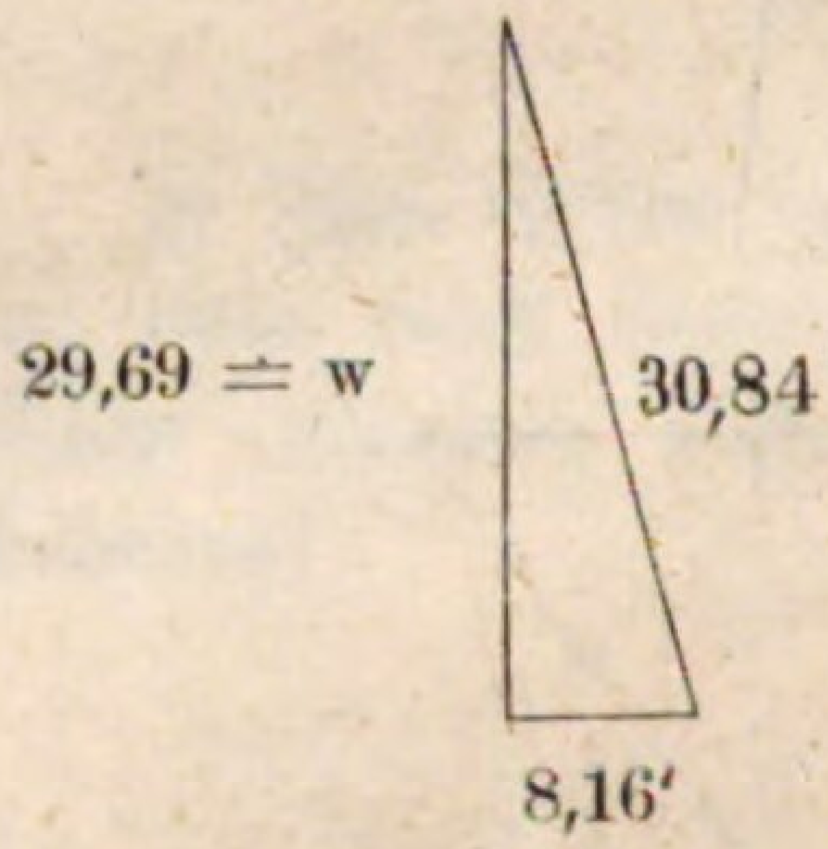
Minuendus

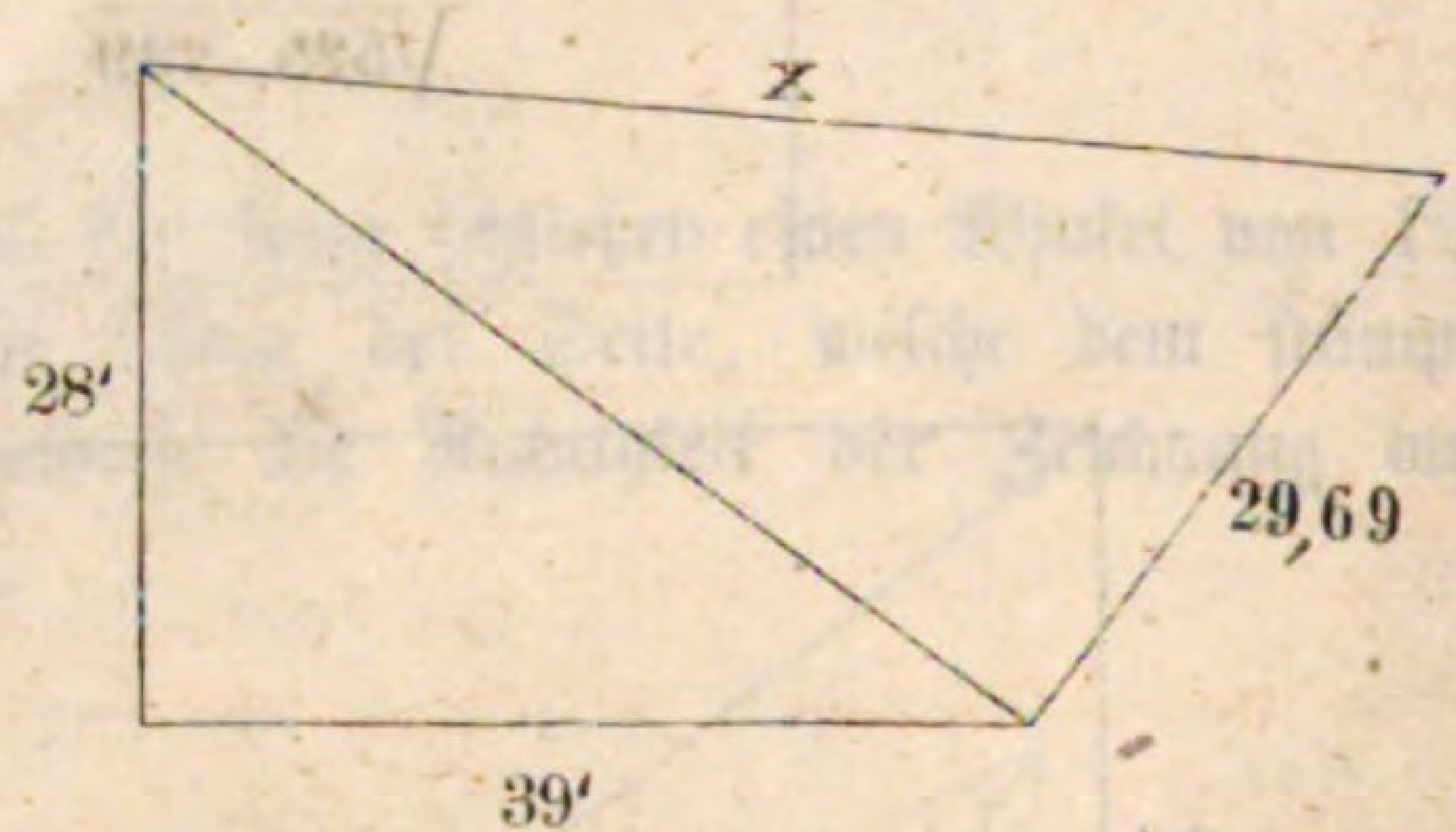
$$\frac{39 + 22{,}68}{2} = 30{,}84'$$

Subtrahendus

$$\frac{39 - 22{,}68}{2} = 8{,}16'$$







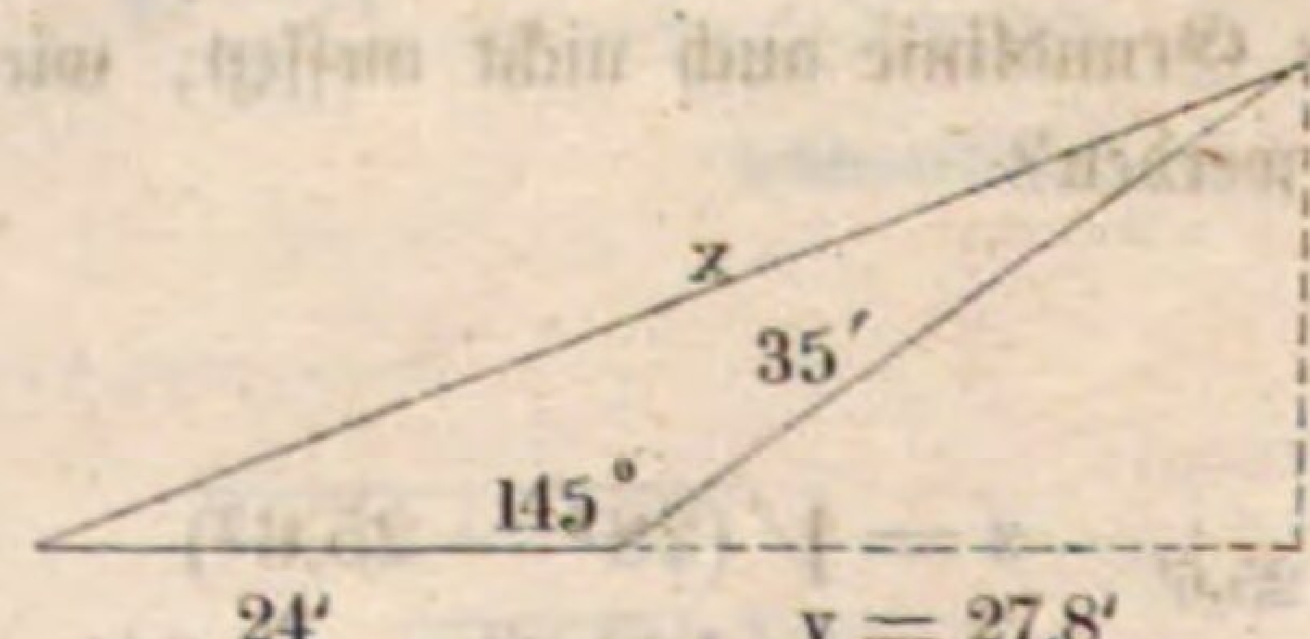
Rechnung:

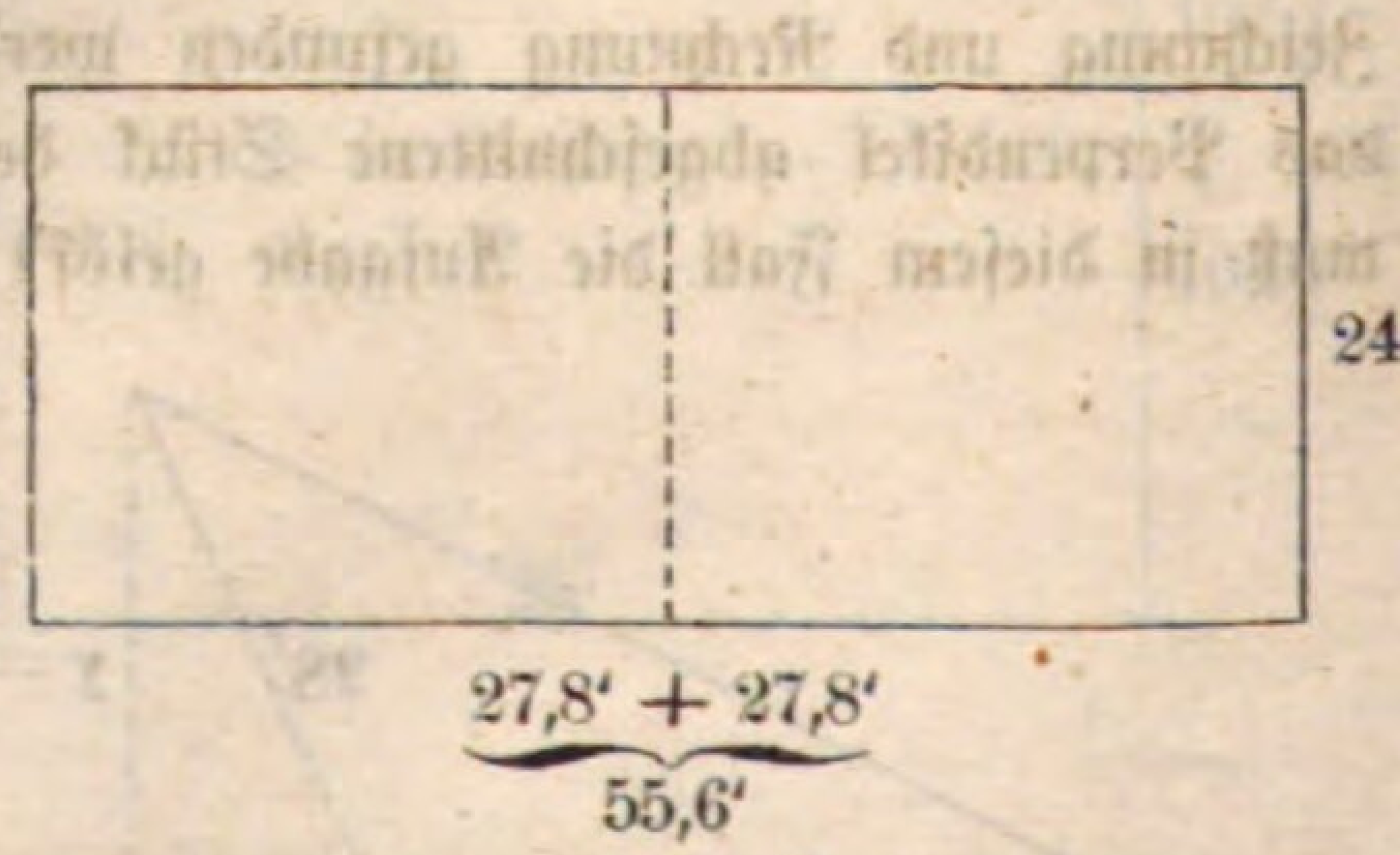
$$x^2 = 39^2 + 28^2 + 29{,}69^2$$

$$x = \sqrt{(39^2 + 28^2 + 29{,}69^2)}$$

$$x = \sqrt{3186{,}9961} = 56{,}45'$$

4) Die beiden Seiten, welche einen stumpfen Winkel von 145° einschließen, sind 24 und 35′ lang. Man finde die gesuchte Seite x, welche dem stumpfen Winkel gegenüber liegt, durch Zeichnung und Rechnung, indem man einmal die Linie von 24′ und ein andermal die Linie von 35′ zur Grundlinie des Dreiecks nimmt!



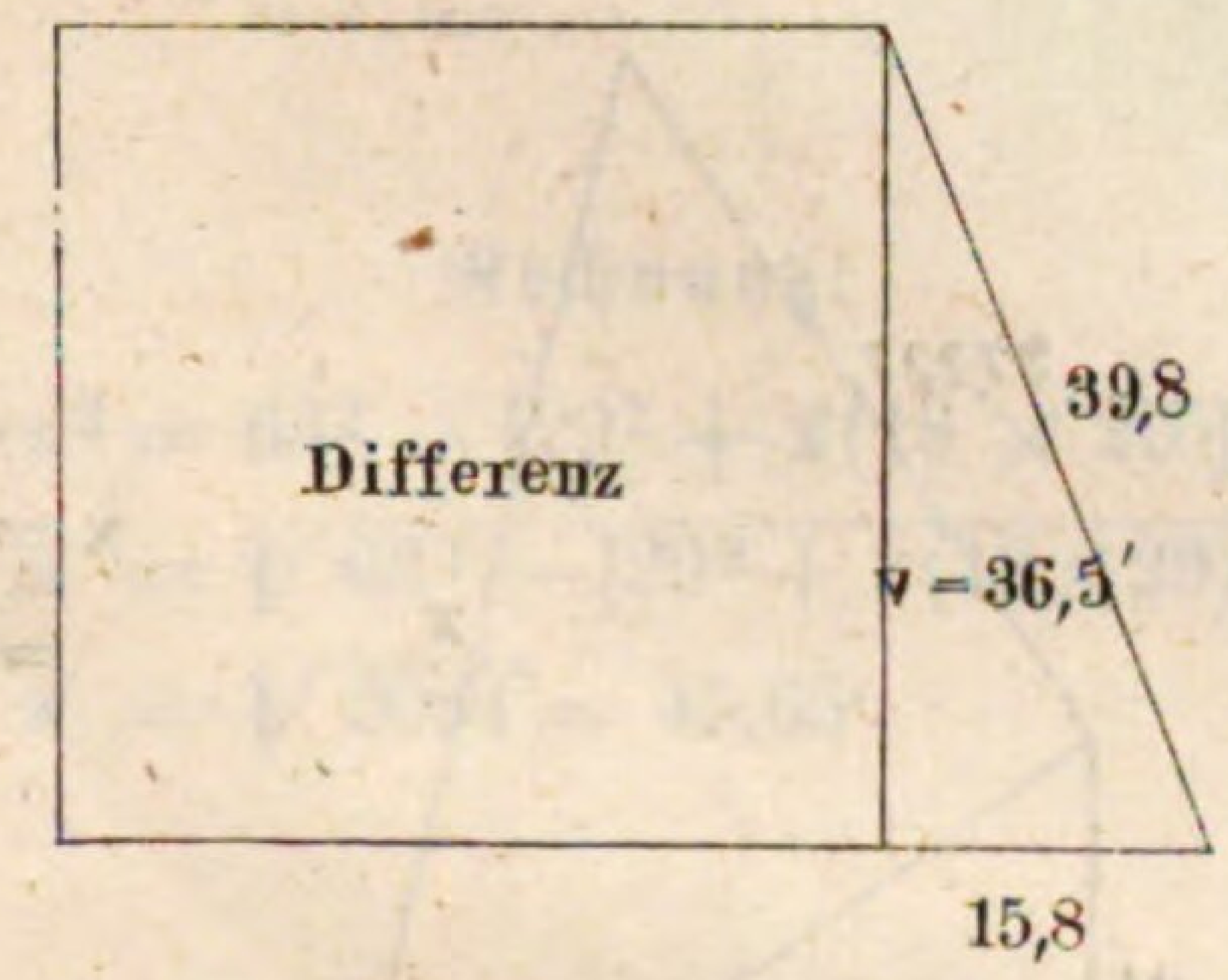


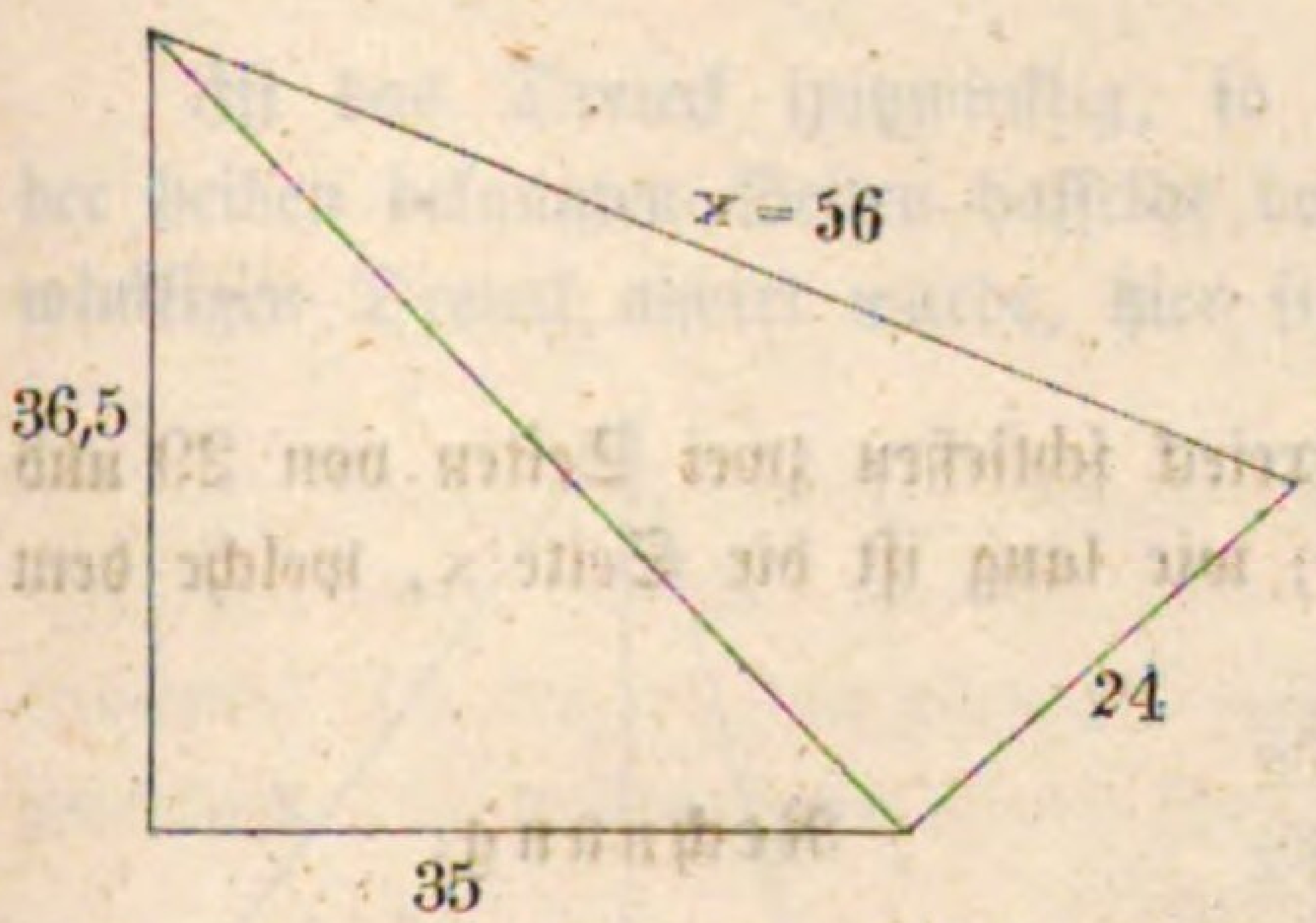


$$\frac{55{,}6 + 24}{2} = 39{,}8' = \text{Minuendus}$$



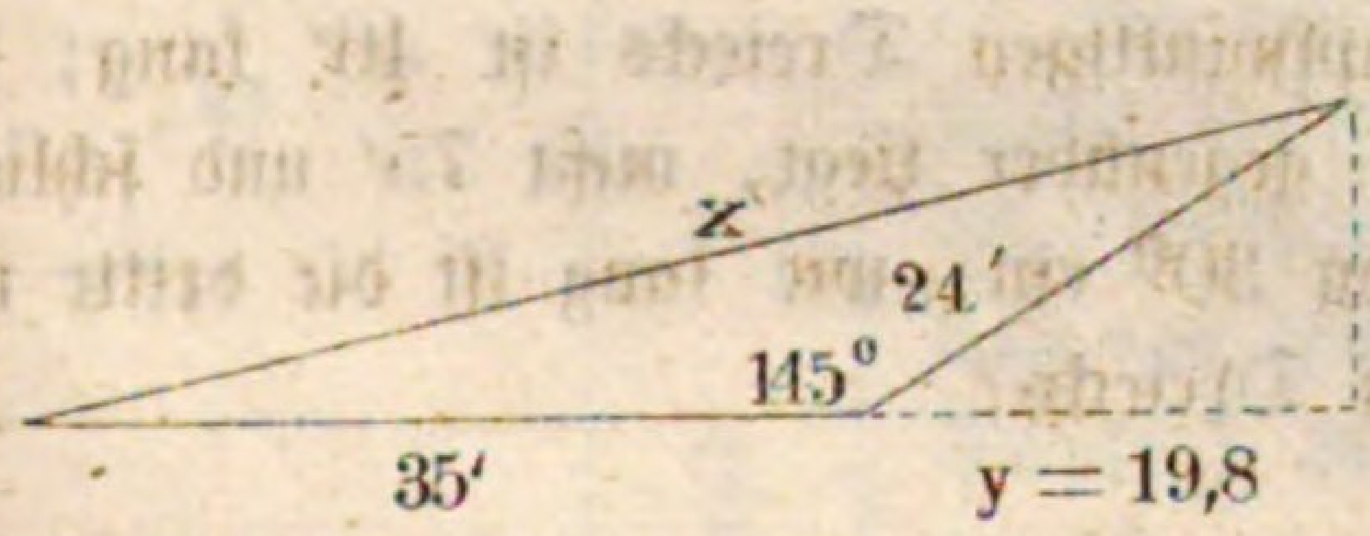
$$\frac{55{,}6 - 24}{2} = 15{,}8' = \text{Subtrahendus}$$

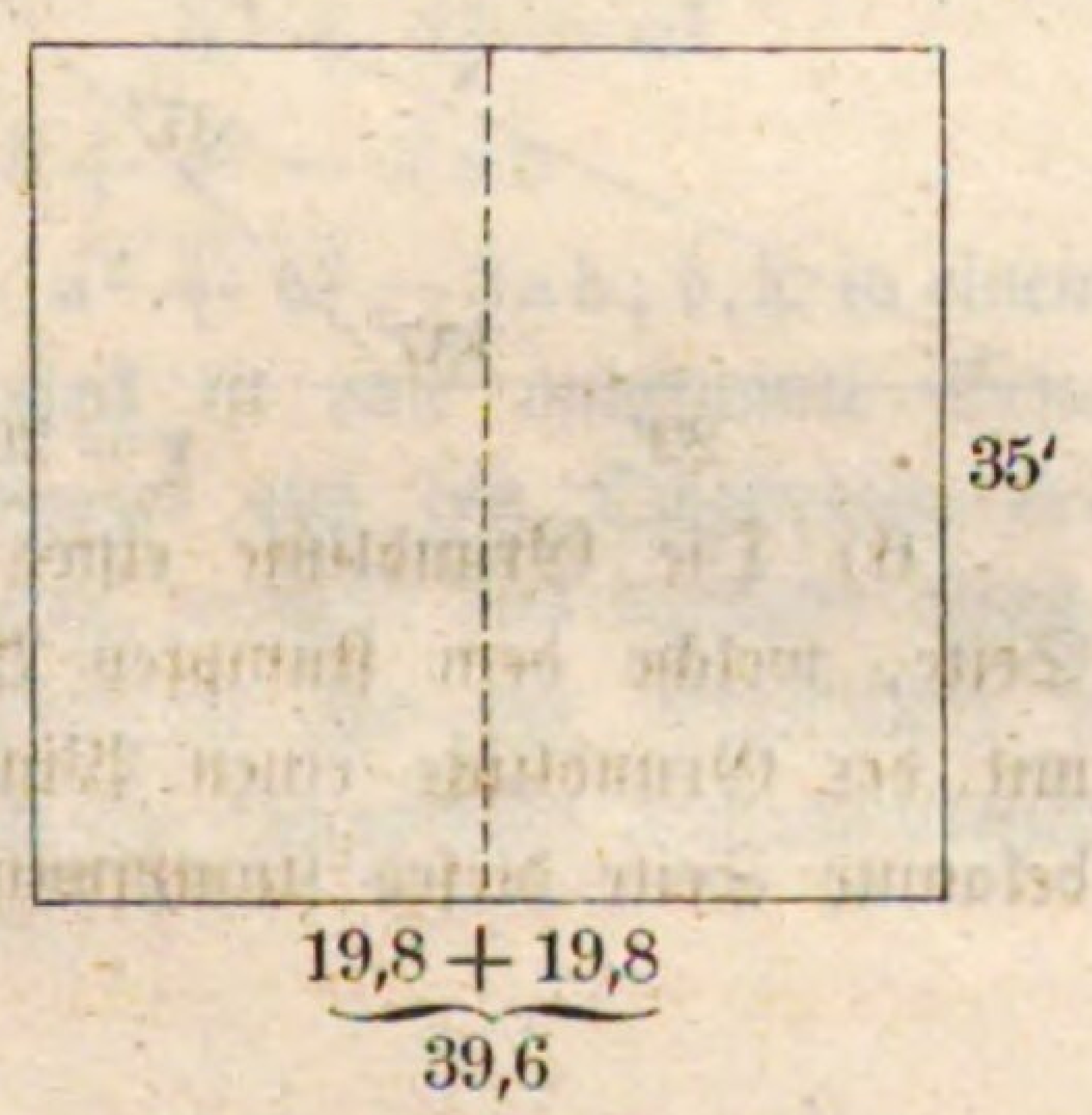


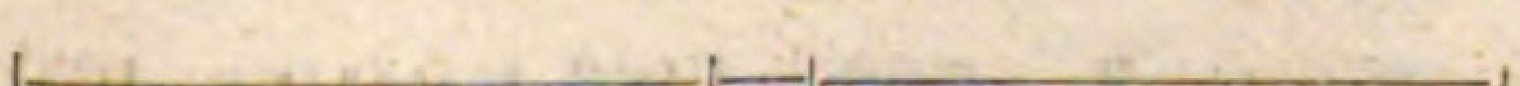


Rechnung:

$$x = \sqrt{[24^2 + 35^2 + 2(27{,}8 \times 24)]}$$
$$= \sqrt{3135{,}4} = 56'$$



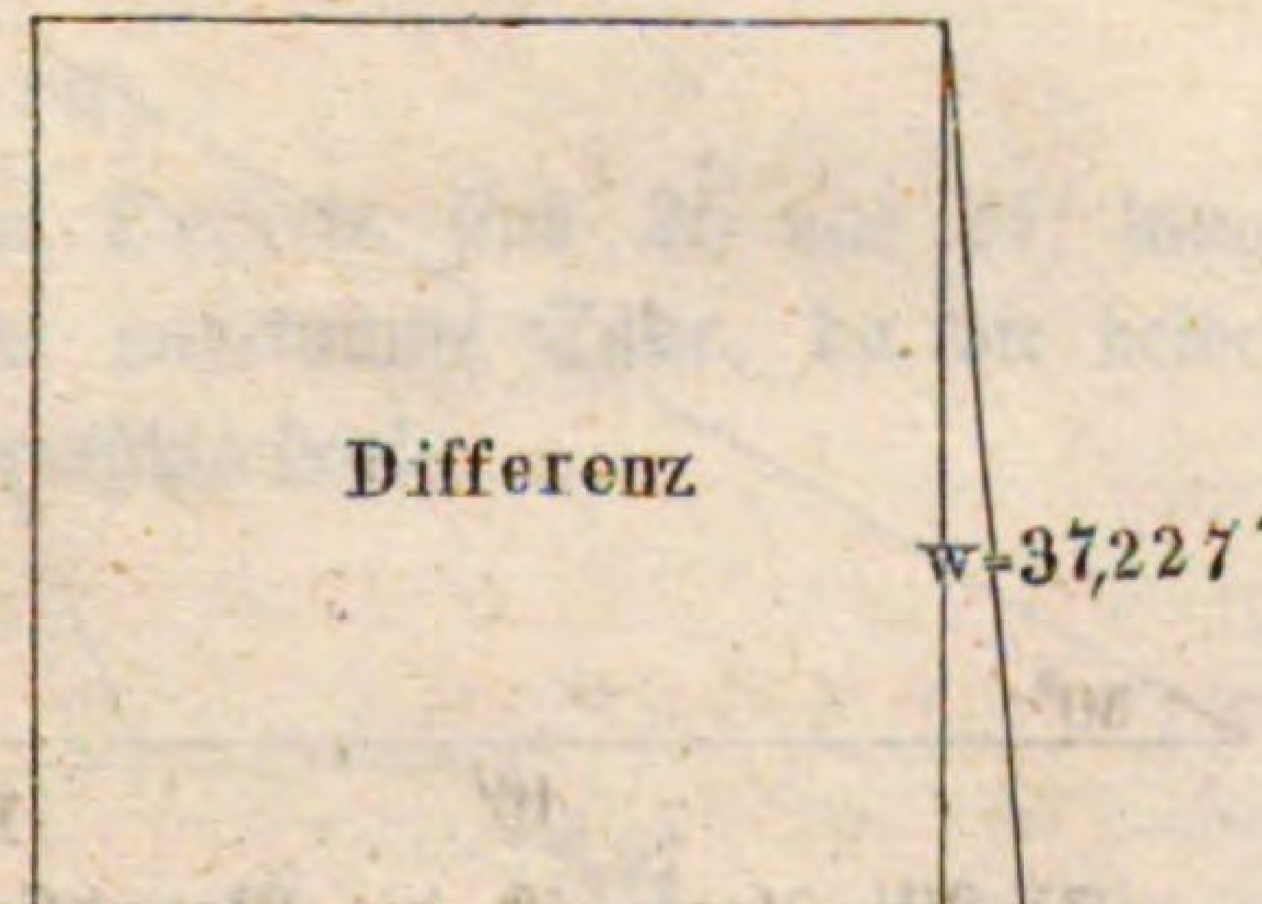




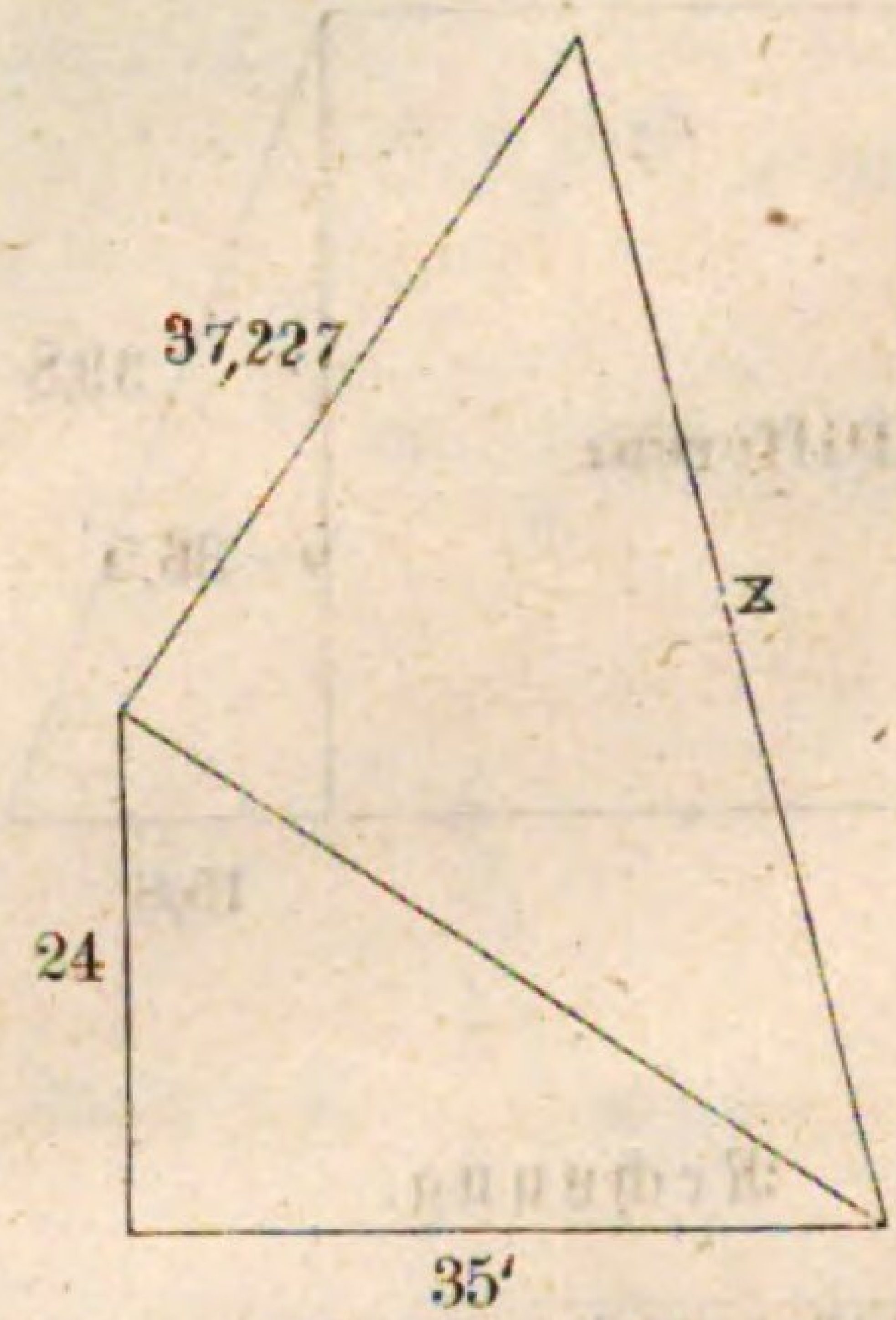
$$\frac{39{,}6 + 35}{2} = 37{,}3' = \text{Minuendus}$$



$$\frac{39{,}6 - 35}{2} = 2{,}3' = \text{Subtrahendus}$$



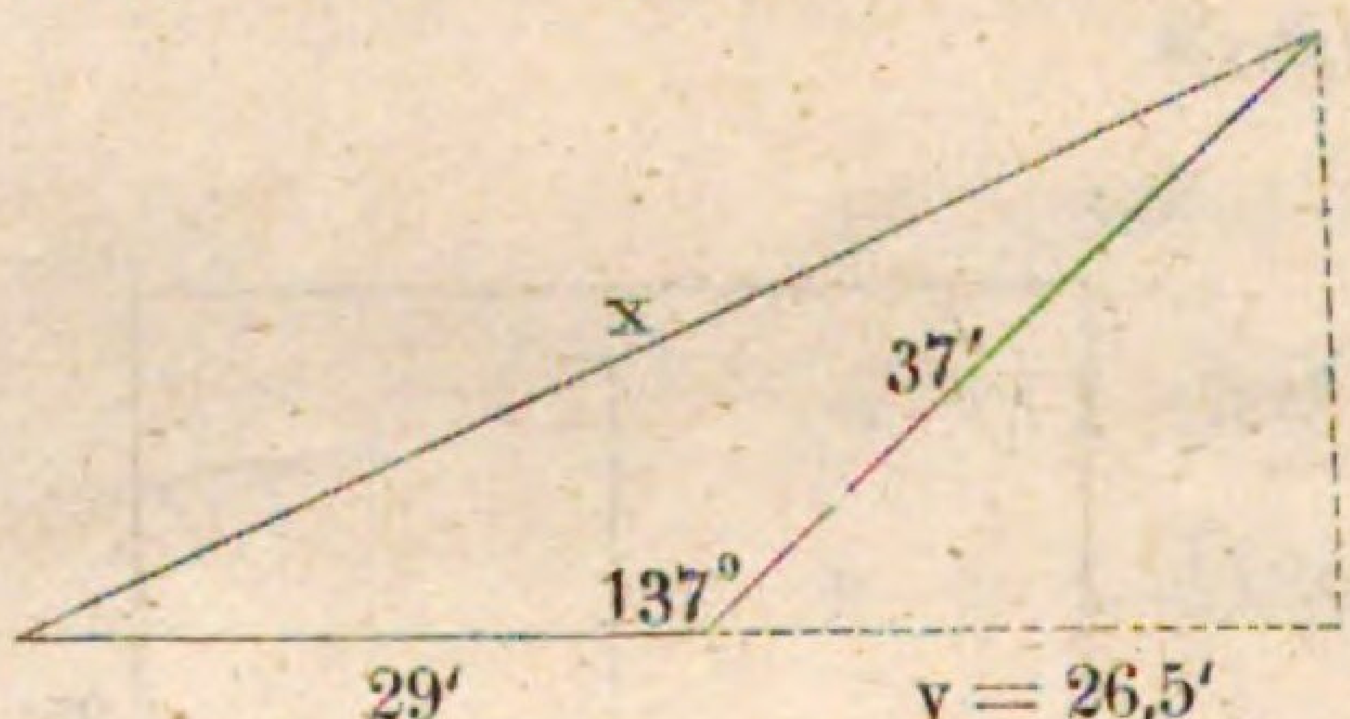
$$w = \sqrt{(37{,}3^2 - 2{,}3^2)}$$
$$= \sqrt{1386} = 37{,}227$$



Rechnung:

$$x = \sqrt{[(35^2 + 24^2 + 2(19,8 \times 35)]}$$
$$= \sqrt{3187} = 56,45'$$
$$56$$
$$0,45' = \text{Unterschied.}$$

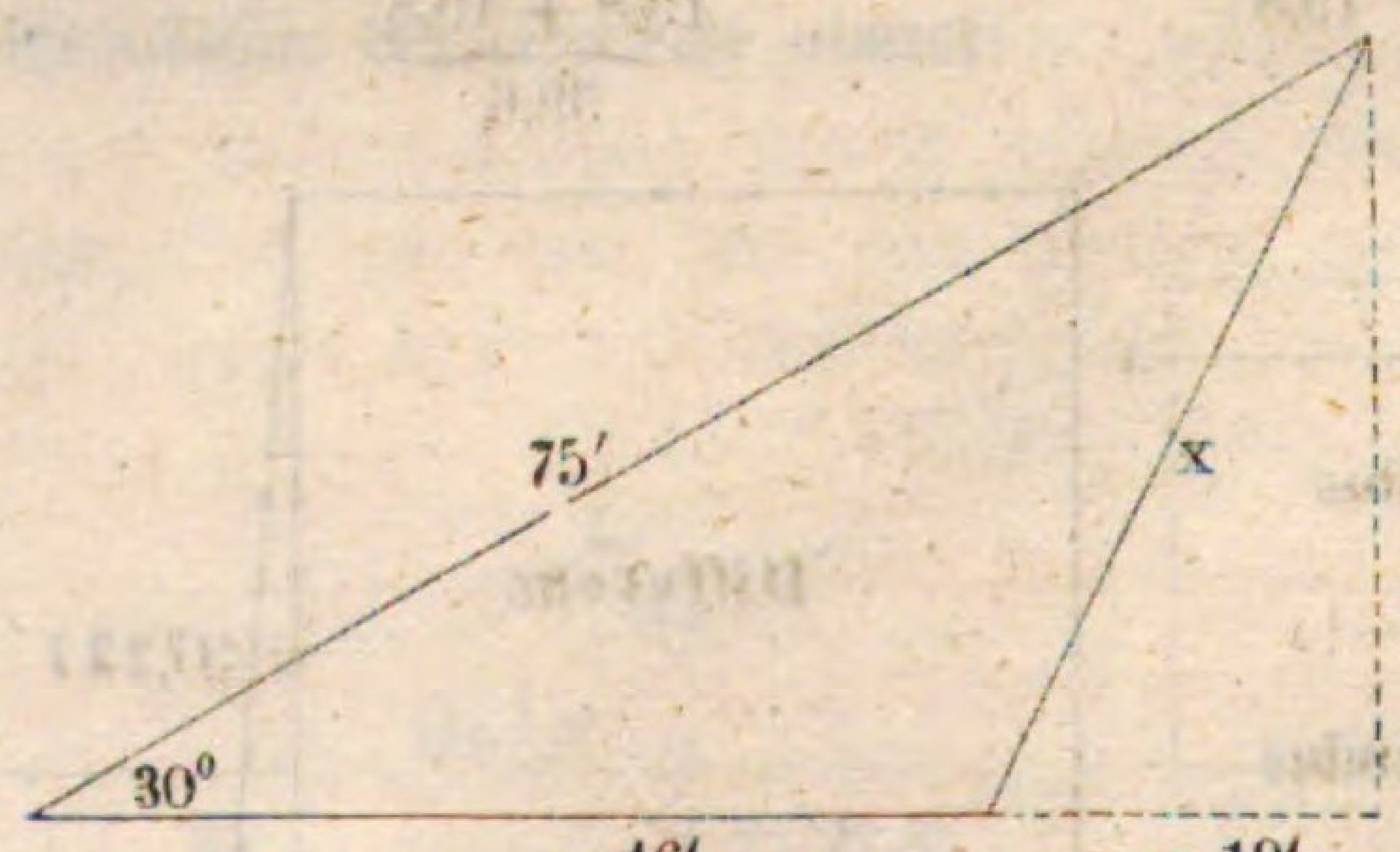
5) In einem stumpfwinkligen Dreieck schließen zwei Seiten von 29 und 37' lang einen Winkel von 137⁰ ein; wie lang ist die Seite x, welche dem stumpfen Winkel gegenüber liegt?



Rechnung:

$$x^2 = [29^2 + 37^2 + 2(26,5 \times 29)]$$
$$x = \sqrt{[29^2 + 37^2 + 2(26,5 \times 29)]}$$
$$x = \sqrt{3747} = 61,212'$$

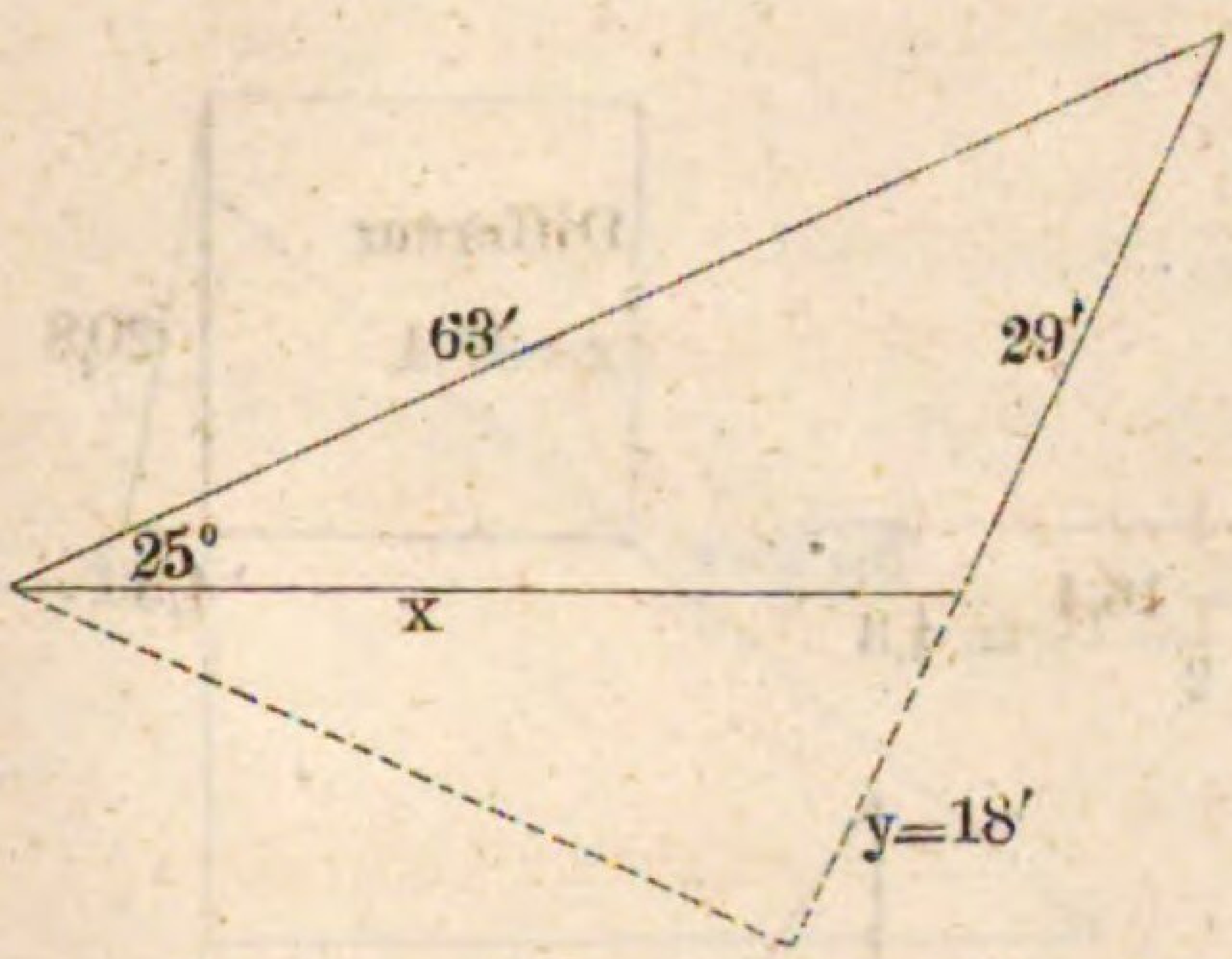
6) Die Grundlinie eines stumpfwinkligen Dreiecks ist 46' lang; die Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüber liegt, mißt 75' und schließt mit der Grundlinie einen Winkel von 30⁰ ein; wie lang ist die dritte unbekannte Seite dieses stumpfwinkligen Dreiecks?



Rechnung:

$$x^2 = 75^2 - [46^2 + 2(19 \times 46)]$$
$$x = \sqrt{75^2 - [46^2 + 2(9 \times 46)]}$$
$$x = \sqrt{1761} = 41,96'$$

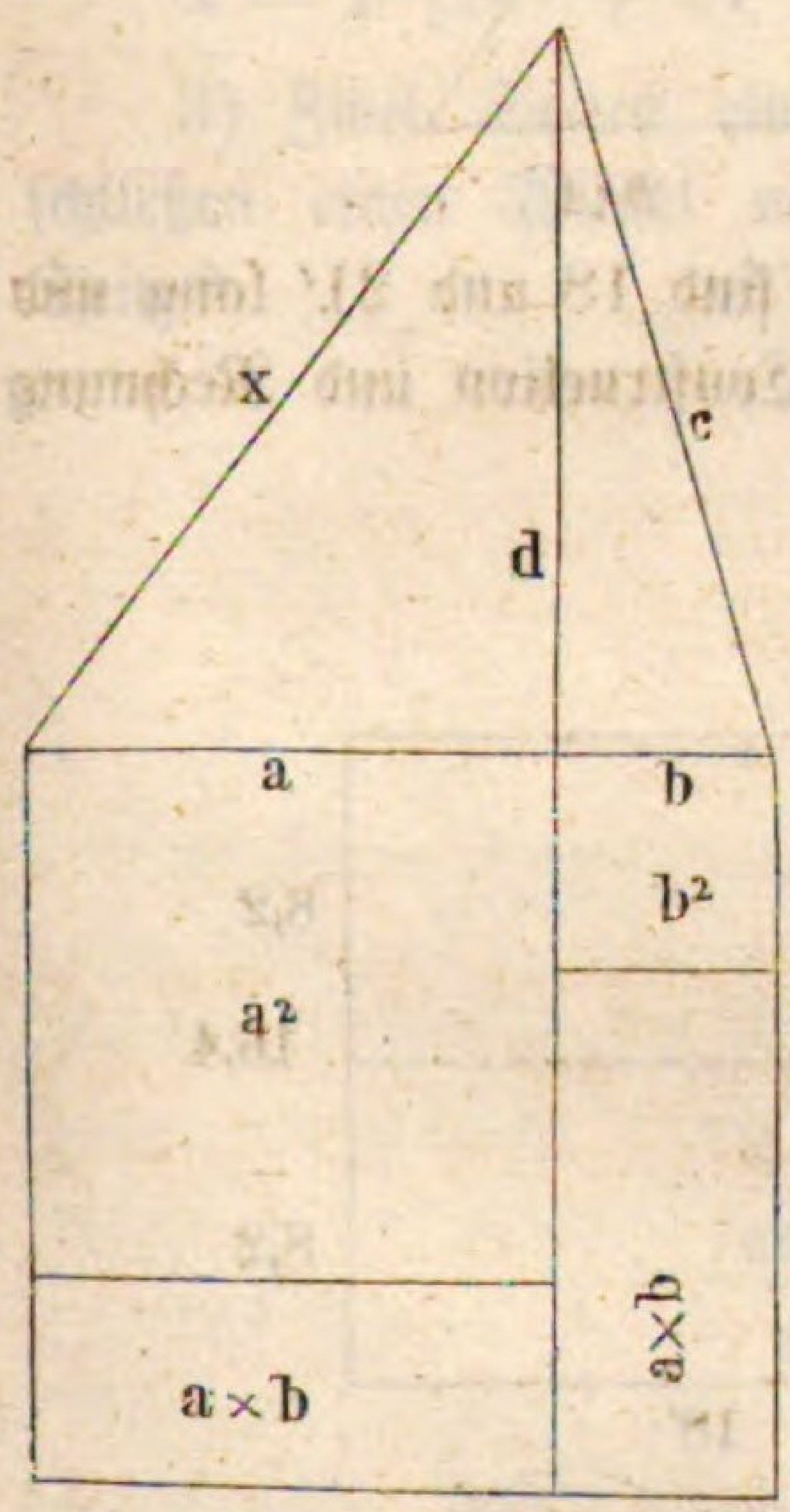
7) Wie lang ist die Grundlinie eines stumpfwinkligen Dreiecks, wenn dieser ein Winkel von 25⁰ anliegt, die längste Seite im Dreieck 63' und die zweite Seite 29' lang ist?



Rechnung:

$$x^2 = 63^2 - [29^2 + 2(18 \times 29)]$$
$$x = \sqrt{63^2 - [29^2 + 2(18 \times 29)]}$$
$$x = \sqrt{2084} = 45{,}65'$$

Ist das Dreieck spitzwinklig, so wird von der Summe der Quadrate der beiden bekannten Seiten dasselbe doppelte Rechteck, welches beim stumpfwinkligen Dreieck addirt wurde, hier subtrahirt.



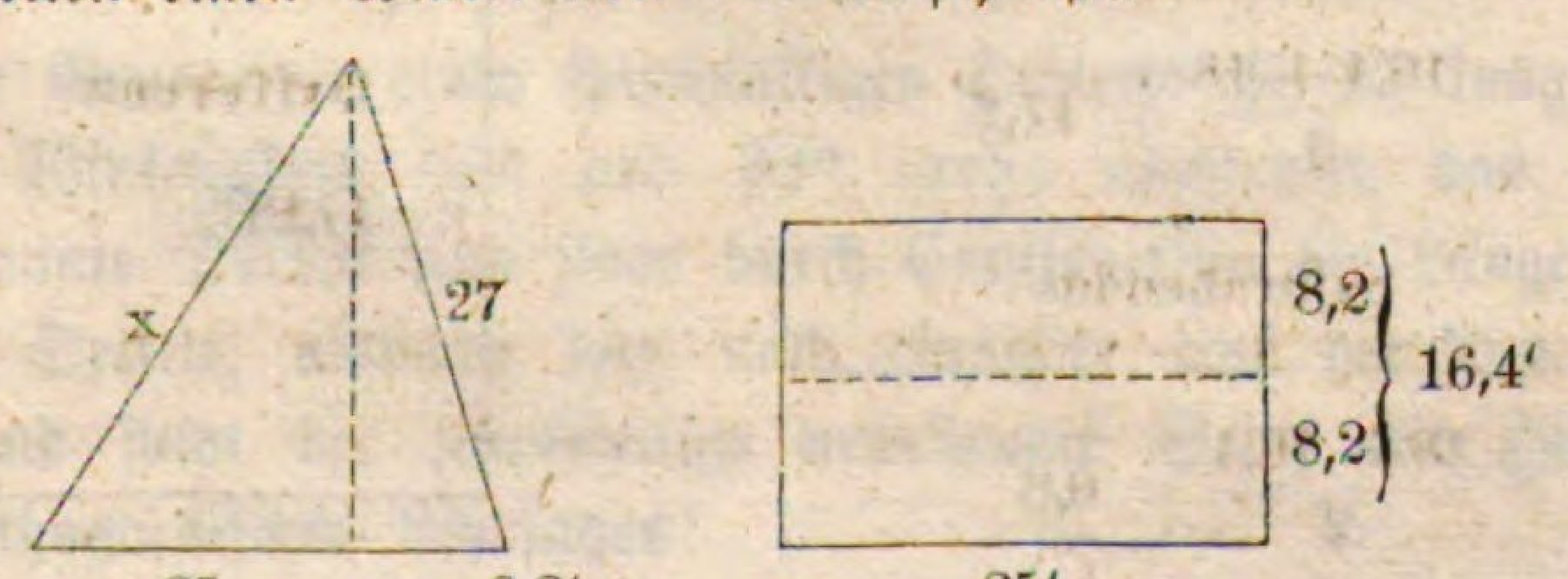
Beweis:

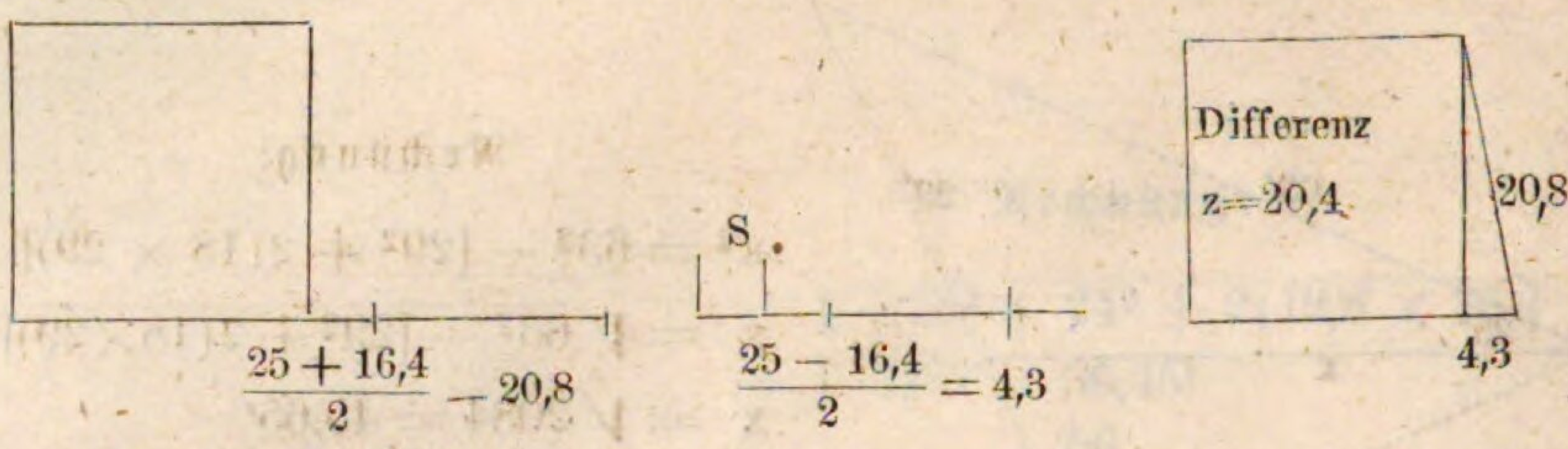
$$x^2 = (a - b)^2 + d^2$$
$$x^2 = a^2 - 2ab + b^2 + d^2$$
$$b^2 + d^2 = c^2$$
$$x^2 = a^2 + c^2 - 2ab$$

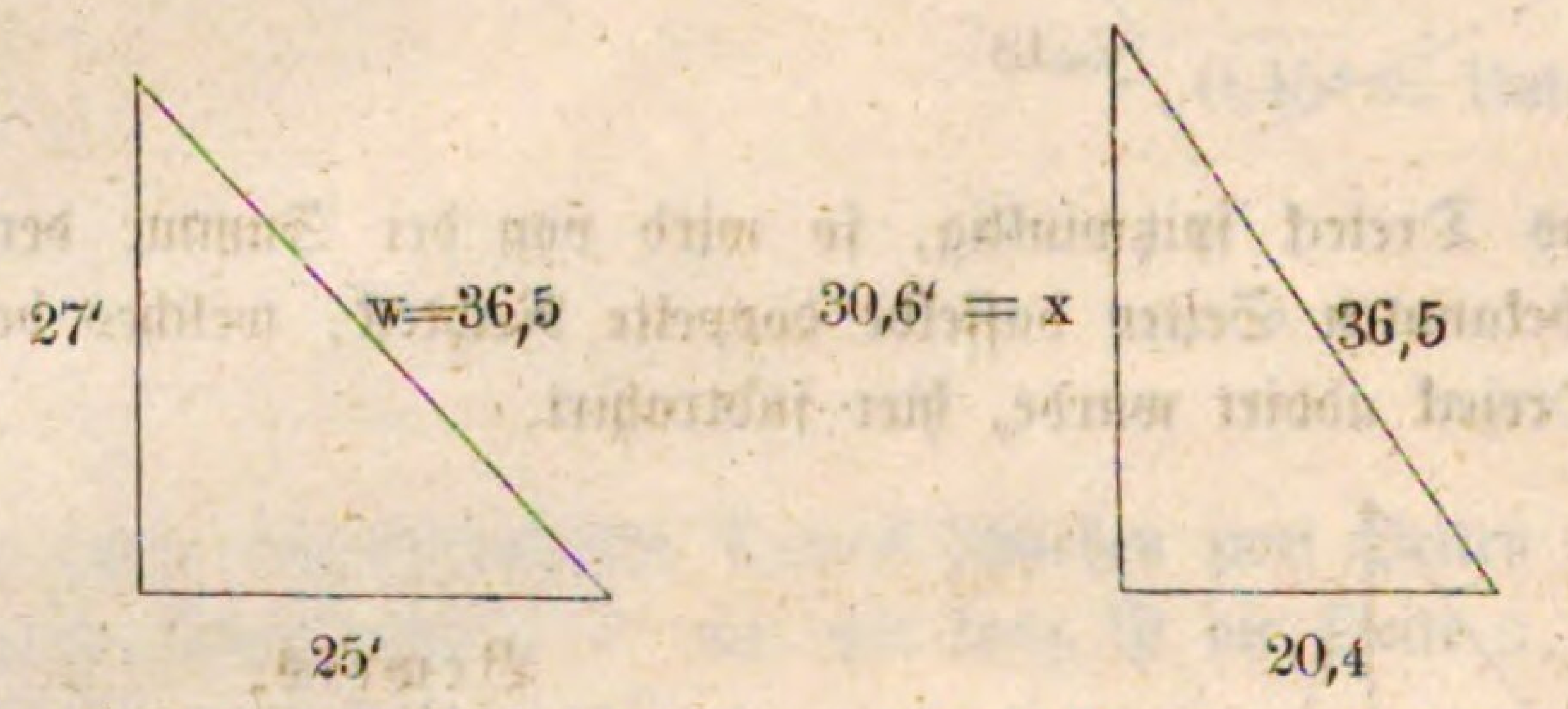
$x = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ab}$; d. h. in einem spitzwinkligen Dreieck ist eine unbekannte Seite = der Quadratwurzel aus den Quadraten der beiden andern Seiten, weniger das doppelte Rechteck, welches gebildet ist aus der Grundlinie a und aus dem durch ein Perpendikel abgeschnittenen Stücke b derselben.

Aufgaben:

1) Zwei Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks sind 25 und 27′ lang; finde allein durch Construction die dritte unbekannte Seite, da die beiden bekannten Seiten einen Winkel von 72^0 einschließen!

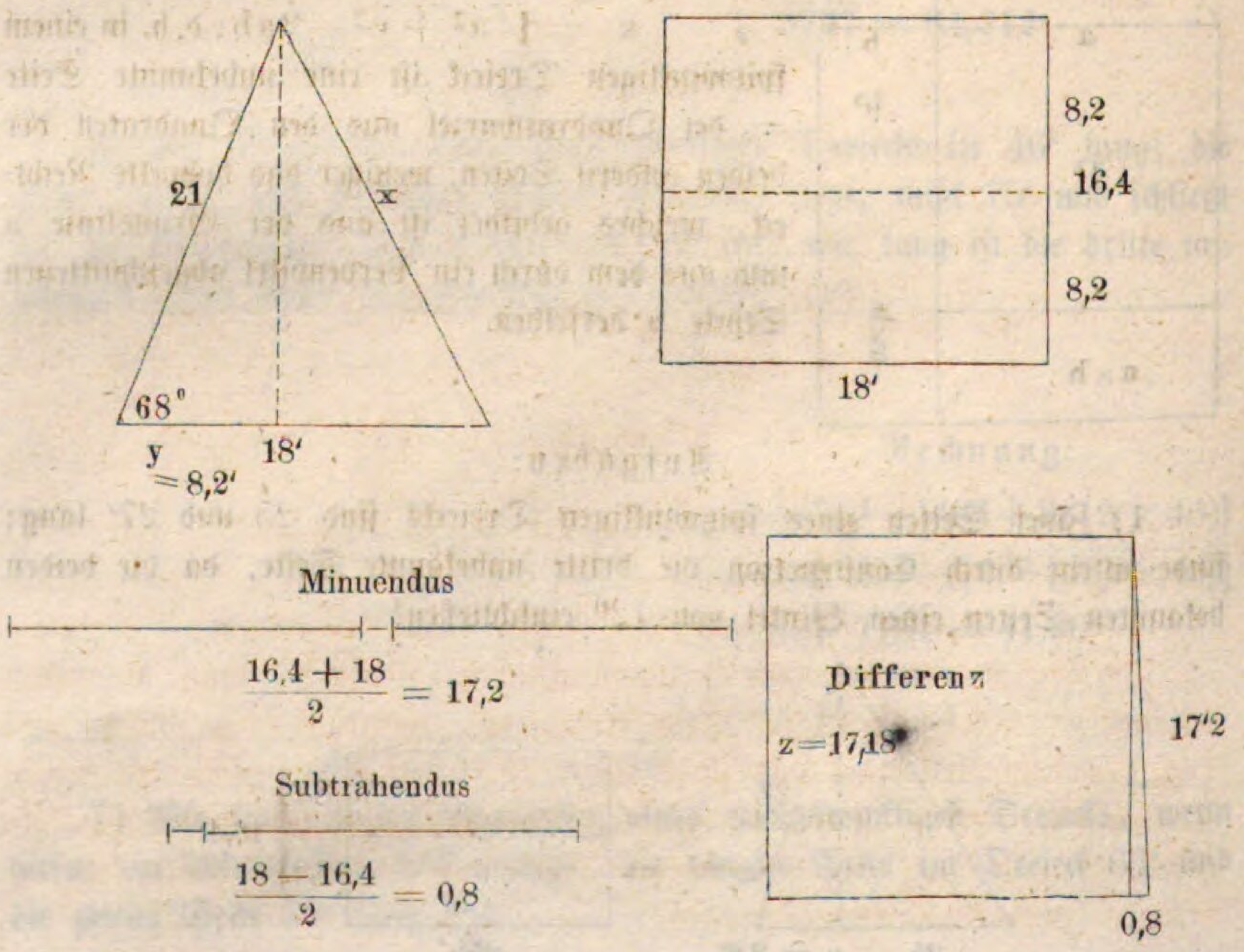


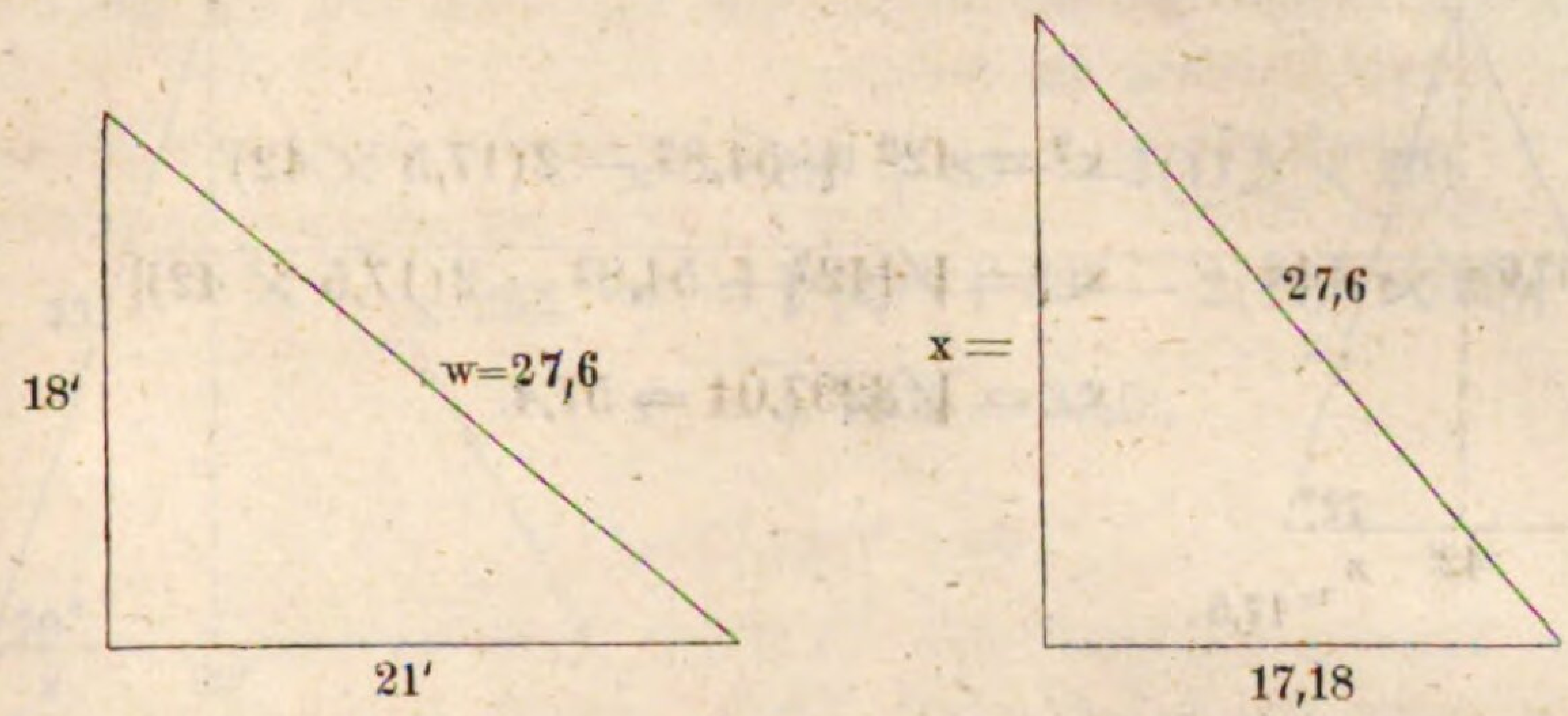




2) Zwei Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks sind 18 und 21′ lang und schließen einen Winkel von 68⁰ ein; finde durch Construction und Rechnung die dritte unbekannte Seite dieses Dreiecks!

1. Zeichnung.

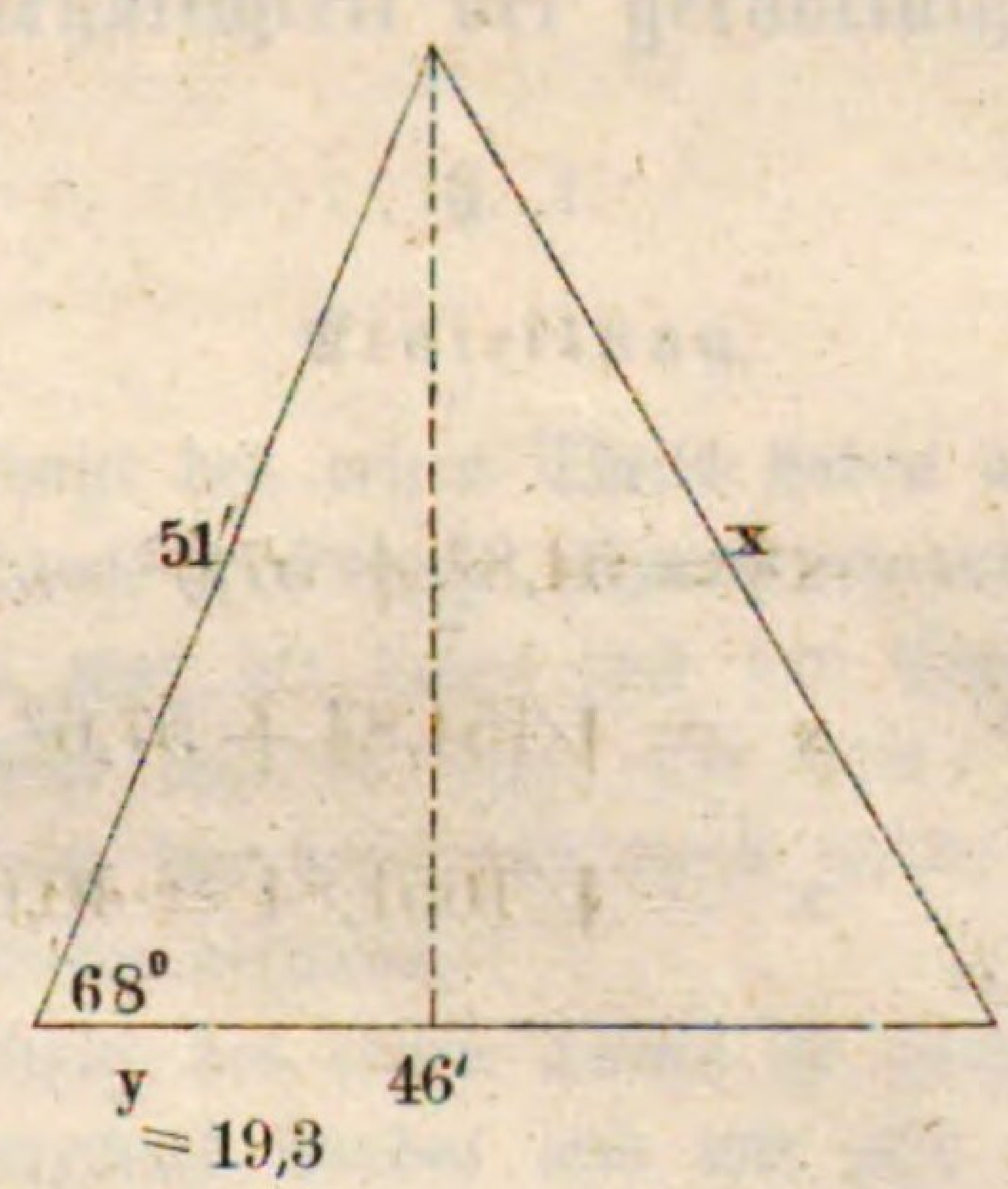




2. Rechnung:

$$x = \sqrt{[18^2 + 21^2 - (2 \times 8{,}2 \times 18)]} = \sqrt{469{,}8} = 21{,}6.$$

3) Zwei Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks von 46′ und 51′ lang schließen einen Winkel von 68⁰ ein; wie lang ist die dritte unbekannte Seite?



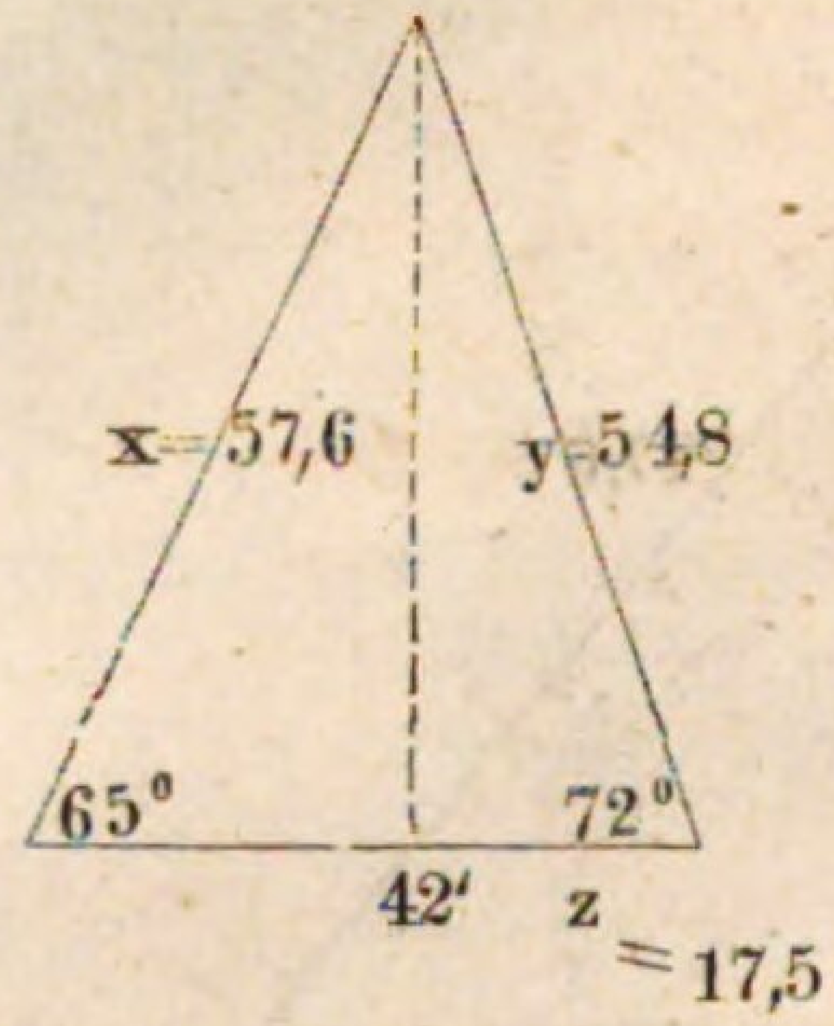
Rechnung:

$$x^2 = 51^2 + 46^2 - 2(19{,}3 \times 46)$$

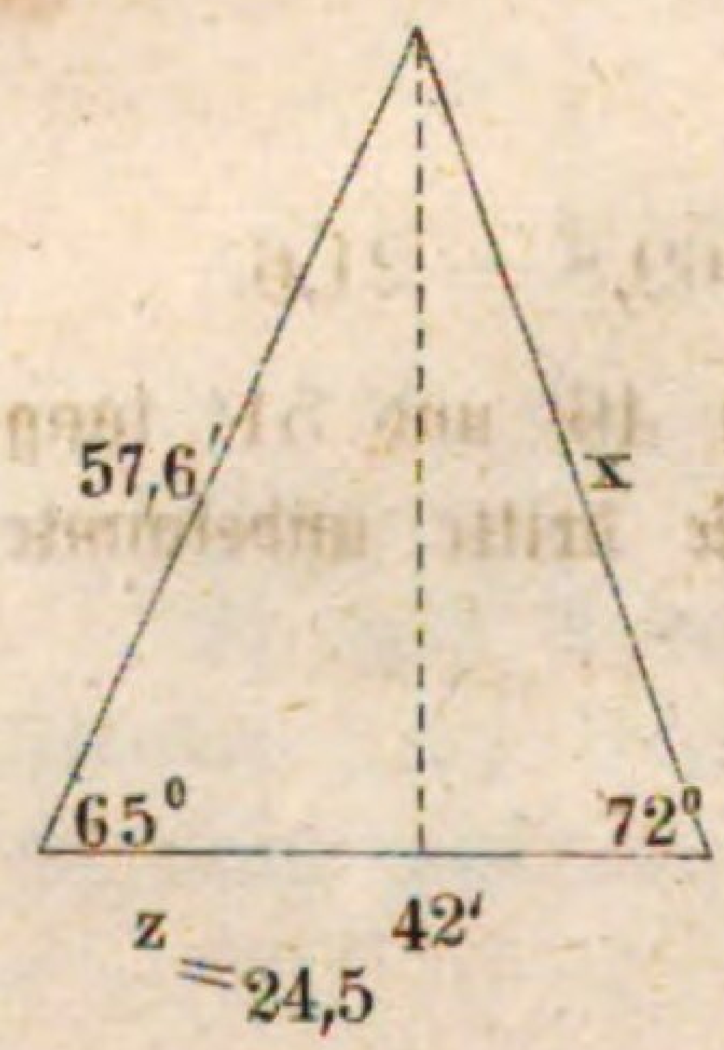
$$x = \sqrt{[51^2 + 46^2 - 2(19{,}3 \times 46)]}$$

$$x = \sqrt{2941{,}4} = 54{,}234.$$

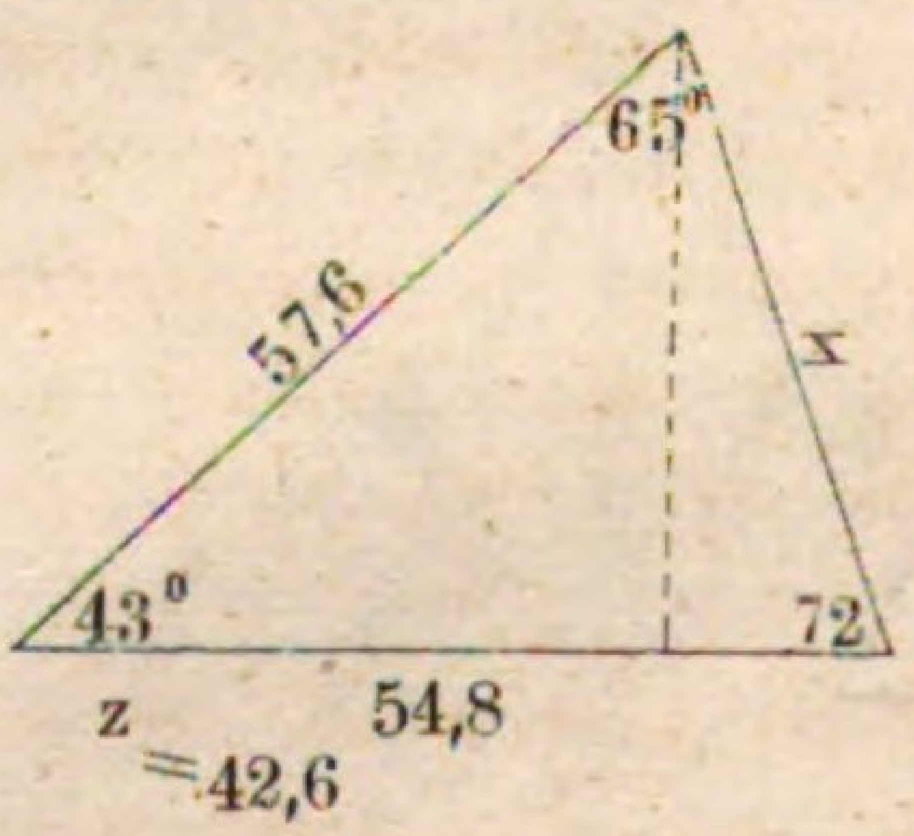
4) Die Grundlinie eines spitzwinkligen Dreiecks ist 42′ lang, die beiden anliegenden Winkel sind 65⁰ und 72⁰ groß; construire das durch diese Stücke bestimmte Dreieck und finde durch Construction die Länge der beiden unbekannten Seiten; alsdann setze nach einander eine der drei Seiten als unbekannt und finde die jedesmalige unbekannte Seite mit Hülfe des erweiterten pythagoräischen Lehrsatzes!



$$x^2 = 42^2 + 54{,}8^2 - 2(17{,}5 \times 42)$$
$$x = \sqrt{[42^2 + 54{,}8^2 - 2(17{,}5 \times 42)]}$$
$$x = \sqrt{3297{,}04} = 57{,}4.$$



$$x^2 = 42^2 + 57{,}6^2 - 2(24{,}5 \times 42)$$
$$x = \sqrt{[42^2 + 57{,}6^2 - 2(24{,}5 \times 42)]}$$
$$x = \sqrt{3023{,}76} = 54{,}9.$$

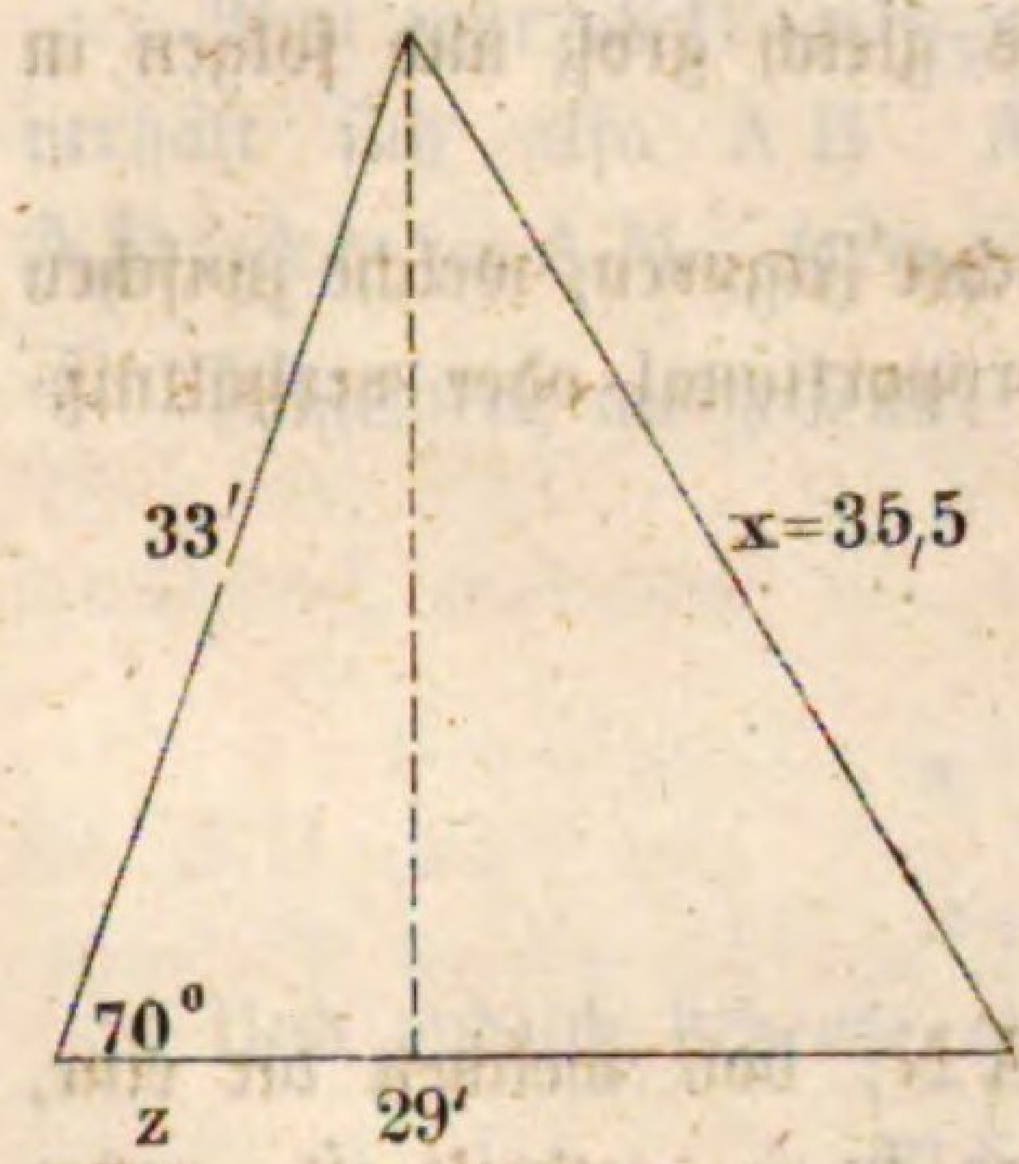


$$x^2 = 54{,}8^2 + 57{,}6^2 - 2(42{,}6 \times 54{,}8)$$
$$x = \sqrt{[54{,}8^2 + 57{,}6^2 - 2(42{,}6 \times 54{,}8)]}$$
$$x = \sqrt{1651{,}84} = 40{,}6.$$

5) Die beiden Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks, welche einen Winkel von 70° einschließen, sind 29′ und 33′ lang und die dritte Seite soll mit Hülfe des erweiterten pythagoräischen Lehrsatzes durch Zeichnung und Rechnung gefunden werden; man kann aber das durch das Perpendikel abgeschnittene Stück der Grundlinie nicht messen; wie muß man sich in diesem Falle helfen?

$$z = \sqrt{(33^2 - 30{,}8^2)} = \sqrt{140{,}36} = 11{,}8$$

oder $z = 29 - 17{,}8 = 11{,}2$ also $z = \frac{11{,}8 + 11{,}2}{2} = 11{,}5.$



$$x^2 = 29^2 + 33^2 - 2(11,5 \times 29)$$
$$x = \sqrt{[29^2 + 33^2 - 2(11,5 \times 29)]}$$
$$x = \sqrt{1263} = 35,5'.$$

IV. Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

§. 1.

Einleitung.

Im zweiten Abschnitt des ersten Theils haben wir nachgewiesen, unter welchen Bedingungen zwei geradlinige Figuren einander an Form und Inhalt gleich sind, das war die Lehre von der Congruenz der geradlinigen Figuren (≅); oder, was dasselbe sagt, wir haben in jenem Abschnitt die Frage beantwortet: Durch wie viele und durch welche Stücke sind die geradlinigen Figuren vollständig bestimmt?

Im dritten Abschnitt des ersten Theils ist gelehrt worden, wie die geradlinigen Figuren berechnet werden und wie jede geradlinige Figur durch geometrische Construction in eine andere geradlinige Figur von gleichem Flächeninhalte verwandelt werden kann; dieser Abschnitt enthielt also die Lehre von der Inhaltsgleichheit und der Verwandlung der geradlinigen Figuren (=).

Es bleibt uns also noch übrig, in diesem vierten Abschnitt nachzuweisen, unter welchen Bedingungen die geradlinigen Figuren einander ähnlich sind (∼), zu welchem Zweck wir vorher feststellen wollen, was man in der Geometrie unter dem Ausdrucke ähnlich zu verstehen hat:

1. Aehnliche Figuren haben eine gleiche Anzahl von Seiten und Winkeln; es kann z. B. ein Viereck einem Dreieck sehr wohl inhaltsgleich, aber nie ähnlich sein.

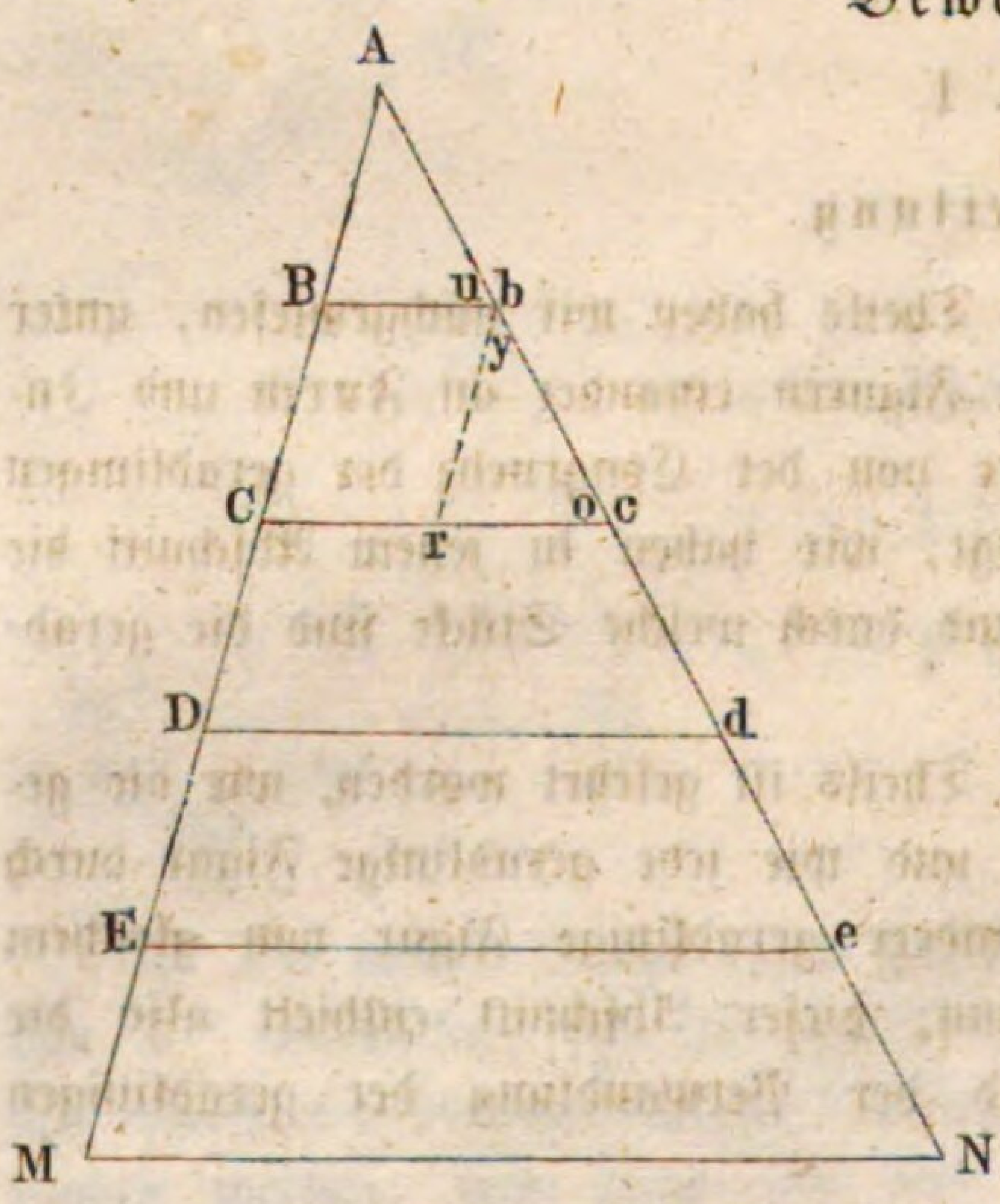
2. Die Winkel ähnlicher Figuren sind stets gleich groß und folgen in gleicher Ordnung auf einander.
3. Die gleichnamigen, d. h., die Seiten ähnlicher Figuren, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, müssen stets proportional oder verhältnißgleich sein.

§. 2.

Vier Lehrsätze.

I. Wenn zwei gerade Linien, AM und AN, von welchen die eine, AM, in irgend eine Anzahl gleicher Theile, etwa in 5, getheilt ist, unter einem ganz beliebigen Winkel, A, an einander gelegt, wenn dann ihre Endpunkte durch die gerade Linie MN verbunden und wenn endlich durch die Theilungspunkte B, C, D, E lauter Parallelen zu MN nach AN gezogen werden; so wird auch AN dadurch in eben so viele, unter sich gleiche Theile, wie AM, getheilt.

Beweis:



1) Es ist klar, daß zwischen je zwei Parallelen, die von AM nach AN gezogen werden, eben sowohl ein Stück der Linie AN als der Linie AM fällt, daß folglich AN durch die Parallelen in eben so viele Theile getheilt wird, als AM.

2) Es muß gezeigt werden, daß diese Theile unter sich gleich sind; zu diesem Zweck ziehe man br parallel AM, alsdann ist

$$br = BC$$
$$BC = AB;$$

ferner ist

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle\, y = A\\ \sphericalangle\, o = u\end{array}\right\}$$ correspondirende Winkel,

Dreieck $brc \cong ABb$ (II. Satz); mithin auch $bc = Ab$.

Ganz auf dieselbe Weise läßt sich zeigen, daß cd, de u. s. w. gleich Ab sind, indem man durch cd u. s. w. Parallelen mit AM zieht, folglich ist AN durch die Parallelen zu MN in lauter gleiche Theile getheilt.

Nun war $AB = \frac{1}{5}$ von AM; es ist aber $Ab = \frac{1}{5}$ von AN; es verhält sich also $AB : Ab = \frac{1}{5} AM : \frac{1}{5} AN$, oder es verhält sich $AB : Ab = AM : AN$.

Allgemein ausgedrückt sei $x = \frac{1}{n} AM$

$x' = \frac{1}{n} AN$; also verhält sich

$$x : x' = \frac{1}{n} AM : \frac{1}{n} AN$$

$$x : x' = AM : AN.$$

Und endlich bedeute m irgend eine Zahl, so verhält sich

$$mx : mx' = AM : AN,$$

d. h., gleiche Mengen der gleichen Theile beider Linien AM und AN verhalten sich zu einander, wie die ganzen Linien.

Gleiche Mengen der gleichen Theile von AM und AN fallen zwischen einerlei Parallellinien; daher verhalten sich auch solche Stücke der Linien AM und AN, die zwischen einerlei Parallellinien liegen, wie die ganzen Linien.

II. Wenn in einem Dreieck, ABC, eine Linie, DE, parallel mit der Grundlinie BC gezogen wird, so verhalten sich sowohl die obern Abschnitte, AD und AE, als die untern, DB und EC, zu einander, wie die ganzen Seiten, AB : AC.

Beweis:



Man denke sich die Linie AB in n gleiche Theile getheilt und nehme an, ein Theilungspunkt falle in D; alsdann denke man sich durch alle Theilungspunkte von AB Parallelen mit BC nach AC gezogen; so wird auch AC dadurch in n gleiche Theile getheilt.

Eine von den beliebig vielen Parallelen sei DE; es liegen daher sowohl über, als unter derselben eben so viele der gleichen Theile von AB, als der gleichen Theile von AC; folglich verhält sich $AD : AE = AB : AC$ und eben so $DB : EC = AB : AC$.

Aus diesen beiden Verhältnissen folgt, daß sich verhält

$$AD : AE = DB : EC.$$

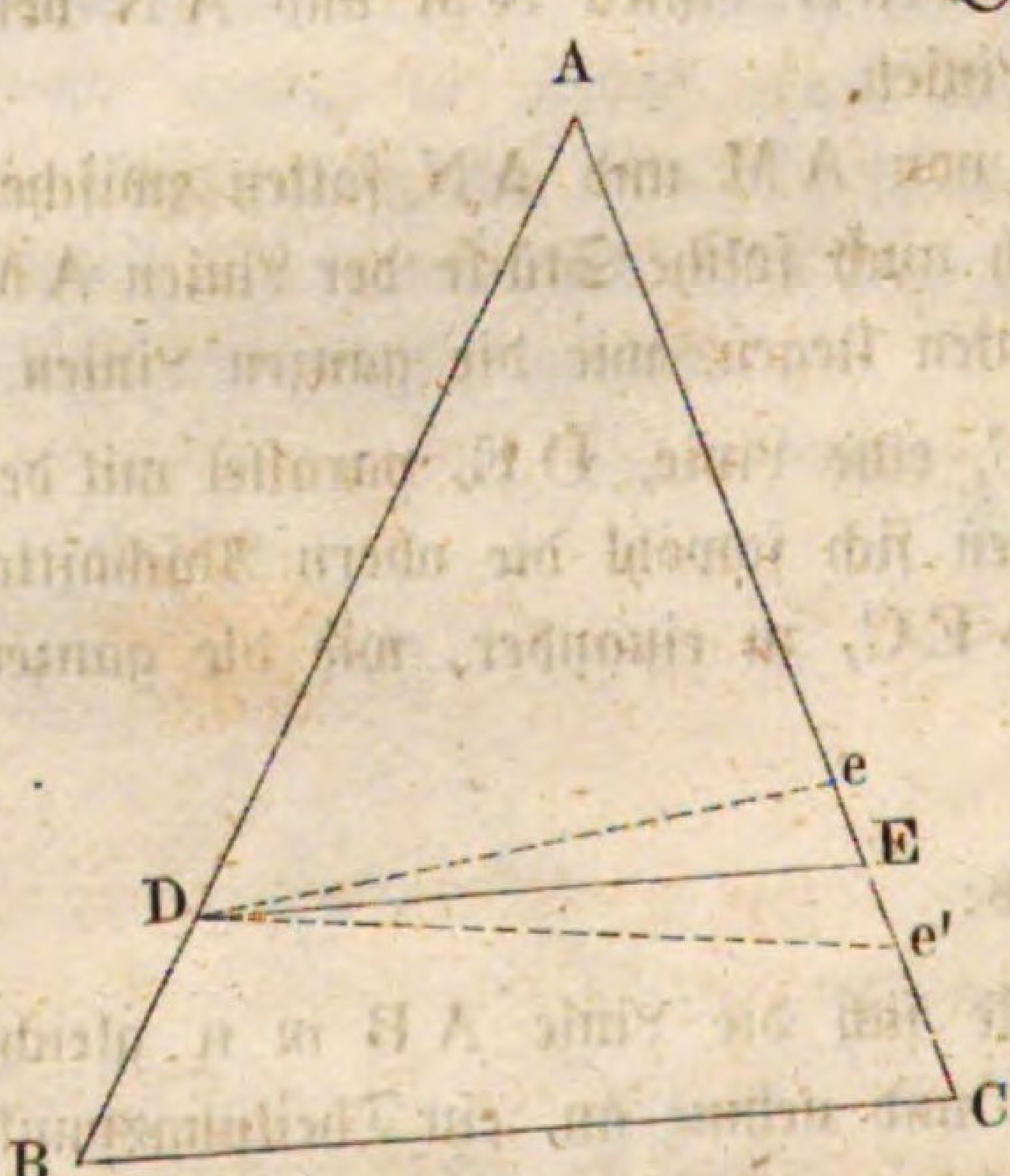
Betrachtet man AC als Grundlinie und zieht DF parallel AC, so verhält sich $AB : BC = AD : FC$, oder, da $FC = DE$ ist, so verhält sich $AB : BC = AD : DE$, das heißt in Beziehung auf die Grundlinie

BC: Es verhält sich die Seite des Dreiecks zur Grundlinie, wie der obere Abschnitt der Seite zur Parallellinie.

Zieht man durch E eine parallele Transversallinie zu AB, so verhält sich AC : BC = AE : DE.

Fällt man aus A ein Perpendikel, AG, auf BC, so steht das ganze Perpendikel zu dem obern Theil desselben, AH, in demselben Verhältniß wie AB zu AD und folglich wie BC : DE.

III. Wenn umgekehrt in einem Dreieck, ABC, eine Linie, DE, die Seiten AB und AC so schneidet, daß die obern und die untern Abschnitte derselben sich zu einander verhalten, wie die ganzen Seiten; so ist DE parallel BC.



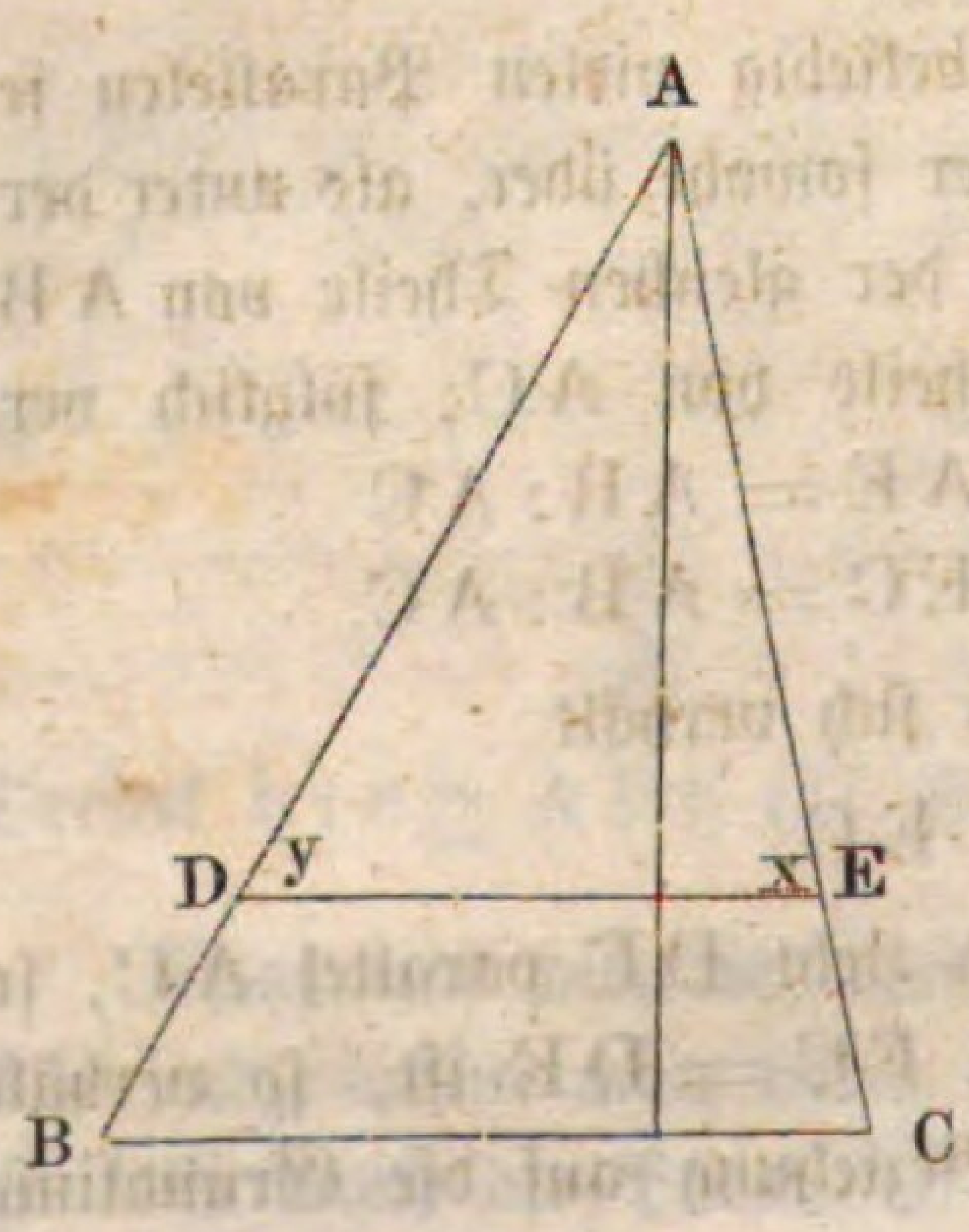
Beweis:

Behauptet man, DE sei nicht parallel BC, so sei De oder De' parallel BC; alsdann verhielte sich

AB : AC = AD : Ae oder
= AD : Ae'.

Der Bedingung nach verhält sich aber AB : AC = AD : AE; folglich müßte Ae = AE und ebenso Ae' = AE sein, was unmöglich ist; mithin muß DE || BC sein.

IV. Wenn in einem Dreieck, ABC, eine parallele Transversallinie, DE, zu einer Seite, etwa BC, gezogen wird, so ist das Dreieck ADE dem Dreieck ABC ähnlich.



Beweis:

1) Was die Winkel betrifft, so ist A beiden Dreiecken gemein,

$\sphericalangle\ y = B$ }
$\sphericalangle\ x = C$ } correspondirende Winkel.

2) In Ansehung der Seiten verhält sich

AD : AE = AB : AC; ferner
AD : DE = AB : BC
AE : DE = AC : BC; folglich ist das Dreieck ADE $\sim$ ABC.

Denkt man sich aus der Spitze A ein Perpendikel auf B C oder deren Verlängerung gezogen, so steht es auch auf DE oder deren Verlängerung senkrecht, und da dieses Perpendikel sich zu dem obern Abschnitt desselben (bis D E) wie B C : D E verhält, so verhalten sich die Höhen ähnlicher Dreiecke, wie die Grundlinien derselben.

§. 3.

Die Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

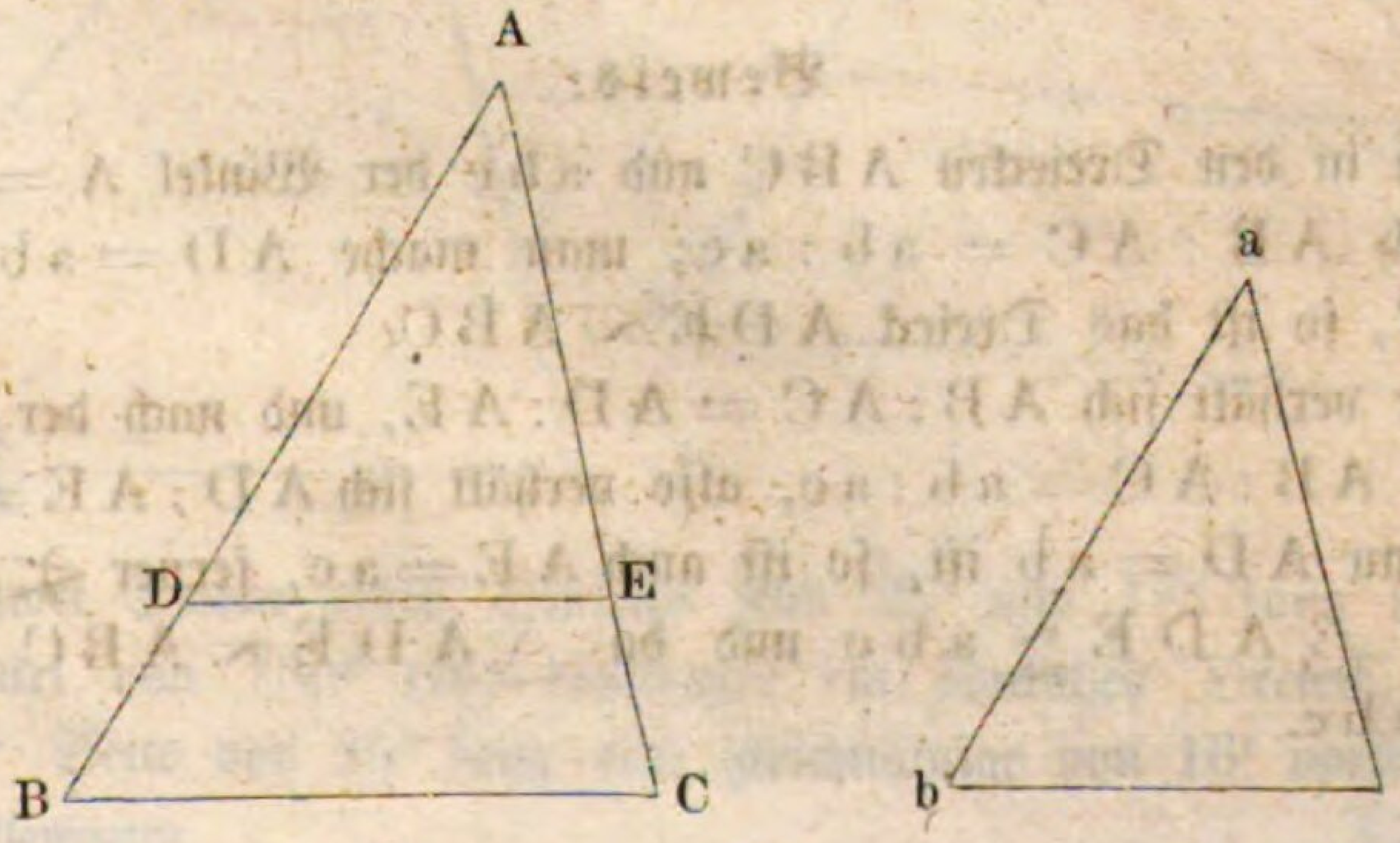
Sowie die Congruenz zweier Dreiecke aus der Gleichheit derjenigen Stücke erkannt wird, von welchen die Größe und Gestalt eines Dreiecks abhängen; so läßt sich die Aehnlichkeit derselben aus der Gleichheit derjenigen Stücke in ihnen folgern, durch welche allein die Gestalt eines Dreiecks bestimmt wird. Drei Stücke waren jedesmal zur Bestimmung der Gestalt und Größe eines Dreiecks erforderlich, und es ließen sich im Allgemeinen fünf Fälle unterscheiden, in welchen eine Congruenz statt fand. Ganz eben so hängt auch die Gestalt eines Dreiecks von je drei Stücken derselben ab, und es lassen sich in Betreff der Aehnlichkeit der Dreiecke eben so viele Fälle unterscheiden.

I. Satz von der Aehnlichkeit der Dreiecke: Dreiecke sind einander ähnlich, wenn die Winkel des einen den Winkeln des andern gleich sind.

Beweis:

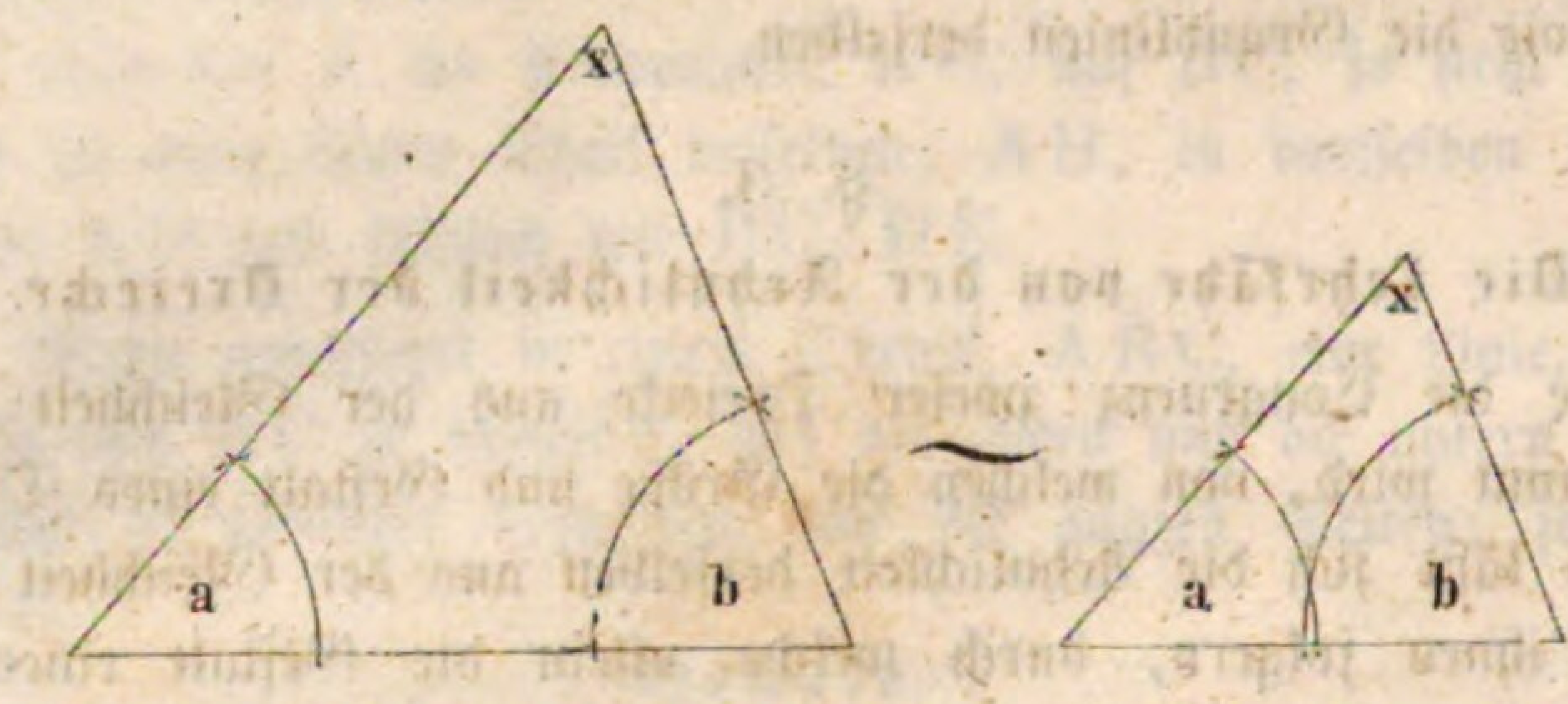
Es seien in den Dreiecken A B C und a b c die Winkel $A = a$, $B = b$, $C = c$. Man mache $AD = ab$, $AE = ac$ und ziehe D E, so ist das Dreieck $ADE \cong abc$ (I. Satz); folglich der Winkel $D = b$. Da nun auch $B = b$ ist, so muß $D = B$ sein; folglich ist $DE \parallel BC$, mithin das $\triangle ADE \sim ABC$; es war aber $\triangle ADE \cong abc$, folglich ist $\triangle ABC \sim abc$.

Da aus der Gleichheit zweier Winkel in zwei Dreiecken die Gleichheit des dritten folgt, so ist es hinreichend, nur zwei Winkel in beiden als gleich zu wissen.

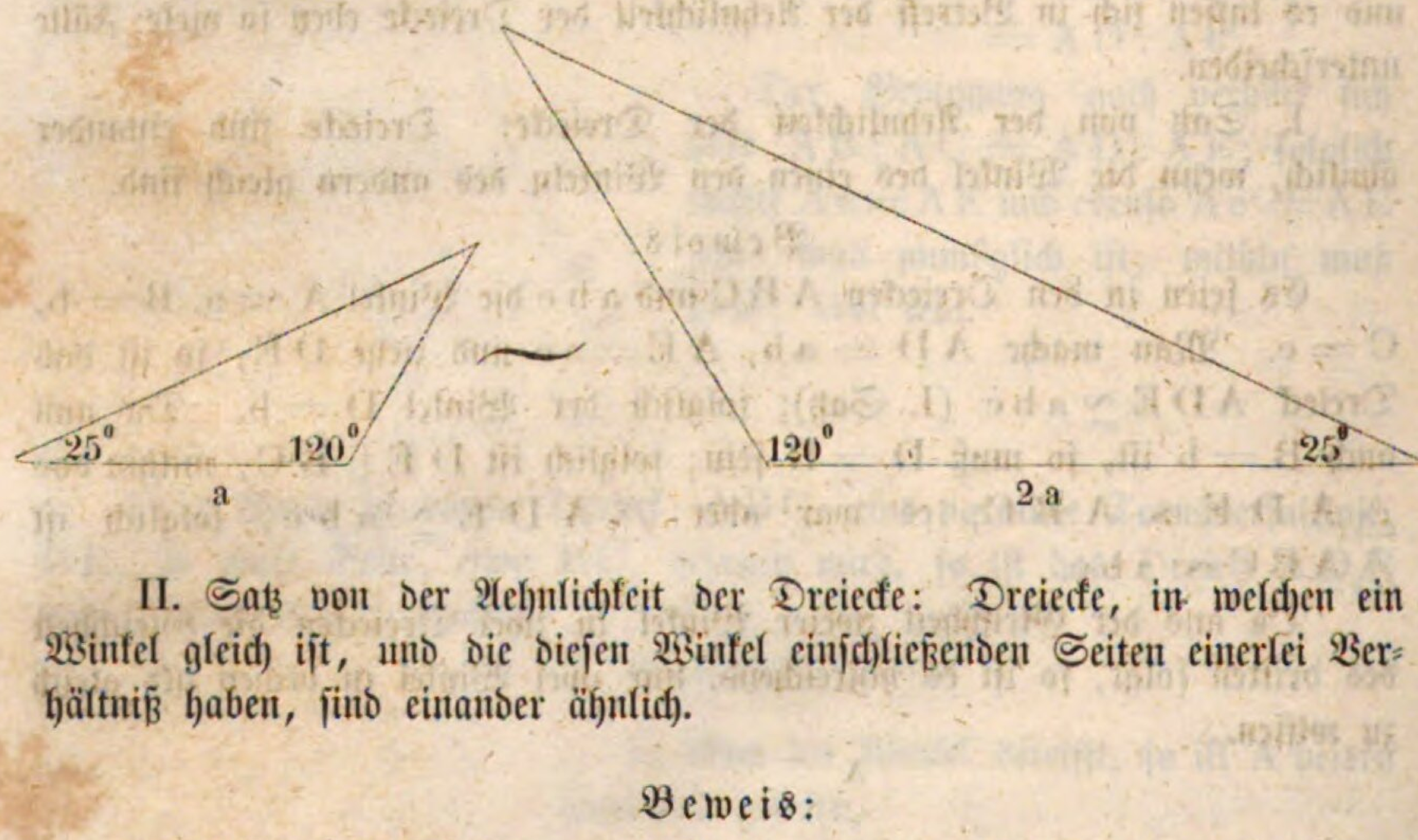


Aufgaben:

1) Construire zwei ähnliche Dreiecke von verschiedener Größe, in denen die drei Winkel gleich sind!



2) Die beiden Winkel an der Grundlinie eines Dreiecks sind 120^0 und 25^0 groß; construire ein ähnliches Dreieck, welches eine doppelt so lange Grundlinie hat!



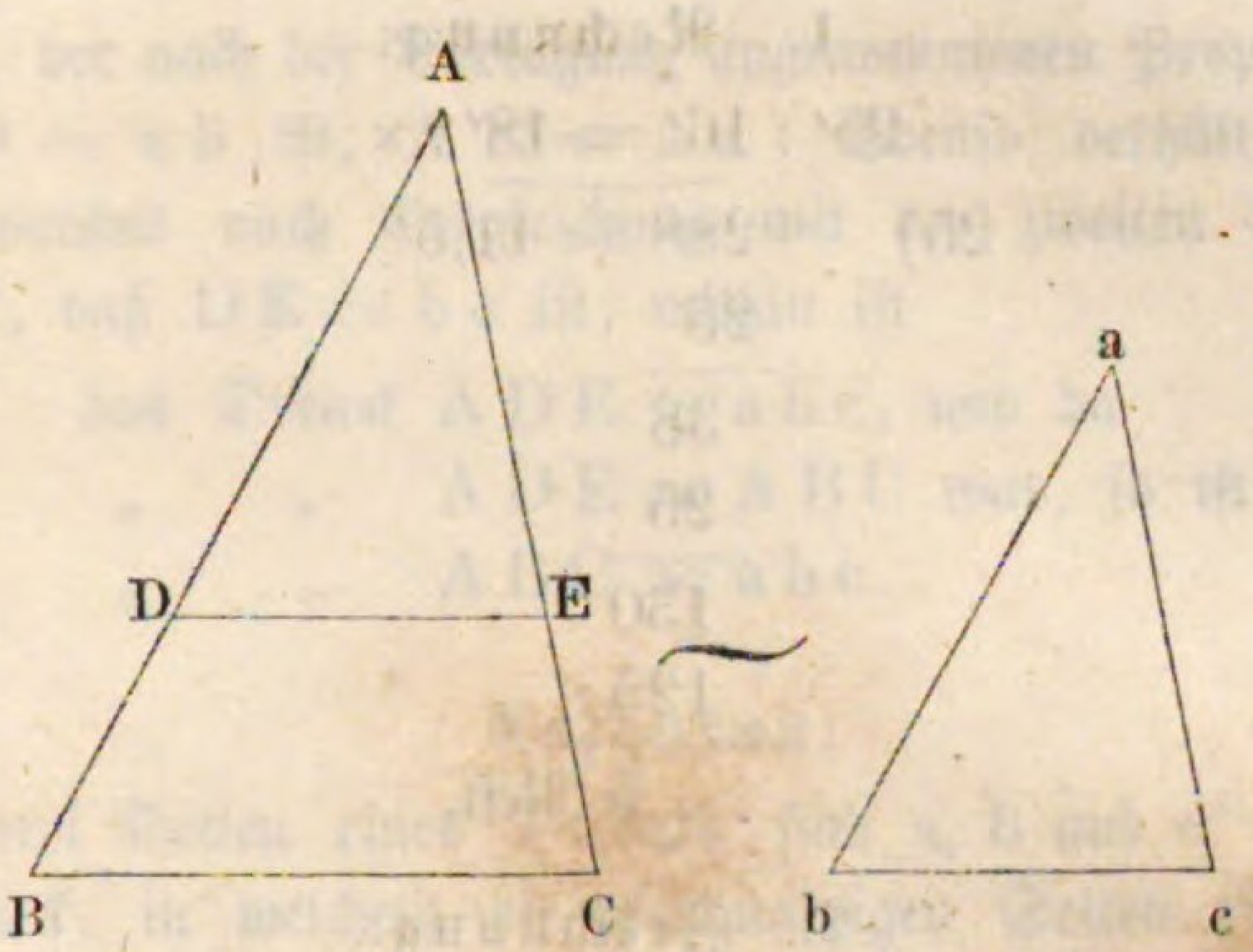
II. Satz von der Aehnlichkeit der Dreiecke: Dreiecke, in welchen ein Winkel gleich ist, und die diesen Winkel einschließenden Seiten einerlei Verhältniß haben, sind einander ähnlich.

Beweis:

Es sei in den Dreiecken ABC und abc der Winkel A = a, und es verhalte sich AB : AC = ab : ac; man mache AD = ab und ziehe DE || BC, so ist das Dreieck ADE ∾ ABC.

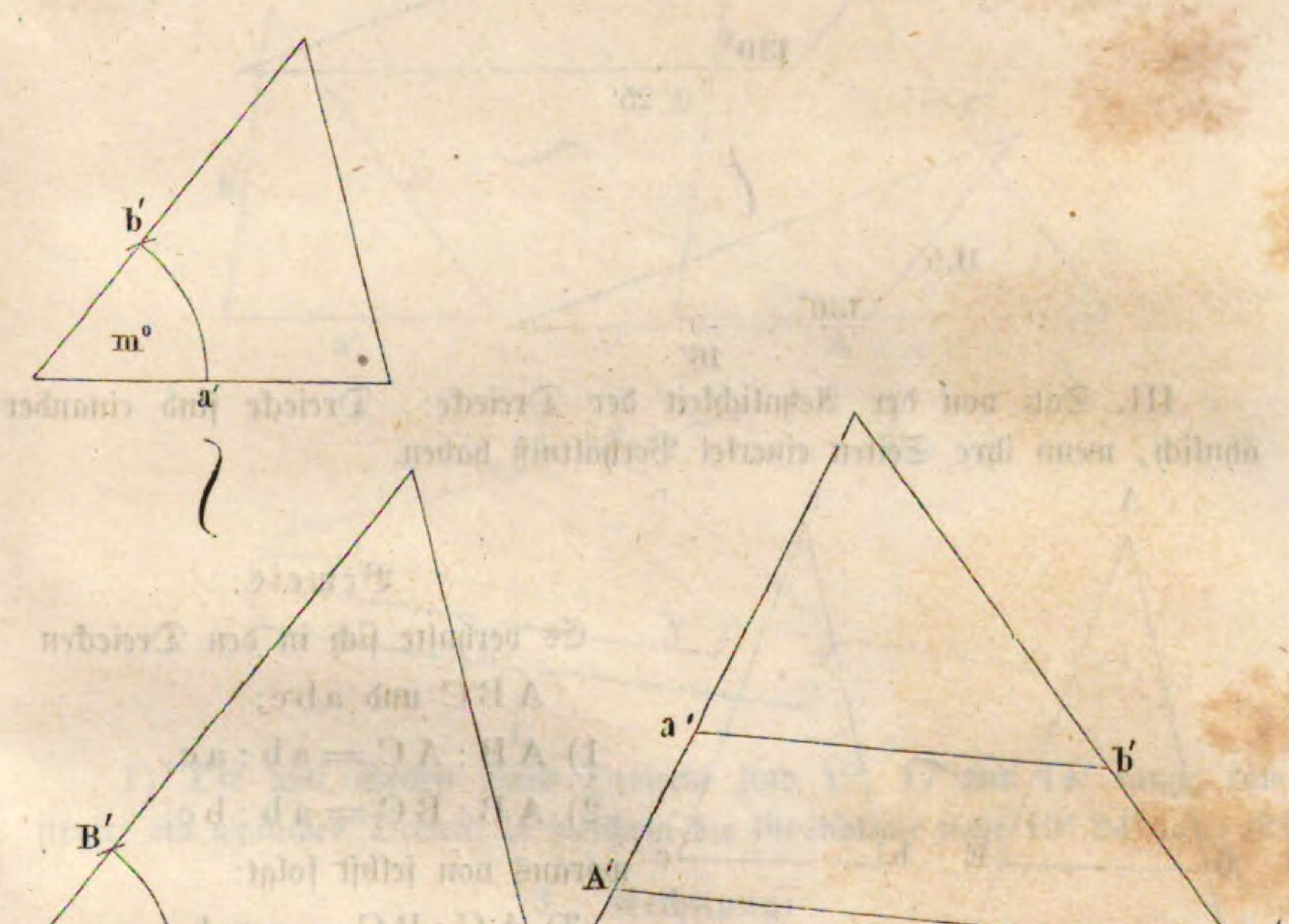
Ferner verhält sich AB : AC = AD : AE, und nach der Bedingung verhält sich AB : AC = ab : ac, also verhält sich AD : AE = ab : ac.

Da nun AD = ab ist, so ist auch AE = ac, ferner ∢A = ∢a; es ist also △ADE ≅ abc und da △ADE ∾ ABC ist, so ist ABC ∾ abc.



Aufgaben:

1) Die beiden Seiten eines Dreiecks sind a′ und b′ lang und schließen einen Winkel von m^0 ein; zeichne ein ähnliches Dreieck, in welchem die beiden gleichnamigen Seiten A′ und B′ lang sind!



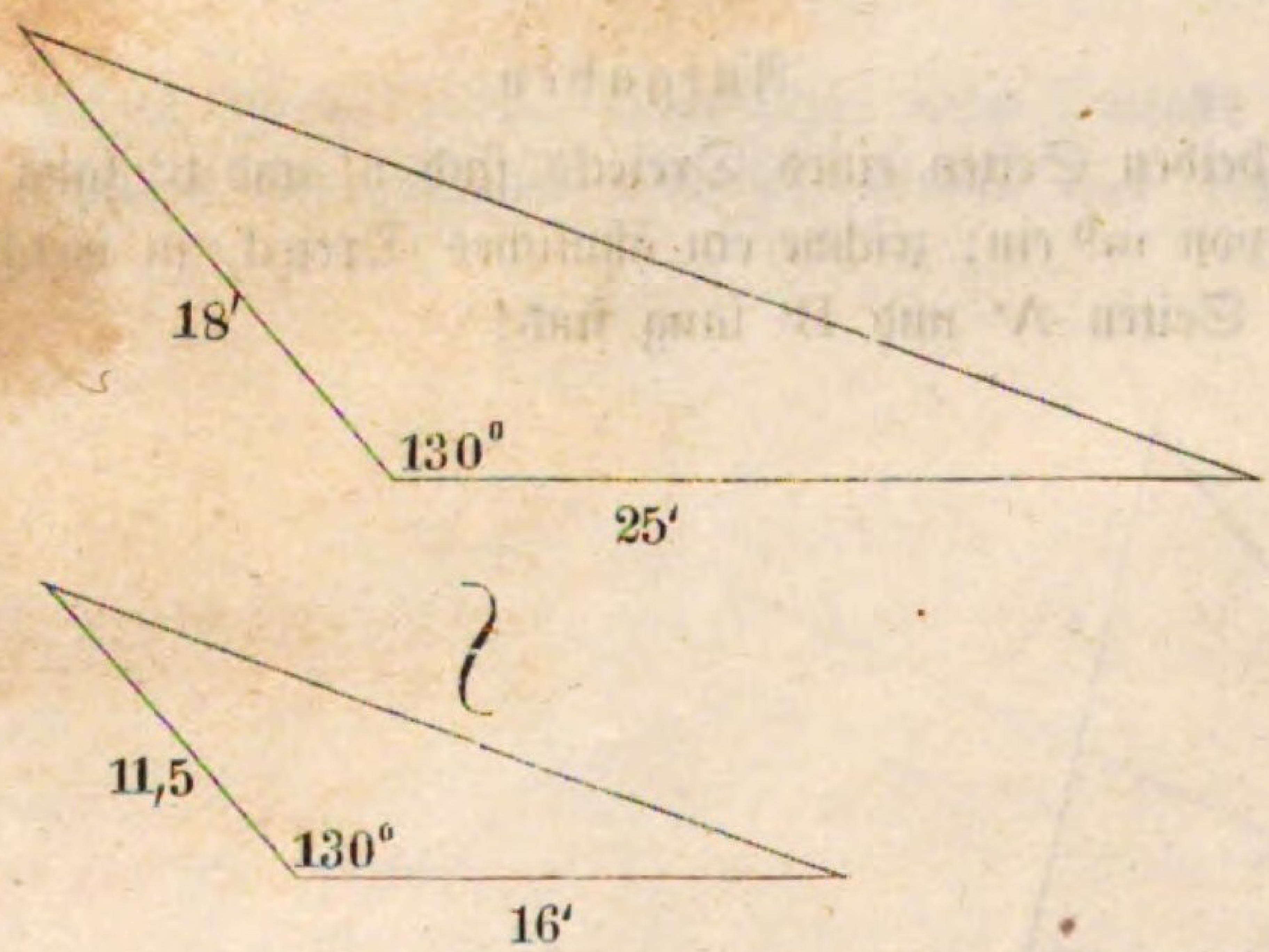
2) Zwei Seiten eines Dreiecks sind 25′ und 18′ lang und schließen einen Winkel von 130⁰ ein; construire ein ähnliches Dreieck, in welchem statt einer Seite von 25′ lang eine gleichnamige von 16′ vorkommt!

1. Rechnung:

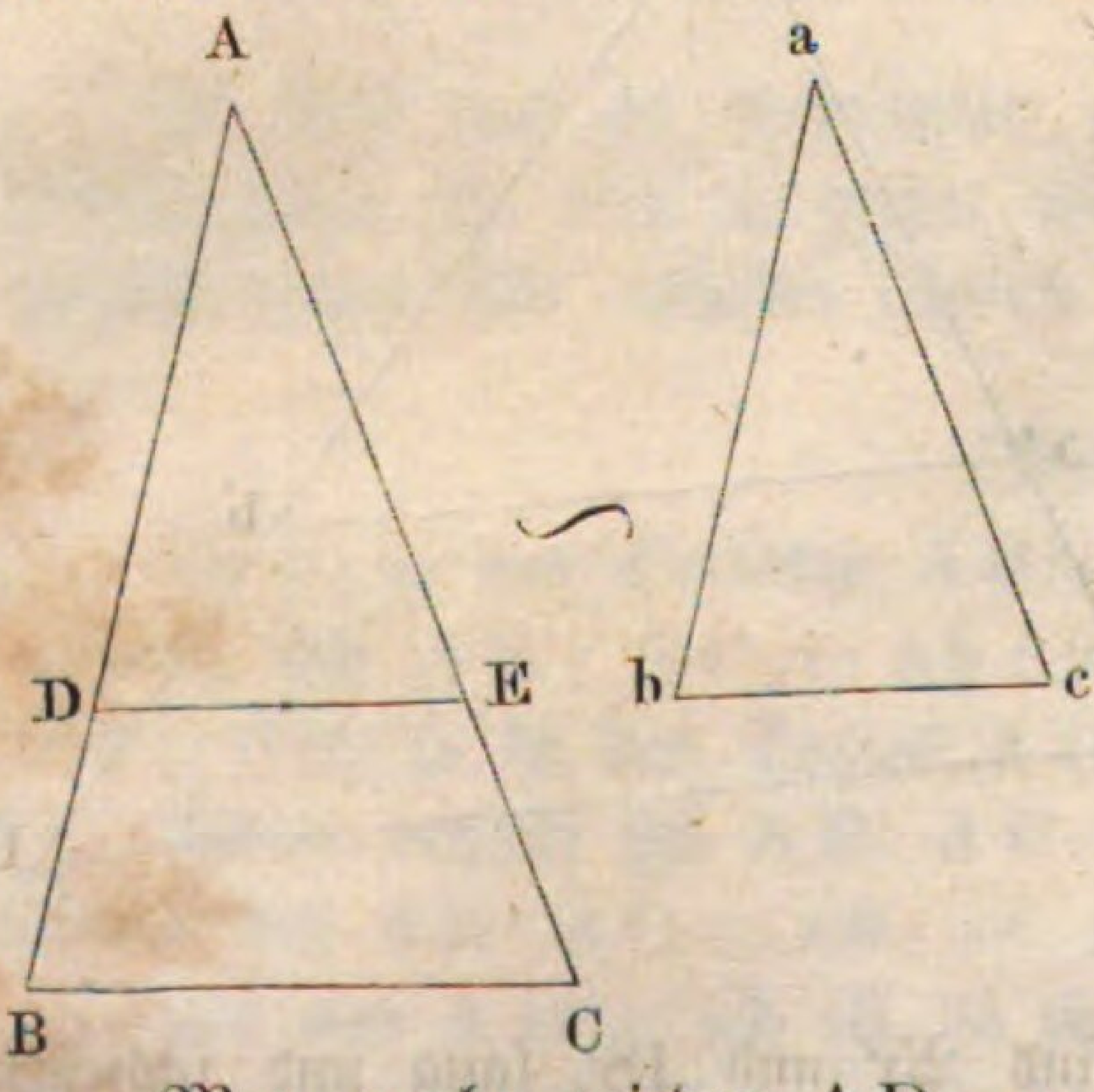
$25' : 16' = 18' : x$

25) 288 = 11,5'
25
38
25
130
125
5 Rest.

2. Zeichnung:



III. Satz von der Aehnlichkeit der Dreiecke: Dreiecke sind einander ähnlich, wenn ihre Seiten einerlei Verhältniß haben.



Beweis:

Es verhalte sich in den Dreiecken ABC und abc:

1) $AB : AC = ab : ac$,

2) $AB : BC = ab : bc$,

woraus von selbst folgt:

3) $AC : BC = ac : bc$.

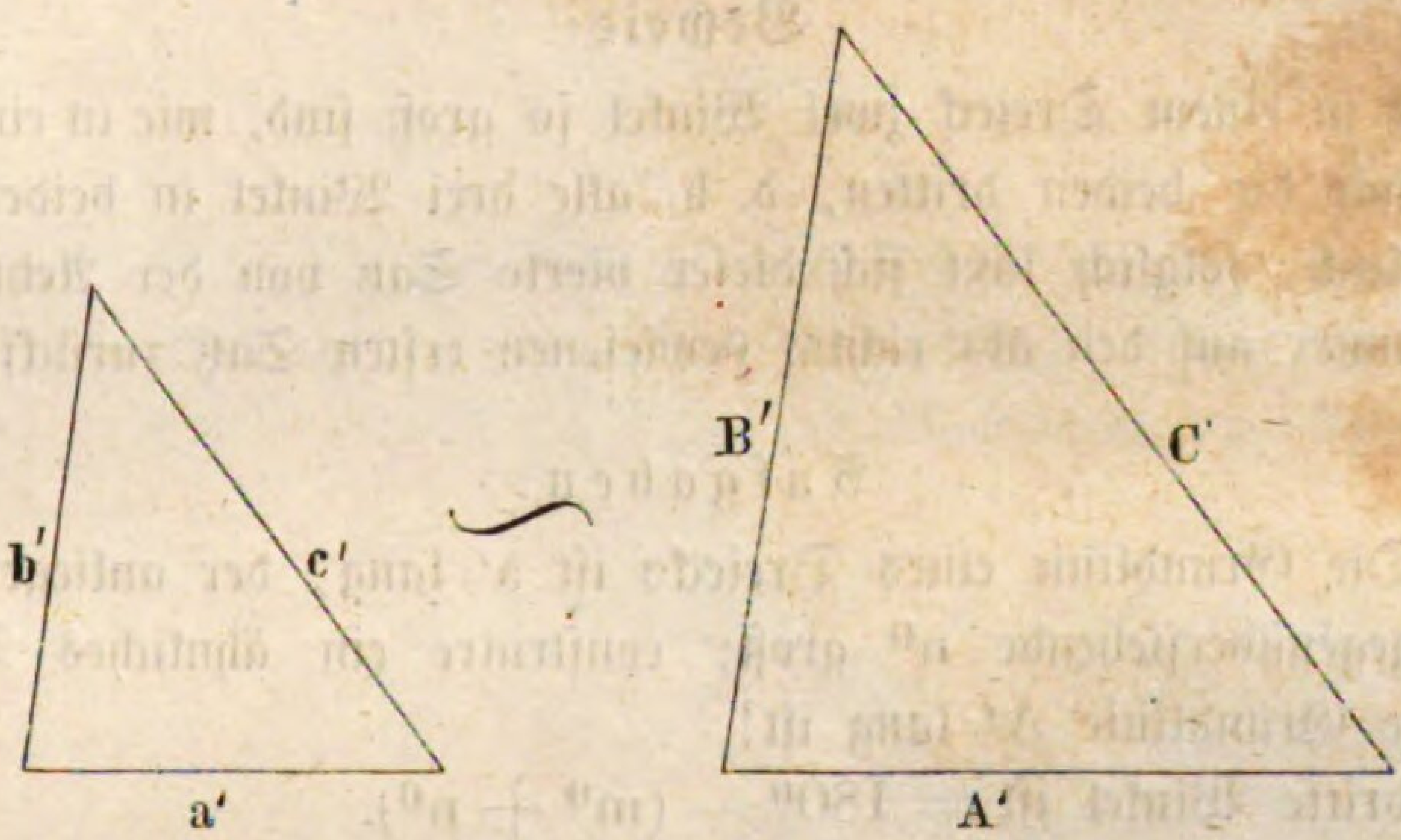
Man mache wieder $AD = ab$ und ziehe $DE \parallel BC$, so ist das Dreieck $ADE \backsim ABC$. Nun verhält sich $AB : AC = AD : AE$; diese

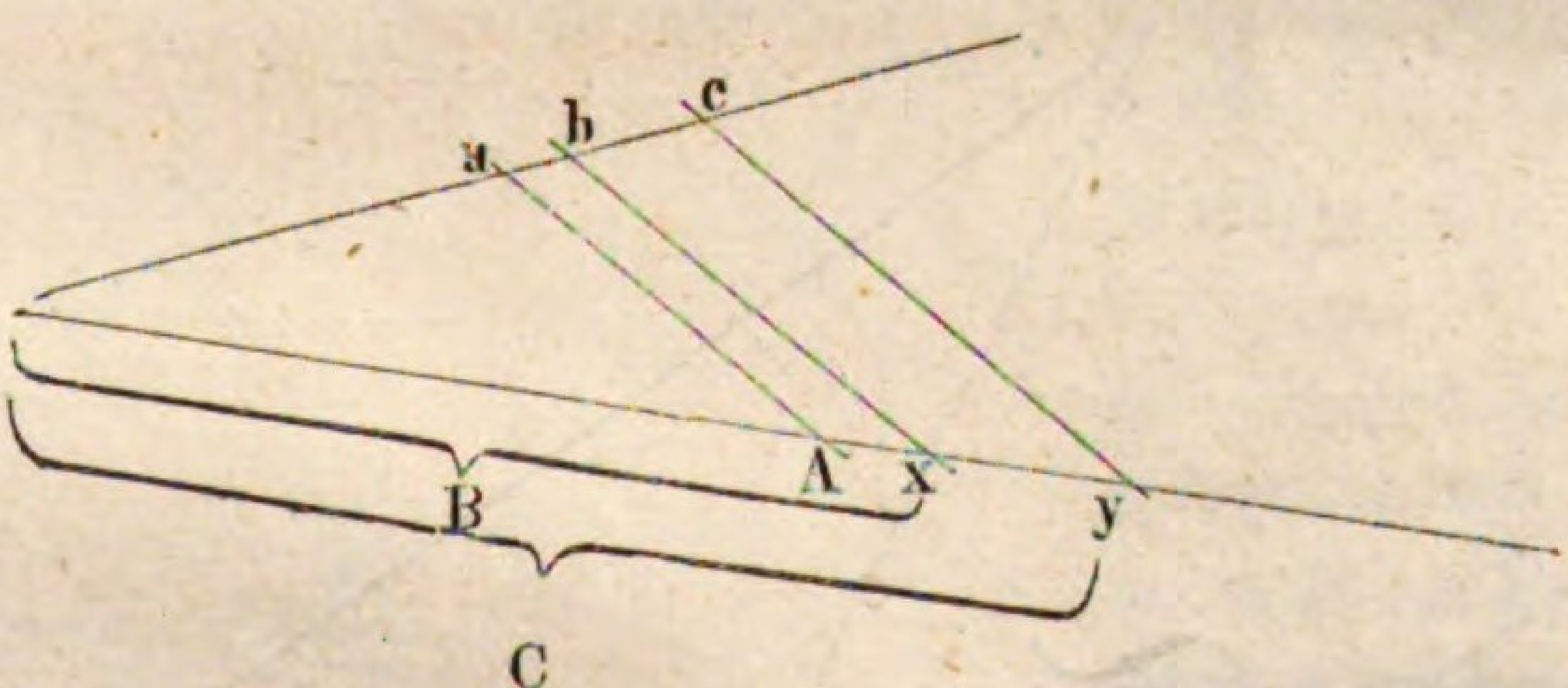
mit der ersten, der nach der Bedingung angenommenen Proportion verglichen, gibt, da $AD = ab$ ist, $AE = ac$. Ebenso verhält sich $AB : BC$ $AD : DE$, woraus nach Vergleichung mit der zweiten der obigen Proportionen folgt, daß $DE = bc$ ist; mithin ist

das Dreieck $ADE \cong abc$, und da
" " $ADE \sim ABC$ war, so ist auch
" " $ABC \sim abc$.

Aufgaben:

1) Die drei Seiten eines Dreiecks sind a, b und c' lang; zeichne ein ähnliches Dreieck, in welchem die gleichnamigen Seiten einerlei Verhältniß haben, d. h. A, B und C' lang sind!





1) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 19, 17 und 14' lang; construire ein ähnliches Dreieck, in welchem die Grundlinie statt 19' 24' lang ist!

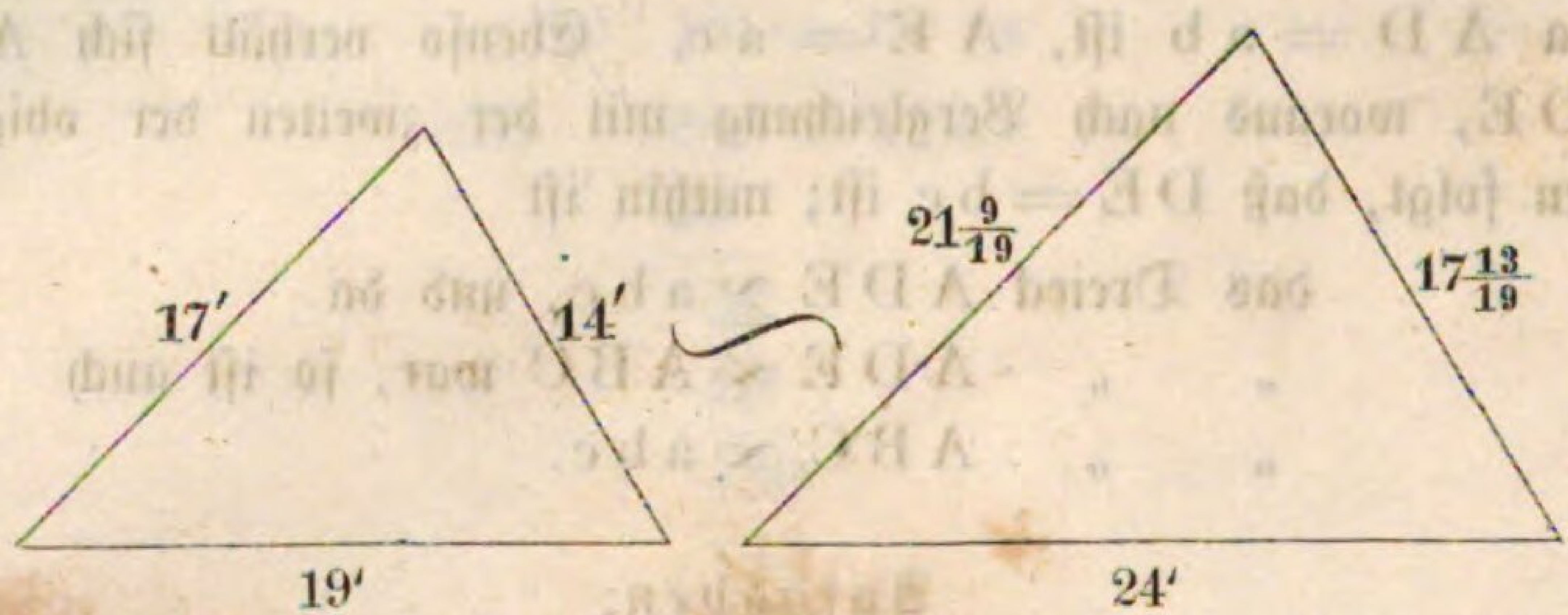
1. Rechnung:

$$19 : 24 = 17 : x$$

$$19)\quad 408 = 21^{9}/_{19} = x$$

$$y = \frac{24 \times 14}{19} = 17^{13}/_{19}$$

2. Zeichnung:



IV. Satz von der Aehnlichkeit der Dreiecke: Dreiecke, in denen eine Seite proportional ist, und ein anliegender Winkel und ein gegenüberstehender gleich sind, sind einander ähnlich.

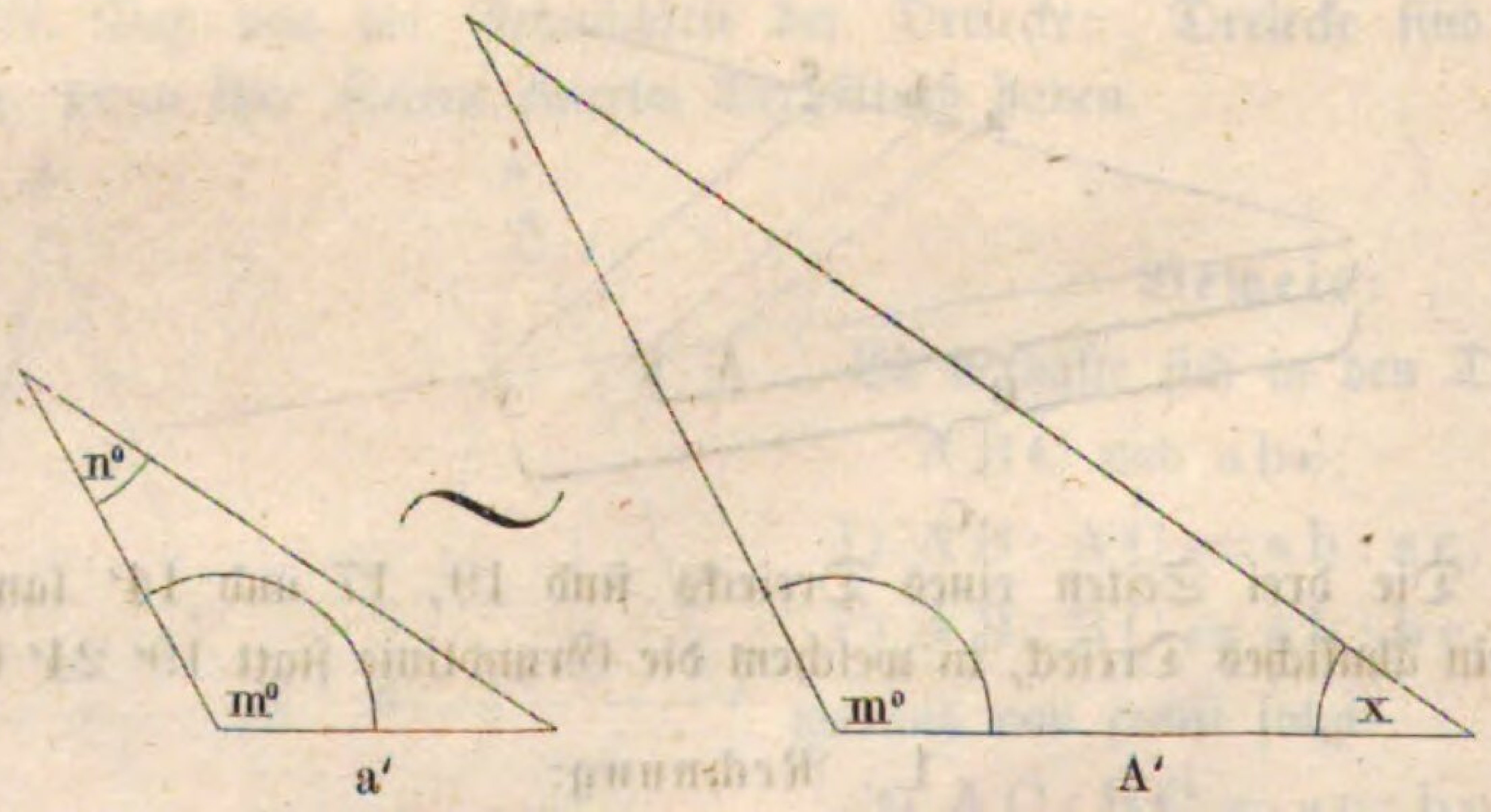
Beweis:

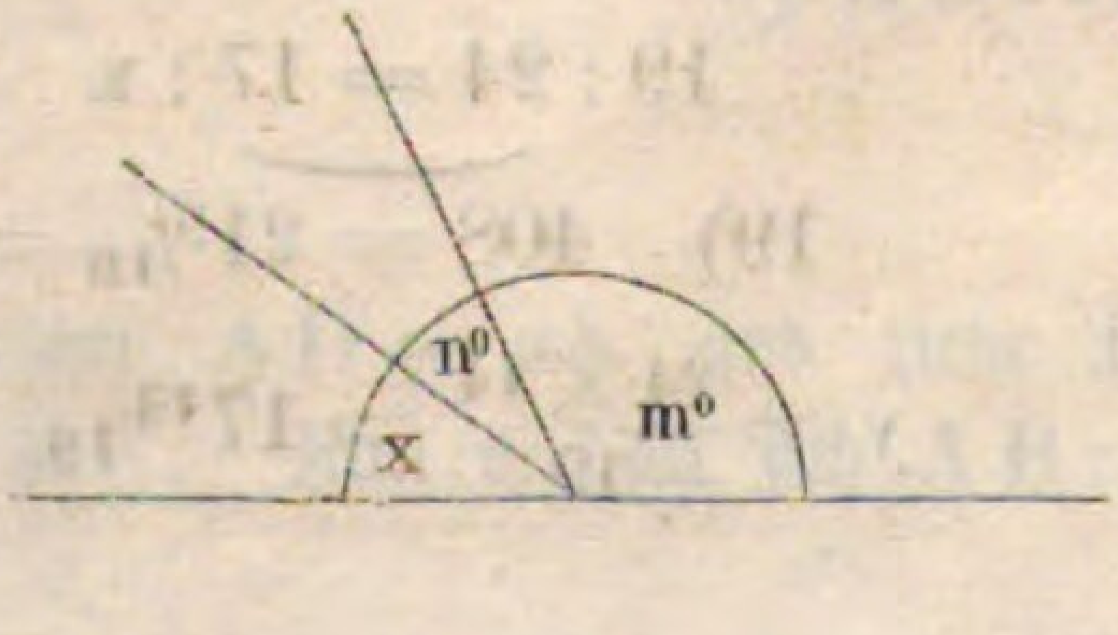
Wenn in einem Dreieck zwei Winkel so groß sind, wie in einem andern, so sind auch die beiden dritten, d. h. alle drei Winkel in beiden Dreiecken einander gleich; folglich läßt sich dieser vierte Satz von der Aehnlichkeit der Dreiecke immer auf den als richtig bewiesenen ersten Satz zurückführen.

Aufgaben:

1) Die Grundlinie eines Dreiecks ist a′ lang, der anliegende Winkel m^0, der gegenüberstehende n^0 groß; construire ein ähnliches Dreieck, in welchem die Grundlinie A′ lang ist!

Der dritte Winkel ist $= 180^0 - (m^0 + n^0)$.



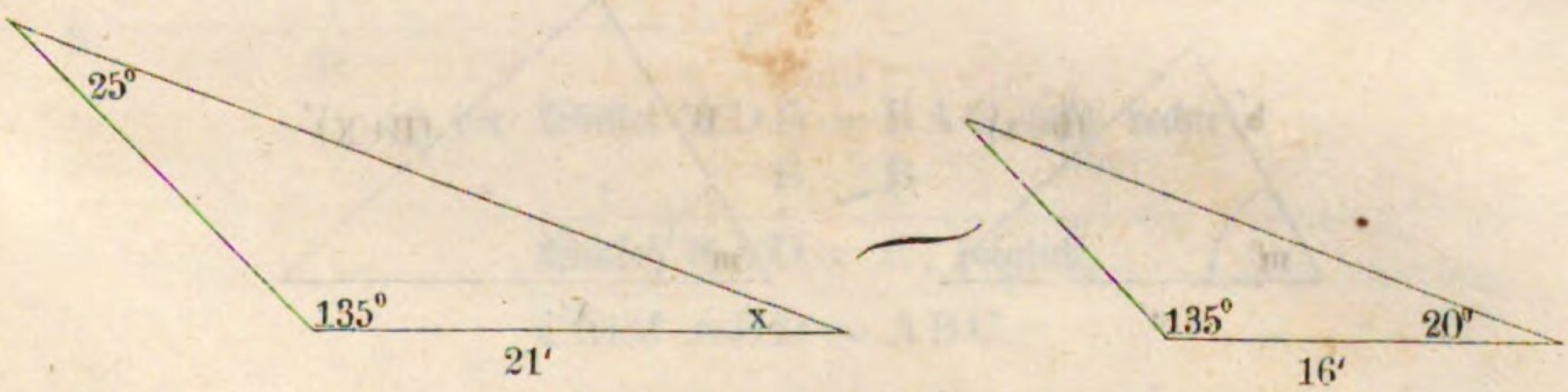


2) Die Grundlinie eines Dreiecks ist 21′ lang, der anliegende Winkel 135⁰, der gegenüberstehende 25⁰ groß; construire ein ähnliches Dreieck, in welchem die Grundlinie 16′ lang ist!

1. Rechnung:

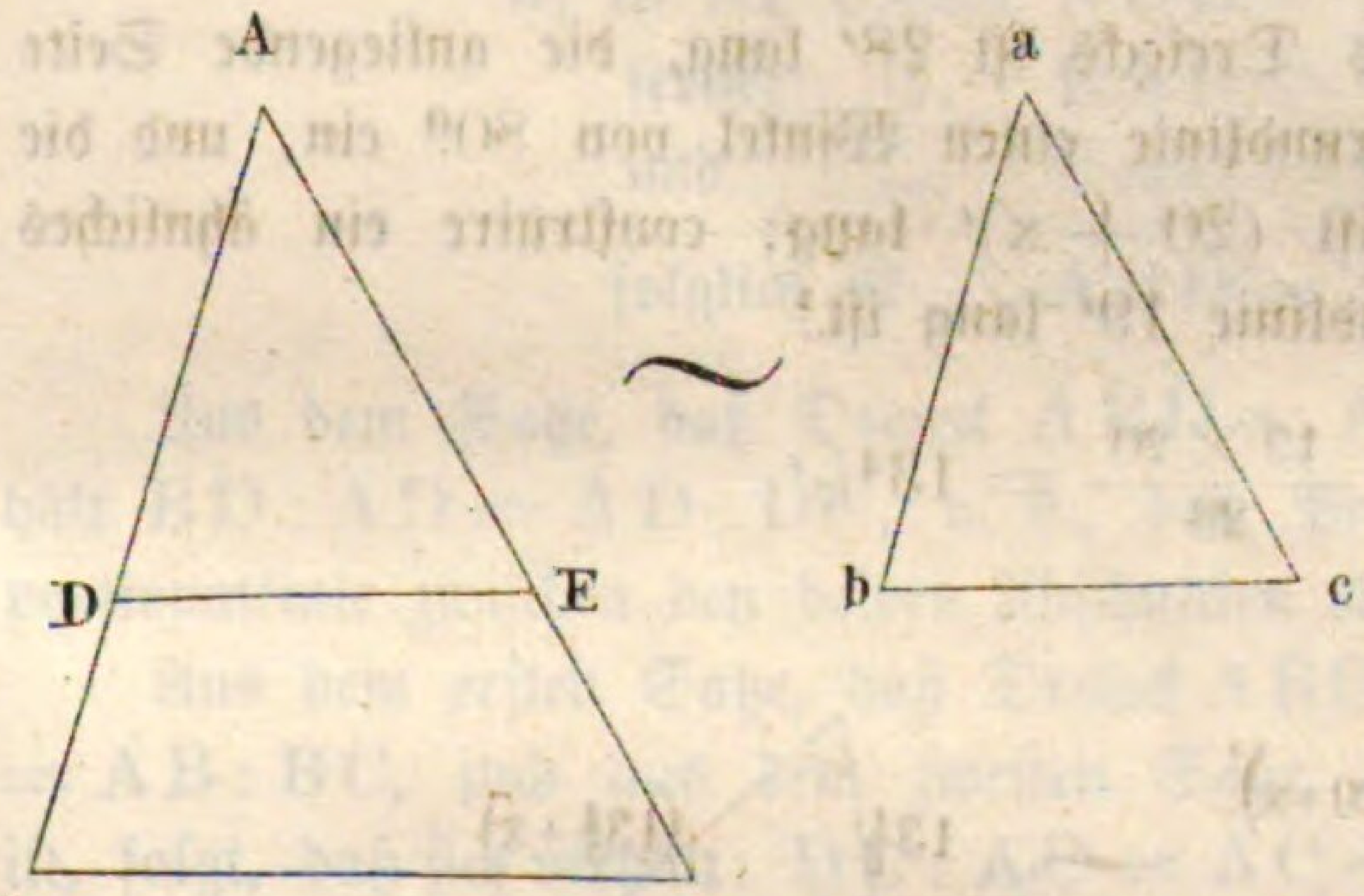
$$\sphericalangle x = 180^0 - (135^0 + 25^0) = 20^0.$$

2. Zeichnung:



V. Satz von der Aehnlichkeit der Dreiecke: Dreiecke sind endlich einander ähnlich, wenn zwei Seiten einerlei Verhältniß haben und der Winkel, welcher der größeren von diesen Seiten gegenüber liegt, in ihnen gleich ist.

Beweis:



Es verhalte sich in den Dreiecken ABC und abc AB : AC = ab : ac, und es sei der Winkel B = b, die Seite AC > AB und ac > ab; alsdann mache man AD = ab und ziehe DE || BC, so ist das Dreieck ADE ∾ ABC. Ferner verhält sich AB : AC = AD : AE. Diese Proportion mit der angenommenen verglichen, giebt: AE = ac. Da nun nach der Construction auch AD = ab und Winkel D = b ist, weil beide = B sind; so ist

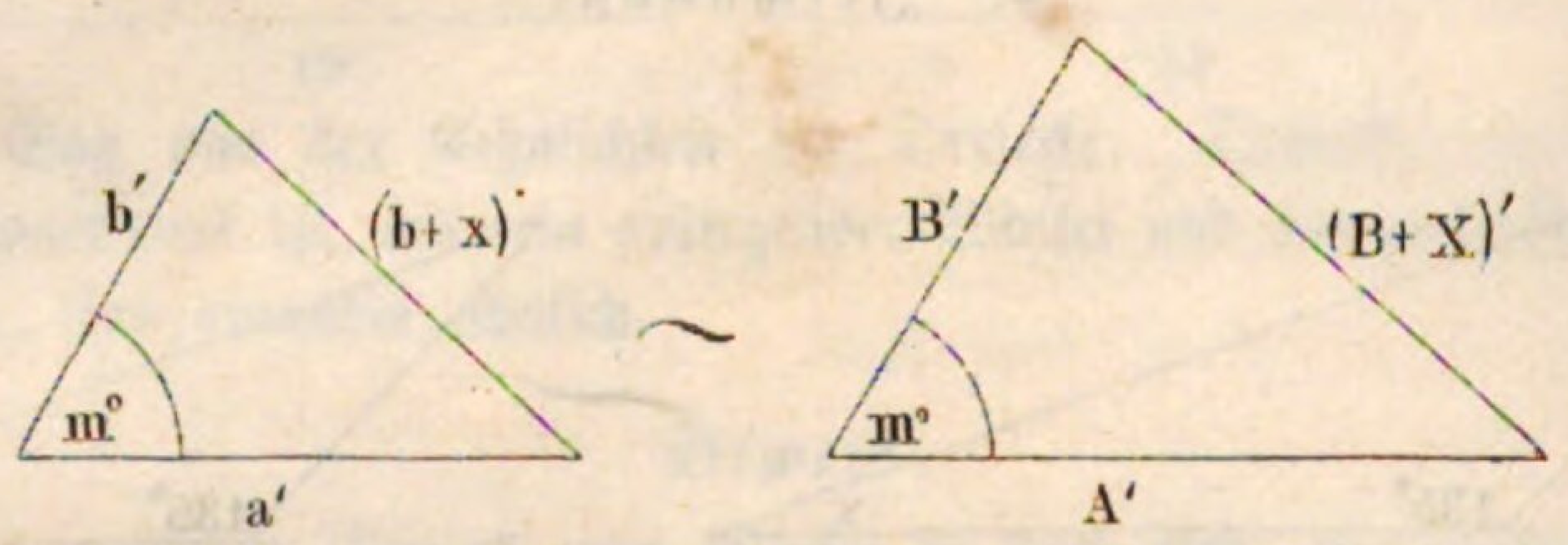
Dreieck ADE ≌ abc; nun ist
„ ADE ∾ ABC, also ist

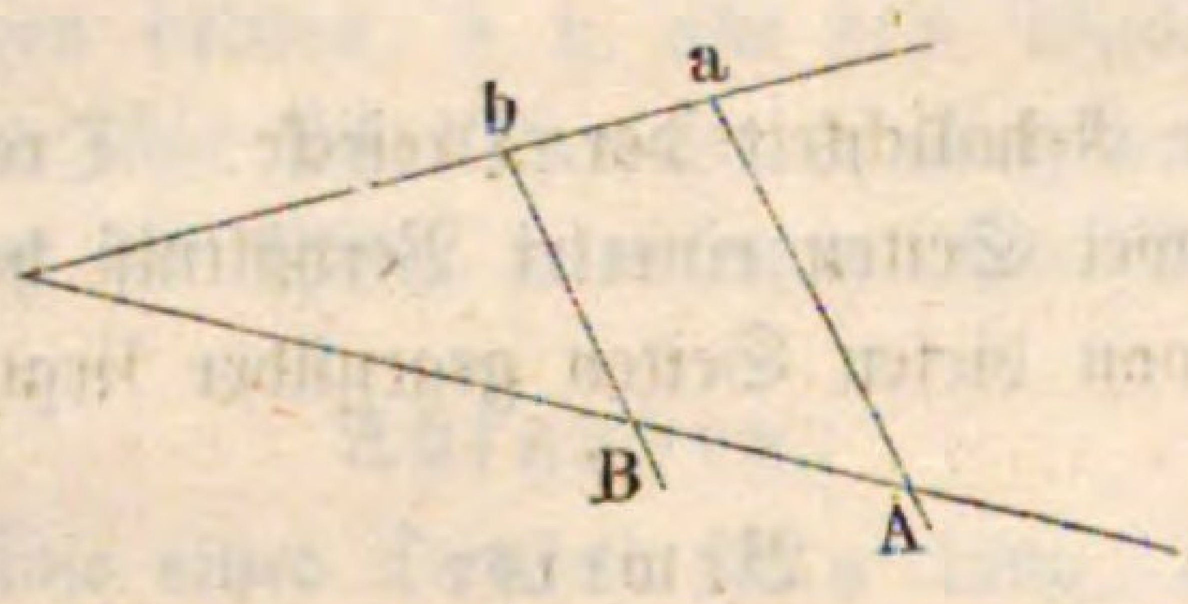
Dreieck ABC ∾ abc.

Wenn in rechtwinkligen Dreiecken eine Kathete und die Hypotenuse einerlei Verhältniß haben, so sind die Dreiecke einander ähnlich.

Aufgaben:

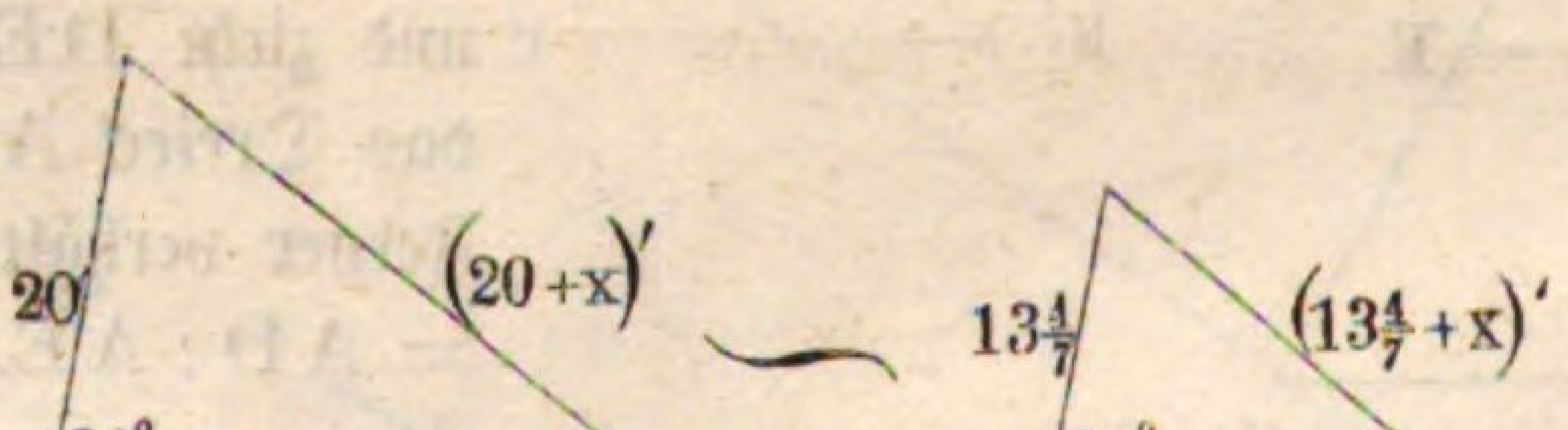
1) Die Grundlinie eines Dreiecks ist a' lang, die anliegende Seite mißt b' und schließt mit der Grundlinie einen Winkel von m^0 ein, die diesem Winkel gegenüberstehende Seite ist $(b + x)'$ lang; construire ein ähnliches Dreieck, in welchem die Grundlinie A' und die anliegende Seite B' lang ist!





2) Die Grundlinie eines Dreiecks ist 28′ lang, die anliegende Seite mißt 20′, schließt mit der Grundlinie einen Winkel von 80⁰ ein, und die ihr gegenüberliegende Seite ist $(20 + x)'$ lang; construire ein ähnliches Dreieck, in welchem die Grundlinie 19′ lang ist!

$$x = \frac{19 \times 20}{28} = 13^4/_7{}'$$

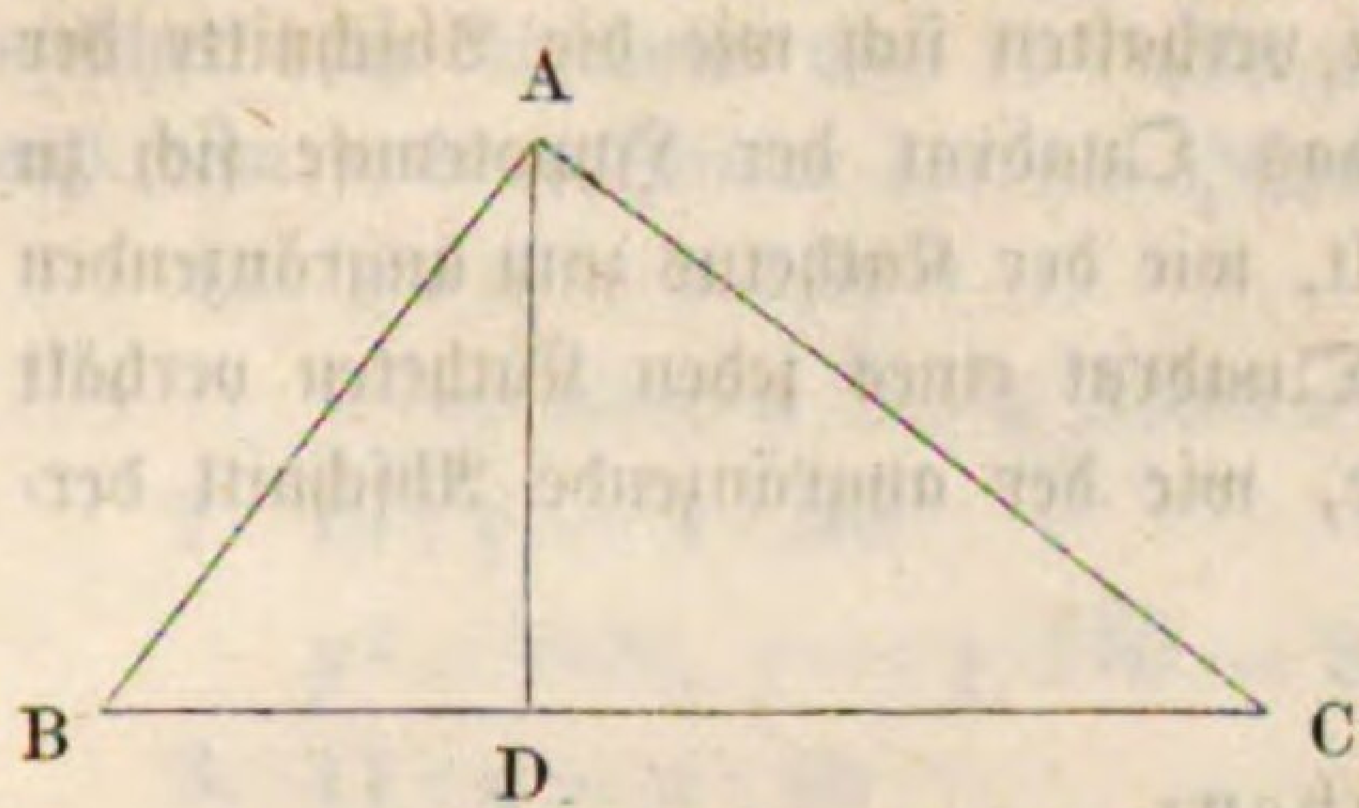


§. 4.

Arithmetisch-geometrischer Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes.

Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck ein Perpendikel aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällt wird, so entstehen zwei Dreiecke, von denen jedes dem ganzen, und das eine dem andern ähnlich ist.

Beweis:



Es sei das Dreieck ABC in A rechtwinklig und AD senkrecht auf BC gezogen, so ist

1) der Winkel $ADB = BAC$ (als rechte),
" " $B = B$

Winkel $BAD = C$; folglich

Dreieck $ABD \sim ABC$.

2) ist der Winkel $ADC = BAC$ ($= R$)
" " $C = C$

mithin ist $\sphericalangle\ CAD = B$; folglich

Dreieck $ACD \sim ABC$.

3) ist der Winkel $ADB = ADC$ (als rechte)
ferner " $BAD = C$ (nach 1)
und " $CAD = B$ (nach 2);

folglich ist $\triangle\ ABD \sim ACD$.

Aus dem Satze, daß Dreieck $ABD \sim ACD$ ist, folgt, daß sich verhält $BD : AD = AD : DC$, d. h., das Perpendikel ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden Abschnitten oder Segmenten der Hypotenuse.

Aus dem ersten Satze, daß Dreieck $ABD \sim ABC$ ist, folgt $BD : AB = AB : BC$, und aus dem zweiten Satze, daß Dreieck $ACD \sim ABC$ folgt, daß sich verhält: $DC : AC = AC : BC$, d. h., ein jeder Kathetus des Dreiecks ABC ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Abschnitt der Hypotenuse, der mit ihm zusammenstößt, und der ganzen Hypotenuse.

Aus der Proportion: $BD : AB = AB : BC$ folgt weiter, daß $AB^2 = BD \times BC$, und aus der Proportion: $DC : AC = AC : BC$ folgt ebenso: $AC^2 = DC \times BC$. Werden die beiden Gleichungen
$AB^2 = DB \times BC$ und
$AC^2 = DC \times BC$ addirt, so ist

$AB^2 + AC^2 = DB \times BC + DC \times BC = (BD + DC)BC = BC^2$, was zu beweisen war.

Aus der Gleichung: $AB^2 = BD \times BC$ und $AC^2 = DC \times BC$ folgt, daß sich verhält $AB^2 : AC^2 = BD \times BC : DC \times BC = BD : DC$, d. h. die Quadrate der beiden Katheten verhalten sich wie die Abschnitte der Hypotenuse, und hieraus folgt, daß das Quadrat der Hypotenuse sich zu dem Quadrat eines jeden Katheten verhält, wie der Kathetus zum angränzenden Abschnitt der Hypotenuse, oder: das Quadrat eines jeden Katheten verhält sich zu dem Quadrat der Hypotenuse, wie der angränzende Abschnitt derselben zur ganzen Hypotenuse.

Aufgaben:

1) Das Perpendikel aus der Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse ist 15′ lang, der eine Abschnitt der Hypotenuse ist = 9′; wie lang ist der andere Abschnitt, und wie groß die ganze Hypotenuse?

$$9' : \underbrace{15' = 15'} : x$$

$9 \mid 225 = 25'$ ist der andere Abschnitt, also die ganze Hypotenuse $= 9 + 25 = 34'$.

2) Die beiden Segmente der Hypotenuse, welche durch ein Perpendikel aus dem rechten Winkel des Dreiecks abgeschnitten sind, sind 14′ und 25′ lang; wie lang ist das Perpendikel?

$$\underbrace{25 : x = x : 14}$$

$$x^2 = 350, \quad x = \sqrt{350} = 18{,}708'.$$

3) Der eine Kathetus eines rechtwinkligen Dreiecks ist 12′ lang, das ihm anliegende, durch ein Perpendikel aus dem rechten Winkel abgeschnittene Stück der Hypotenuse ist 8′ lang; wie lang ist die ganze Hypotenuse, wie lang der andere Kathetus und wie lang das gefällte Perpendikel?

1. $8 : \underbrace{12 = 12} : x$

$$\frac{144}{8} = 18' \text{ ist die Hypotenuse.}$$

2. Der andere Kathetus ist $= \sqrt{(18^2 - 12^2)} = \sqrt{180} = 13{,}416'$.

3. Das gefällte Perpendikel ist $= \sqrt{(12^2 - 8^2)} = \sqrt{80} = 8{,}9$
$= \sqrt{(13{,}416^2 - 10^2)} = \sqrt{79{,}98} = 8{,}9$

oder endlich $8 : \underbrace{x = x} : 10$

$$\underbrace{\quad x^2 \quad}$$

$$80, \text{ also } x^2 = 80, \quad x = \sqrt{80} = 8{,}9.$$

4) Die beiden Segmente der Hypotenuse sind 11′ und 19′ lang; wie lang ist der Kathetus x, welcher dem Stück von 11′, wie lang der Kathetus y, welcher dem Abschnitt von 19′ anliegt, und wie lang ist das Perpendikel z aus dem rechten Winkel auf die Hypotenuse?

1. $11 : x = x : 30$

$x^2 = 330,\ x = \sqrt{330} = 18{,}16'$.

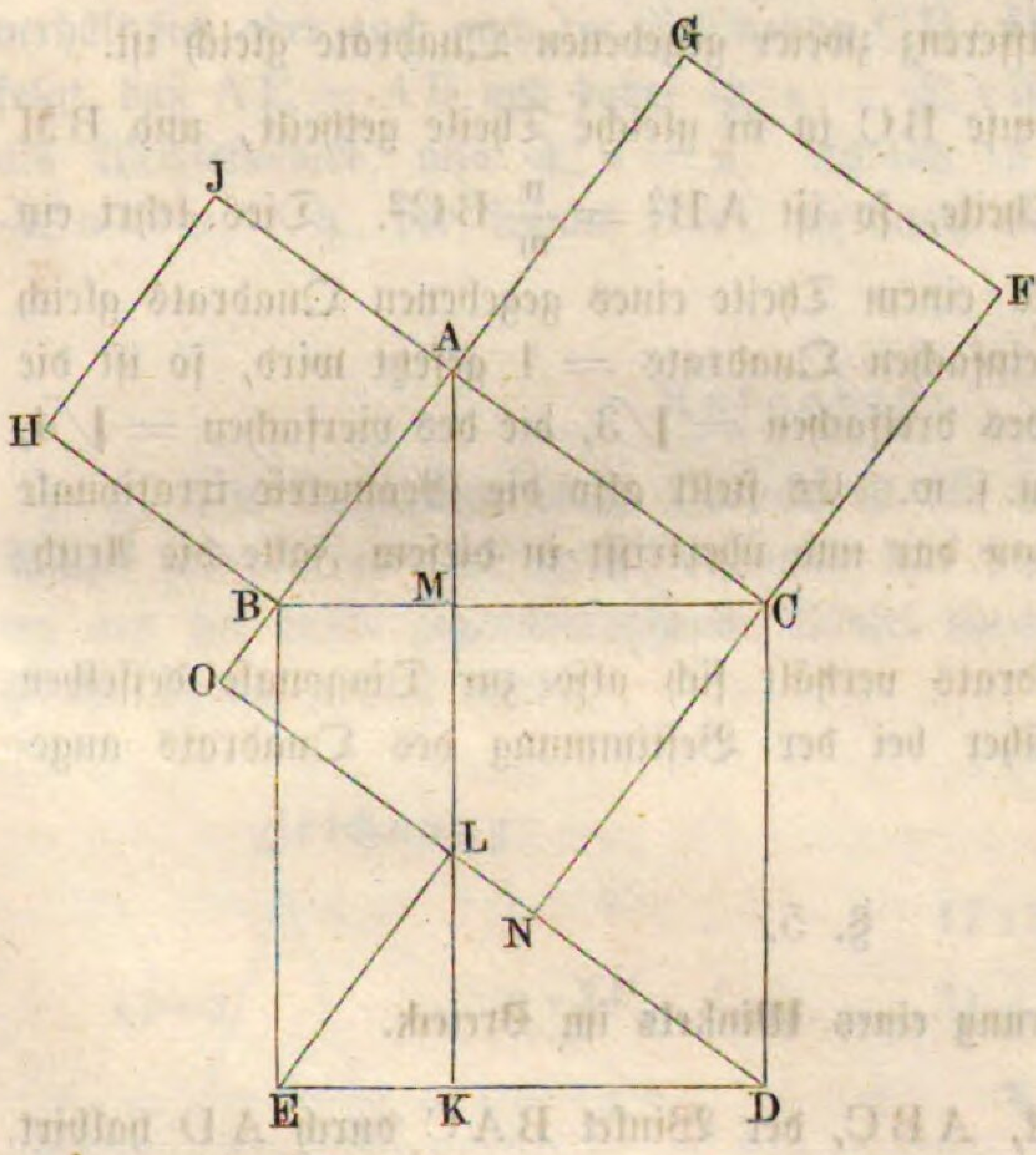
2. $19 : y = y : 30$

$y^2 = 570,\ y = \sqrt{570} = 23{,}874$.

3. $11 : z = z : 19$

$z^2 = 209,\ z = \sqrt{209} = 14{,}456'$.

In §. 6, Abschnitt III., haben wir die Wahrheit des pythagoräischen Lehrsatzes nach dem Euklid durch die Congruenzsätze bewiesen, in diesem Paragraphen bewiesen wir die Richtigkeit dieses wichtigen Satzes mit Hülfe der Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren, und endlich soll hier noch der Beweis gegeben werden, den der Erfinder Pythagoras selbst geführt hat:



Es sei ABC das rechtwinklige Dreieck, BCDE das Quadrat der Hypotenuse, ACFG und ABHJ die Quadrate der beiden Katheten. Man ziehe AK ‖ BE, mache AL = BE und ziehe EL und LD.

Da BE ‡ AL und AL ‡ CD ist, so ist sowohl ABEL als ACDL ein Parallelogramm.

Man fälle ferner aus C das Perpendikel CN auf LD, so ist das Dreieck CND ≅ ABC, weil in beiden eine Seite, BC und CD, und die daran liegenden Winkel gleich sind; folglich ist CN = AC = CF.

Es ist daher das Quadrat ACFG gleich dem Parallelogramm ACDL, da beide Figuren einerlei Grundlinie, AC, und gleiche Höhe, CF und CN, haben. Das Parallelogramm ACDL aber ist = CDKM, denn Parallelogramme über einerlei Grundlinie und zwischen denselben Parallelen sind ein-

ander gleich. Man fälle endlich aus L das Perpendikel LO auf die verlängerte Seite AB, so ist das Dreieck AOL nach dem zweiten Congruenzsatze congruent ABC; folglich ist LO = AB = AJ. Es ist daher das Quadrat ABHJ = dem Parallelogramm ABEL, da beide einerlei Grundlinie, AB, und gleiche Höhe, AJ und LO, haben. Das Parallelogramm ABEL aber ist = dem Rechteck BEKM, weil beide dieselbe Grundlinie haben und zwischen denselben Parallelen liegen; folglich ist BEKM = ABHJ.

Aus CDKM = ACFG und aus
BEKM = ABHJ folgt:

CDKM + BEKM = ACFG + ABHJ, d. h.,
BCDE = ACFG + ABHJ, was zu beweisen war.

Aus der Gleichung $BC^2 = AC^2 + AB^2$ folgt, daß

$$AC^2 = BC^2 - AB^2, \text{ also}$$

$$AC = \sqrt{(BC^2 - AB^2)} \text{ ist.}$$

Hieraus ergibt sich, wie man den einen Kathetus aus der Hypotenuse und dem andern Katheten bestimmen, oder, wie man die Seite eines Quadrats finden kann, welches der Differenz zweier gegebenen Quadrate gleich ist.

Es werde die Hypotenuse BC in m gleiche Theile getheilt, und BM enthalte davon n solcher Theile, so ist $AB^2 = \frac{n}{m} BC^2$. Dies lehrt ein Quadrat finden, das irgend einem Theile eines gegebenen Quadrats gleich ist. Wenn die Seite des einfachen Quadrats = 1 gesetzt wird, so ist die des doppelten = $\sqrt{2}$, die des dreifachen = $\sqrt{3}$, die des vierfachen = $\sqrt{4}$, die des fünffachen = $\sqrt{5}$ u. s. w. Es stellt also die Geometrie irrationale Verhältnisse vollkommen genau dar und übertrifft in diesem Falle die Arithmetik an Genauigkeit.

Die Seite eines Quadrats verhält sich also zur Diagonale desselben wie $1 : \sqrt{2}$, wie schon früher bei der Bestimmung des Quadrats angedeutet ist.

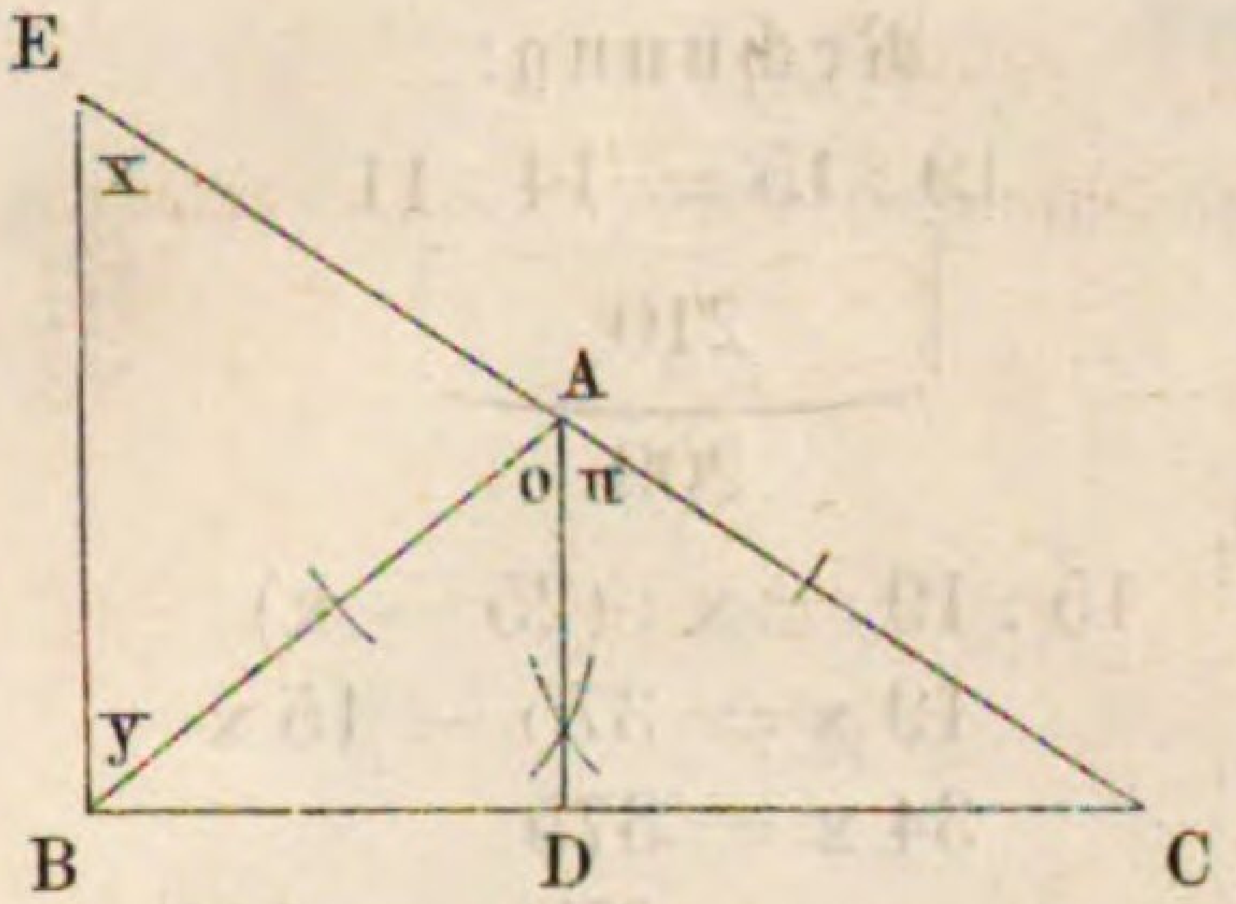
§. 5.

Die Halbirung eines Winkels im Dreieck.

Wenn in einem Dreieck, ABC, der Winkel BAC durch AD halbirt wird, so verhält sich CD : DB = AC : AB, d. h., die Abschnitte (Segmente) der Seite BC verhalten sich wie die beiden angränzenden andern Seiten.

Beweis:

Man verlängere AC, so daß AE = AB werde, und ziehe EB, so



ist $\sphericalangle x = \sphericalangle y$. Ferner ist der Winkel BAC als Außenwinkel $= x + y$ oder $= 2y$; folglich ist die Hälfte des Winkels $BAC = y$; mithin $AD \parallel EB$, also verhält sich $CD : DB = CA : AE$, und da nach der Construction $AE = AB$ ist, so verhält sich auch $CD : DB = AC : AB$.

Wenn umgekehrt in einem Dreieck, ABC, eine Linie, AD, aus der Spitze des Winkels BAC nach der gegenüberliegenden Seite BC so gezogen wird, daß sich verhält $CD : DB = AC : AB$, so ist der Winkel BAC durch AD halbirt.

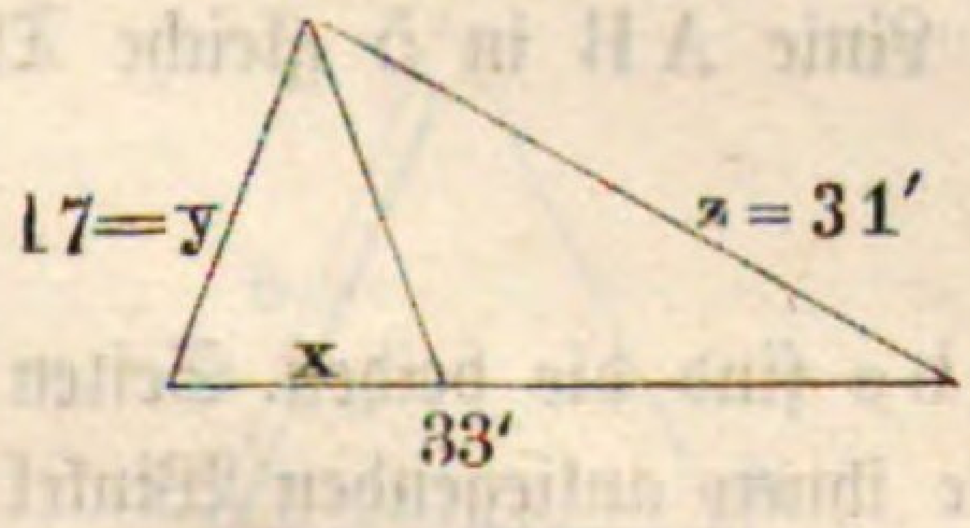
Beweis:

Durch B ziehe man $BE \parallel AD$ und verlängere die Seite AC, bis sie die Linie BE in E schneidet, so verhält sich $CD : DB = AC : AE$. Es verhält sich aber auch nach der Bedingung $CD : DB = CA : AB$. Daraus folgt, daß $AE = AB$ und daher $\sphericalangle x = \sphericalangle y$ ist; ferner ist $\sphericalangle o = \sphericalangle y$ als Wechselwinkel, also $\sphericalangle o = x$. Endlich ist auch $\sphericalangle u = x$; folglich $\sphericalangle o = u$, d. h., der Winkel BAC ist durch die Linie AD halbirt.

Aufgaben:

1) Die Grundlinie eines Dreiecks ist 33′ lang, die beiden anliegenden Winkel sind 70 und 30° groß; bestimme den Punkt in der Grundlinie, von wo aus der dritte gegenüberstehende Winkel durch eine gerade Linie in zwei gleiche Theile getheilt wird!

Zeichnung:

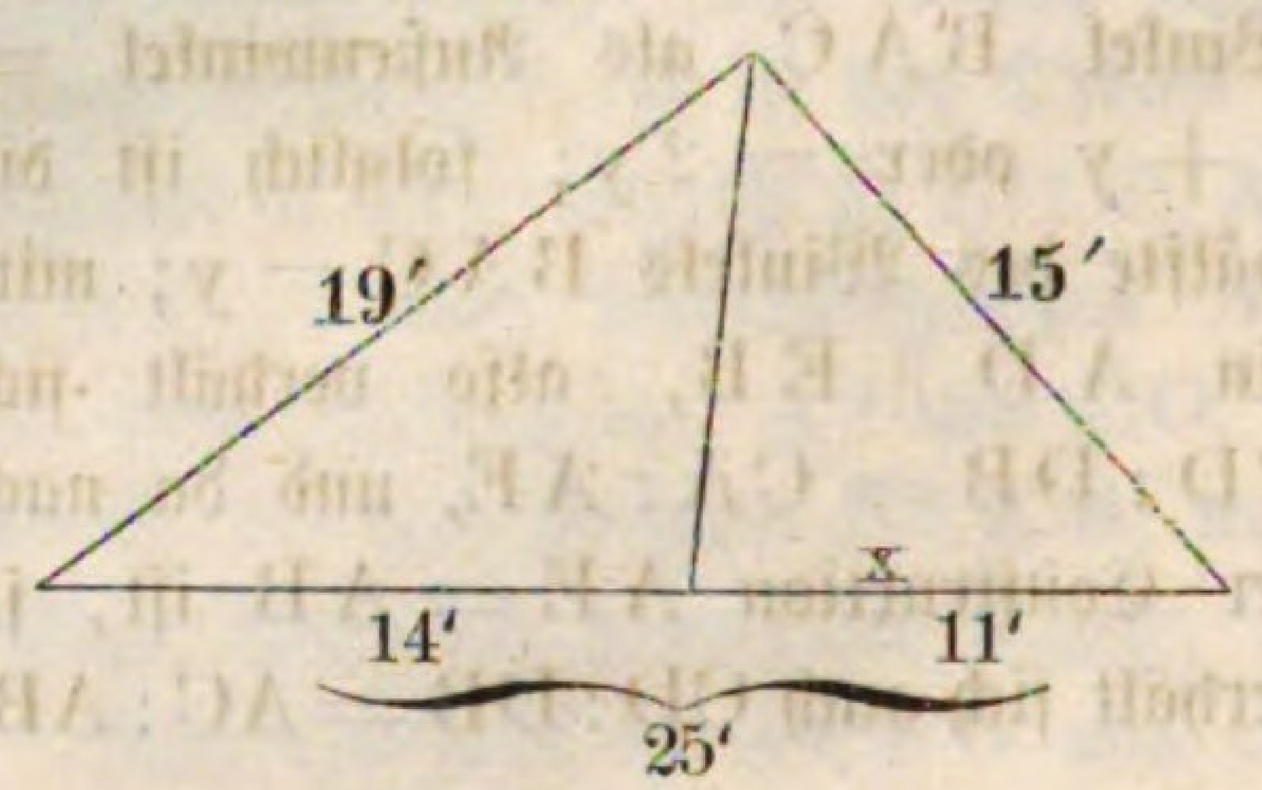


Rechnung:

$$17 : 31 = x : (33 - x)$$
$$31x = 561 - 17x$$
$$x = {}^{561}/_{48} = 11\,{}^{11}/_{16}{}'$$

2) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 25, 19 und 15′ lang; theile die Grundlinie von 25′ so, daß sich die beiden Segmente wie die beiden andern Seiten des Dreiecks verhalten, und prüfe die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!

Zeichnung:



Rechnung:

$19 : 15 = 14 : 11$

210

209

$15 : 19 = x : (25 - x)$

$19\,x = 375 - 15\,x$

$34\,x = 375$

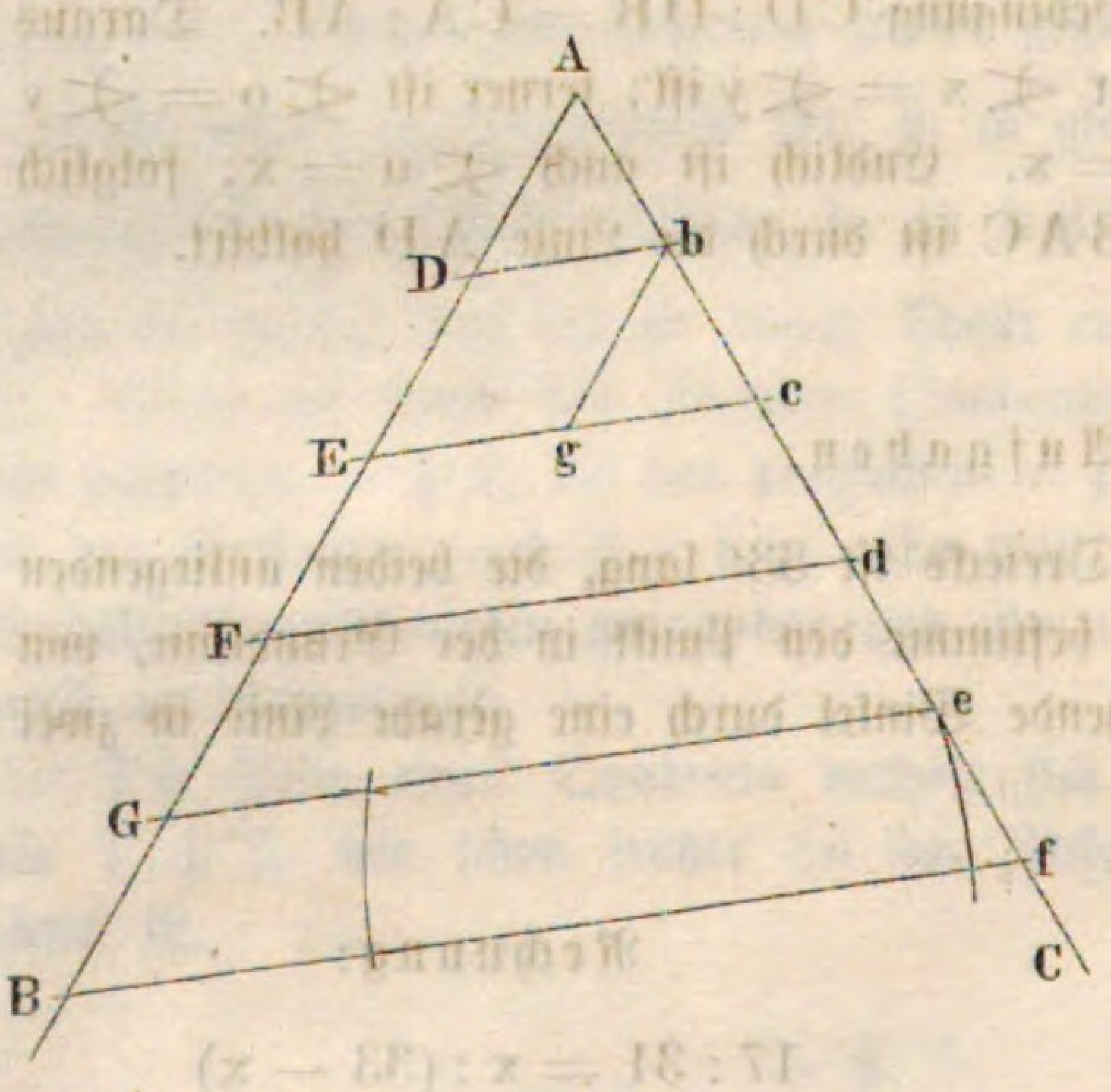
$x = {}^{375}/_{34} = 11\,{}^{1}/_{34}{}'.$

§. 6.

Aufgaben:

1) Eine gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, etwa in fünf gleiche Theile zu theilen.

Auflösung:



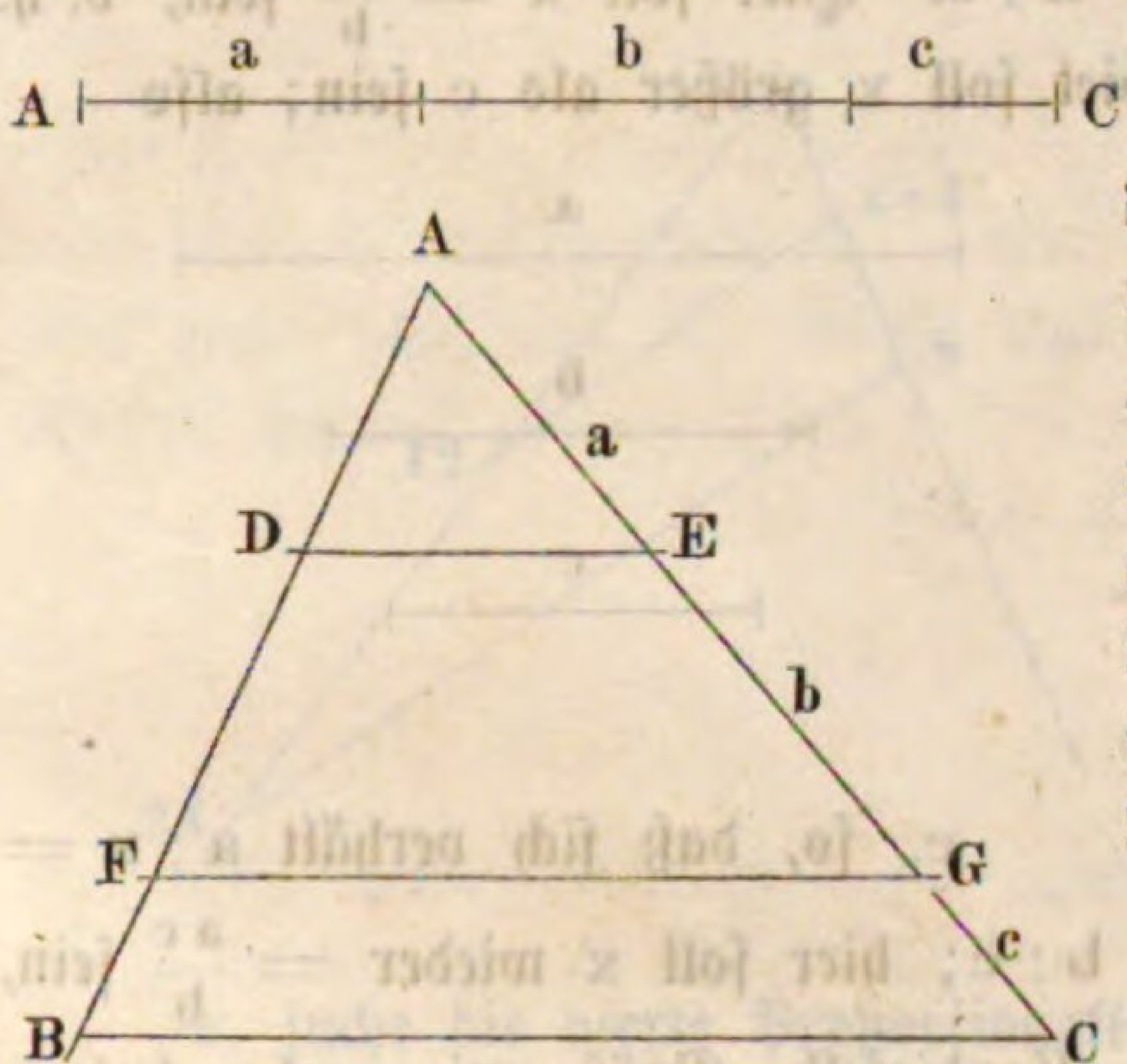
Es soll z. B. die Linie AB in 5 gleiche Theile getheilt werden; man lege eine andere gerade Linie, AC, unter einem beliebigen Winkel an A, schneide auf derselben von A aus 5 gleiche Theile: Ab, bc u. s. w. ab. Den letzten Theilungspunkt f verbinde man durch eine gerade Linie mit B und ziehe durch die übrigen Theilungspunkte lauter Parallelen zu Bf, so theilen diese auch die Linie AB in 5 gleiche Theile.

Beweis:

In den beiden Dreiecken DAb und gbc sind die beiden Seiten Ab und bc nach der Construction gleich, und die ihnen anliegenden Winkel sind als correspondirende gleich groß; mithin DAb $\cong$ gbc und daher AD = DE = EF u. s. w.

2) Eine gerade Linie so zu theilen, daß die Theile sich wie die Abschnitte einer andern gegebenen Linie verhalten.

Auflösung:



Es soll z. B. die Linie AB in drei Theile getheilt werden, welche sich wie die Abschnitte a, b, c der Linie AC verhalten. Man lege beide Linien unter einem beliebigen Winkel, A, an einander, ziehe BC und durch G und E die Parallelen GF und ED mit BC, so wird AB dadurch auf die verlangte Weise getheilt.

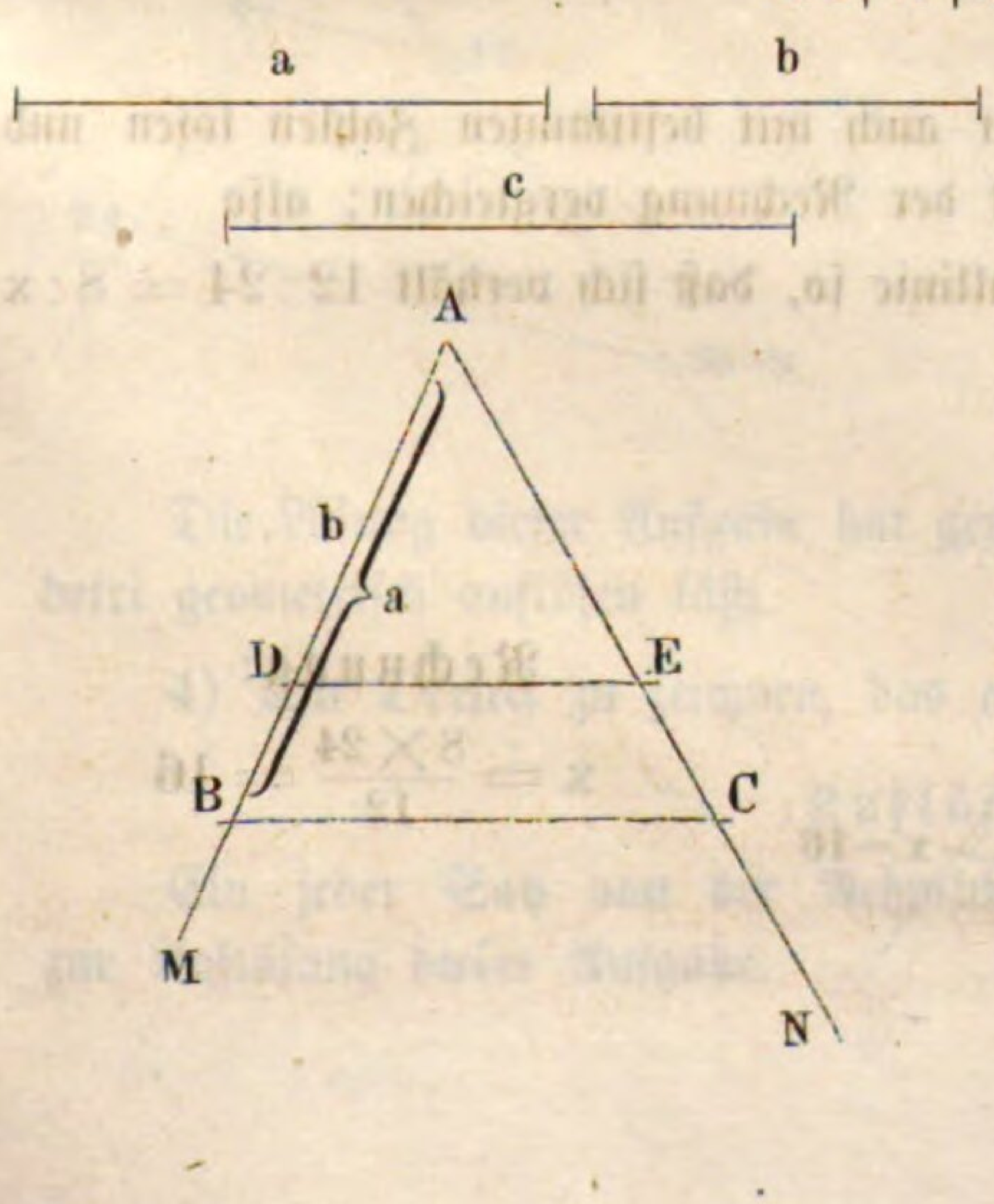
Beweis:

In dem Dreieck AFG verhält sich
1. AD : DF = AE : EG, ebenso
2. AD : AE = AF : AG. In dem Dreieck ABC aber verhält sich
3. FB : GC = AF : AG; folglich verhält sich nach №. 2 und 3
4. AD : AE = FB : GC. Endlich ergibt sich aus №. 1 und 4
5. DF : FB = EG : GC, also verhält sich
AD : DF : FB = AE : EG : GC.

3) Zu drei gegebenen Linien eine vierte Proportionallinie zu finden, und zwar

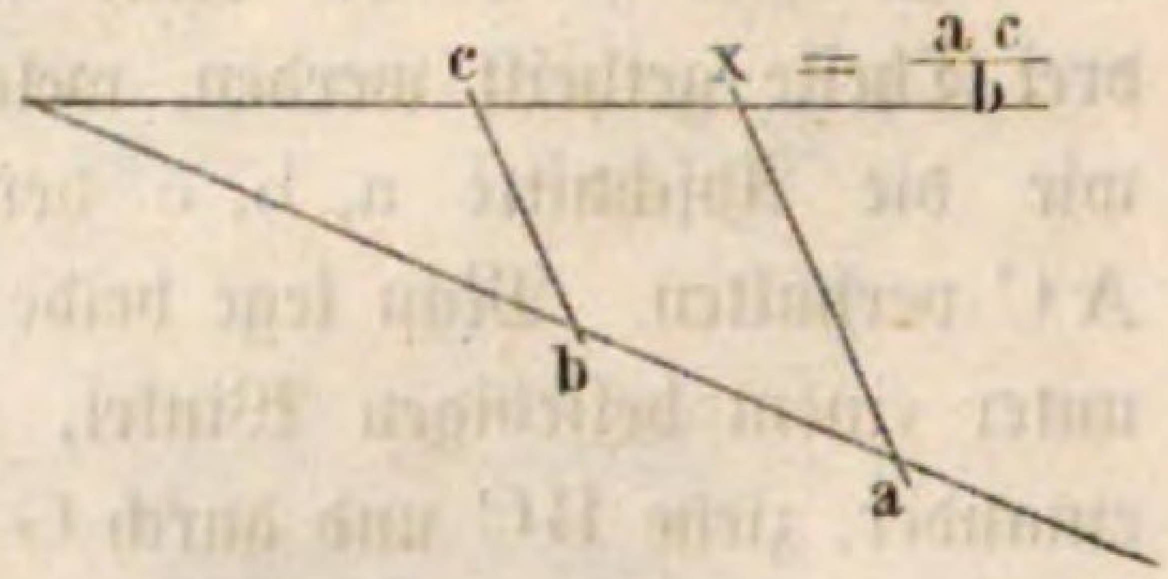
a. so, daß sich verhält a : b = c : x.

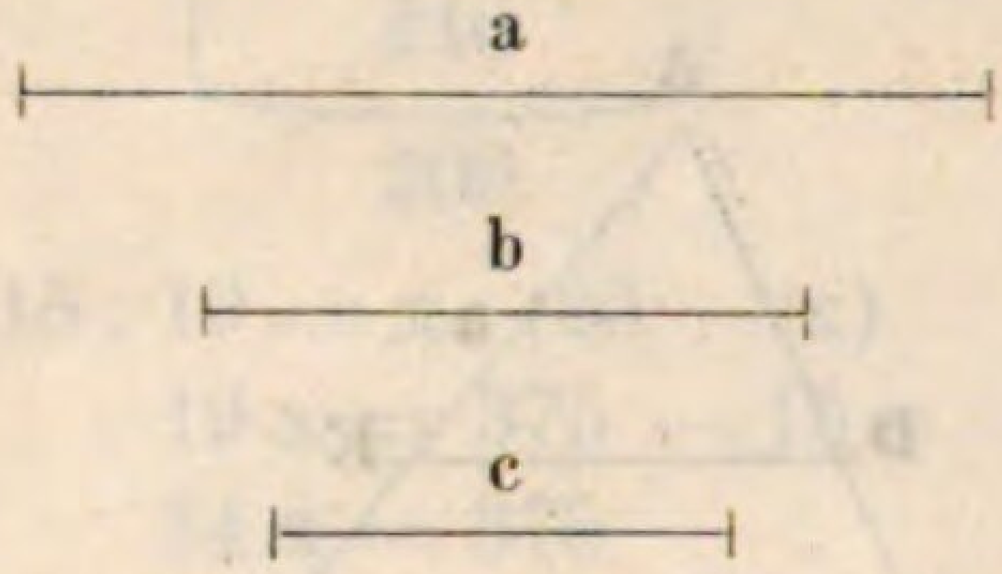
Auflösung:

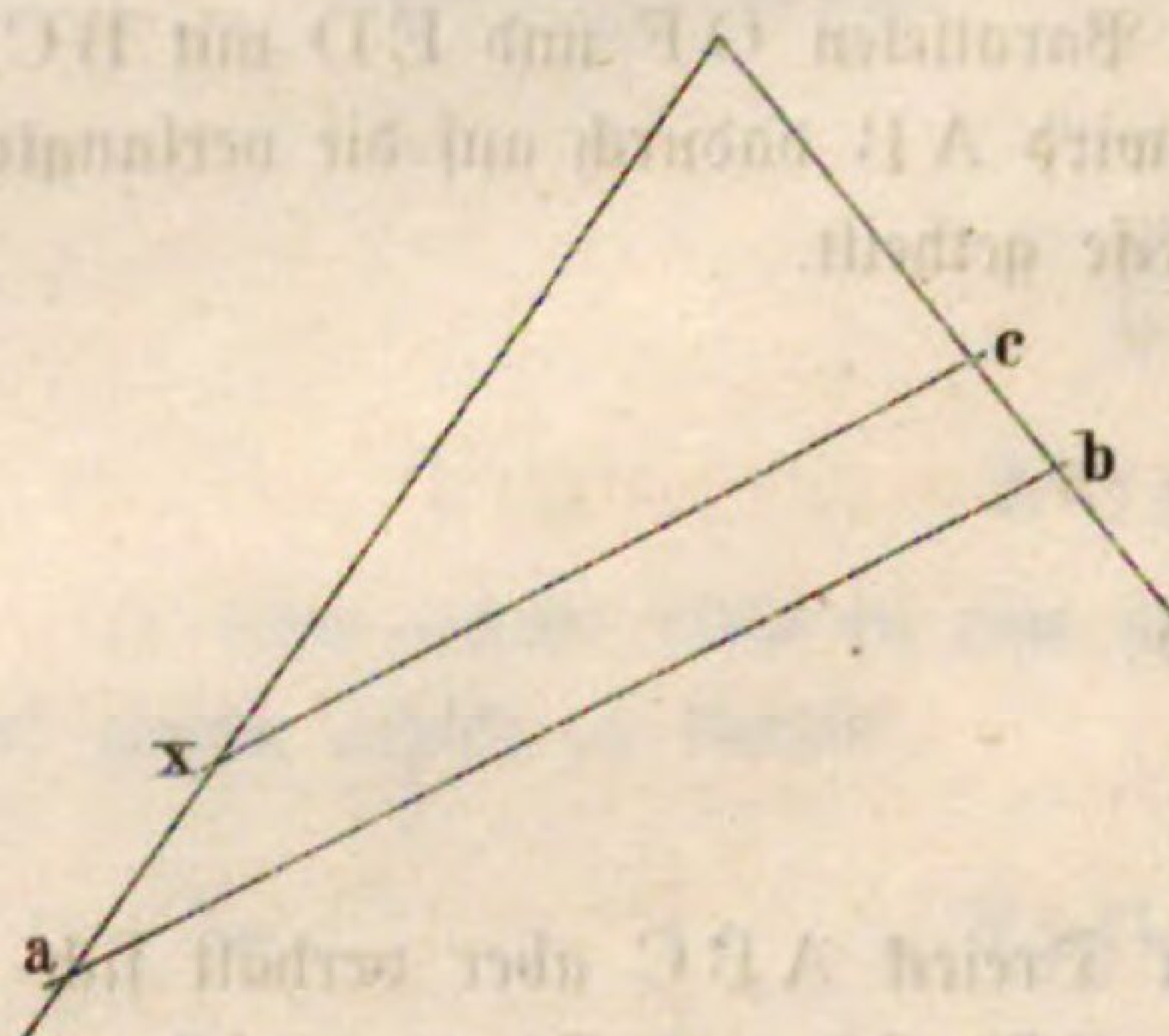


Es seien die Linien a, b, c gegeben, und dazu werde eine vierte, x, gesucht, die mit jenen die Proportion a : b = c : x gibt; man lege zwei gerade Linien, AM und AN, unter einem beliebigen Winkel, A, an einander, mache darauf AB = a, AD = b, AC = c, ziehe sodann BC und durch D die Linie DE || BC, so ist AE die gesuchte, vierte Proportionallinie.

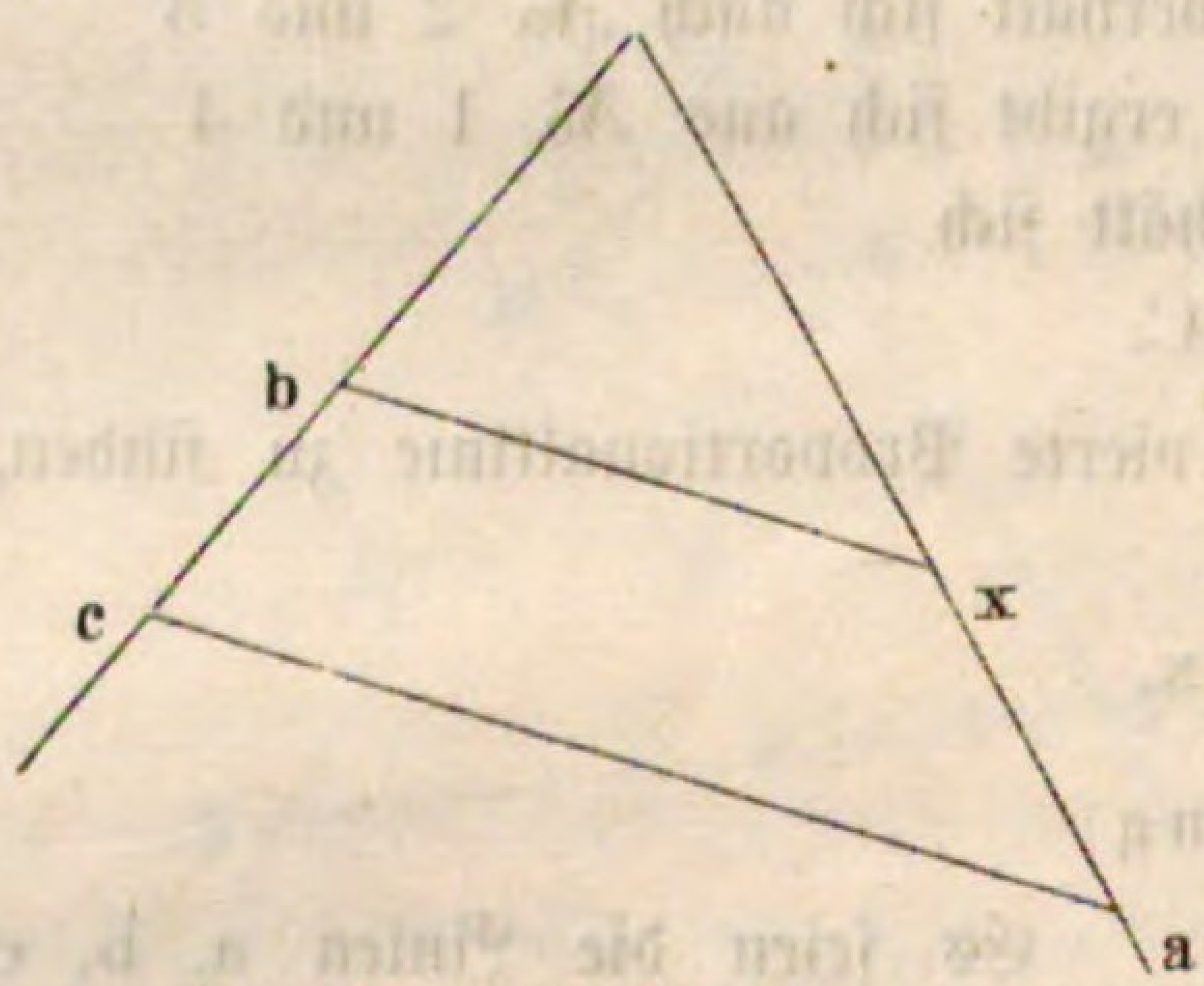
b. so, daß sich verhält $a : b = x : c$. Hier soll $x = \frac{a\,c}{b}$ sein, d. h. um so viel a größer als b, um so viel soll x größer als c sein; also







c. so, daß sich verhält $a : x = b : c$; hier soll x wieder $= \frac{a\,c}{b}$ sein, also dieselbe Größe wie vorher haben, was aber hier durch folgende Construction geschieht:



d. so, daß sich verhält $x : a = b : c$; hier soll $x =$ sein $\frac{a\,b}{c}$, d. h. x soll um so viel kleiner als a sein, wie b kleiner als c ist; also

Dieselben Aufgaben wollen wir auch mit bestimmten Zahlen lösen und die verschiedenen Constructionen mit der Rechnung vergleichen; also

a. suche die vierte Proportionallinie so, daß sich verhält $12 : 24 = 8 : x$

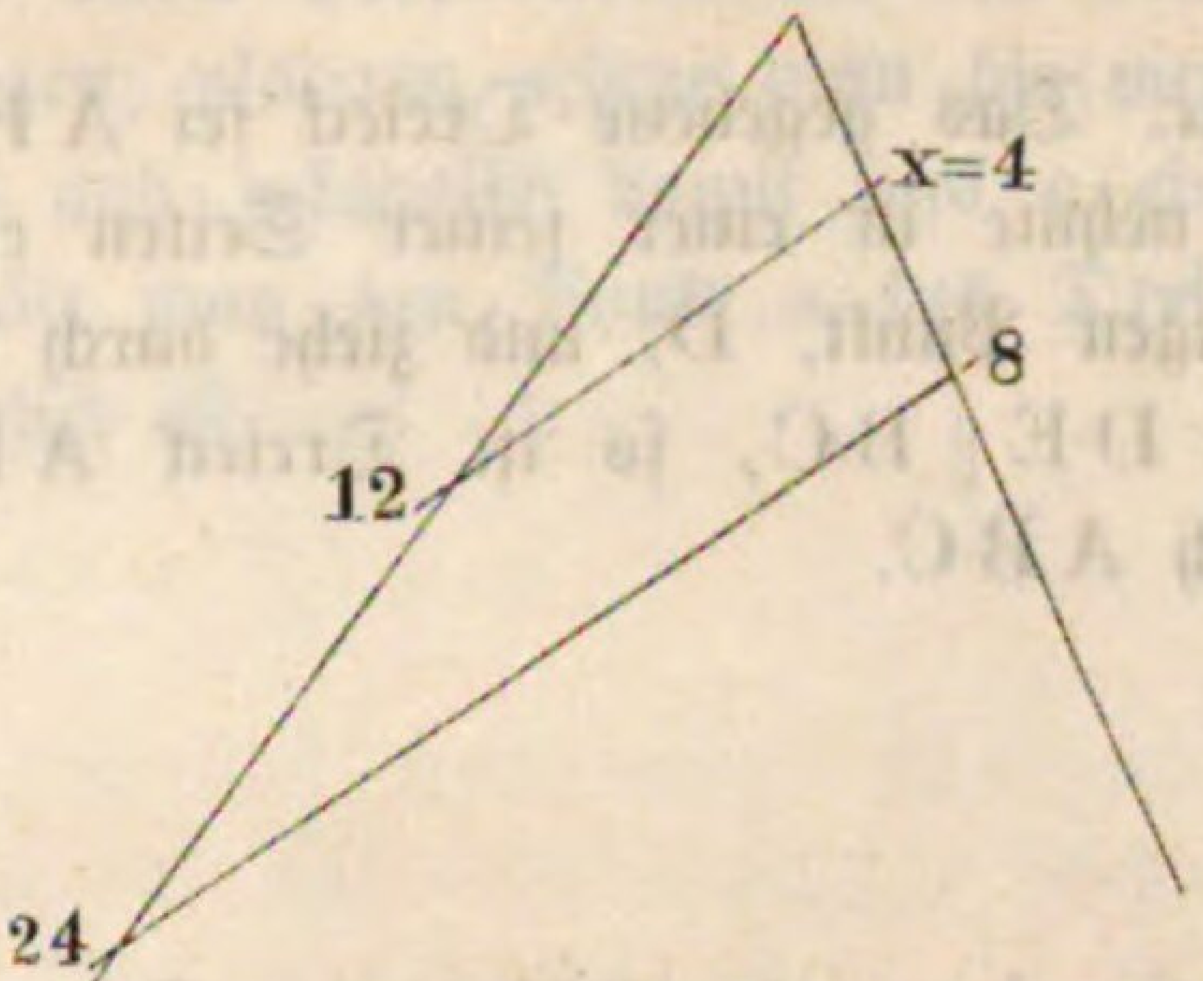
Zeichnung:



Rechnung:

$$x = \frac{8 \times 24}{12} = 16$$

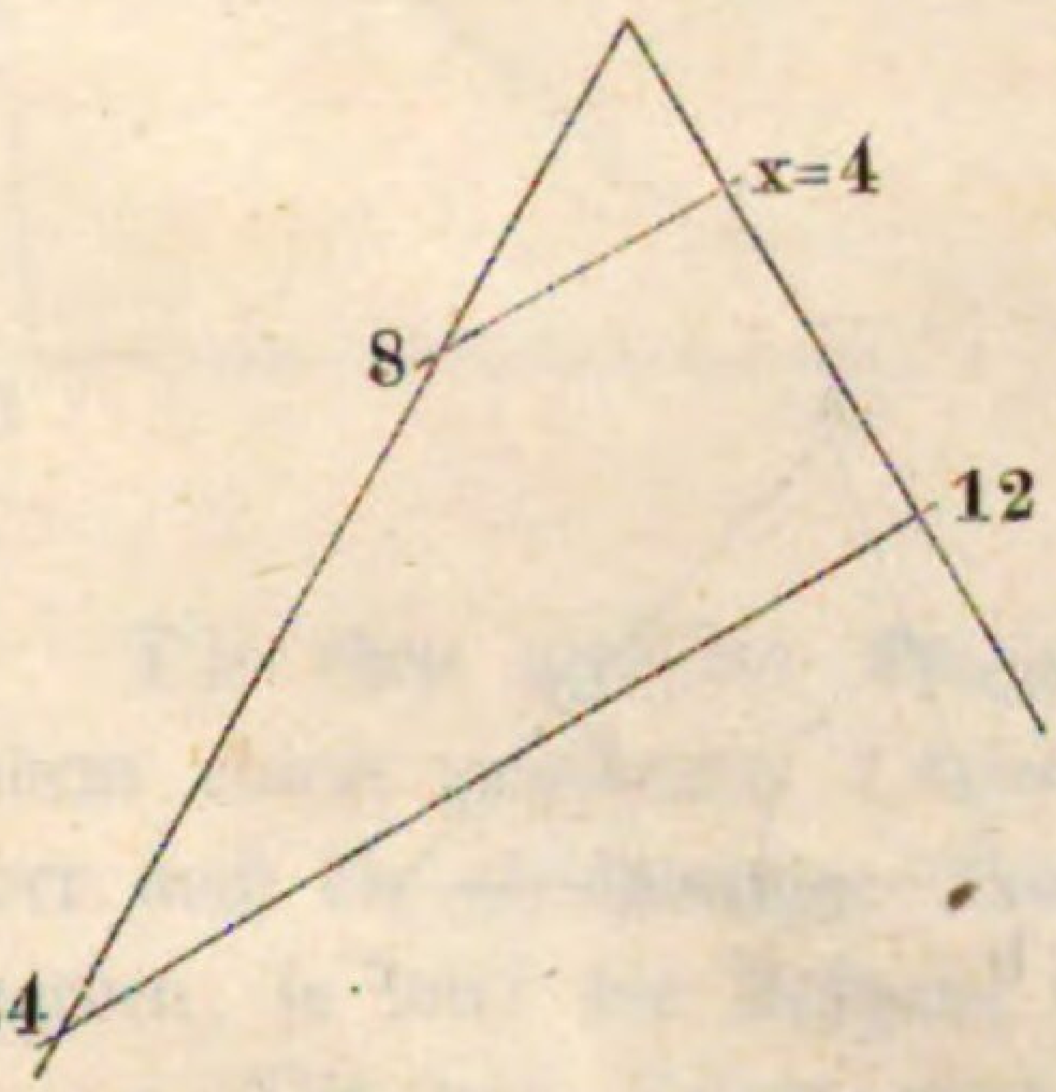
b. suche die vierte Proportionallinie so, daß sich verhält $12:24 = x:8$



Rechnung:

$$x = \frac{8 \times 12}{24} = 4$$

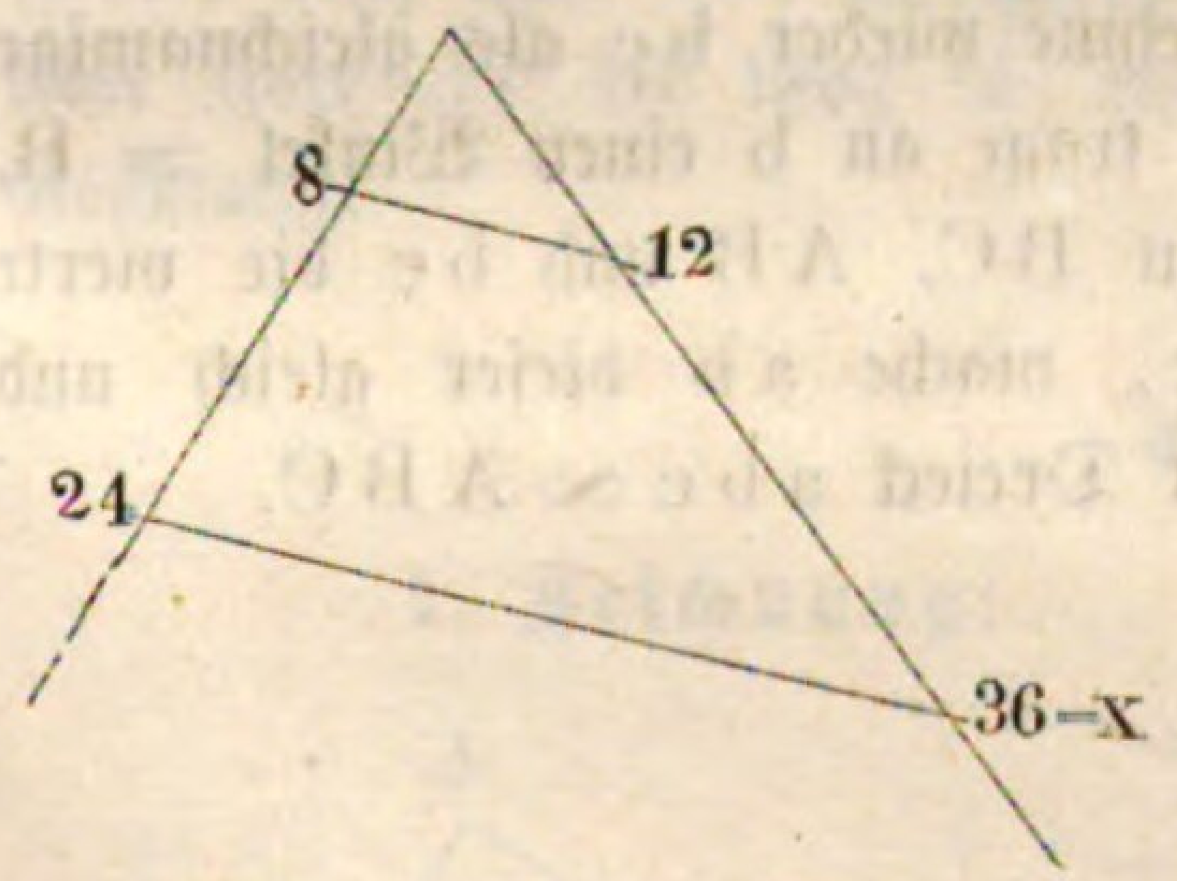
c. suche die vierte Proportionallinie so, daß sich verhält $12:x = 24:8$



Rechnung:

$$x = \frac{12 \times 8}{24} = 4.$$

d. suche die vierte Proportionallinie so, daß sich verhält $x:12 = 24:8$



Rechnung:

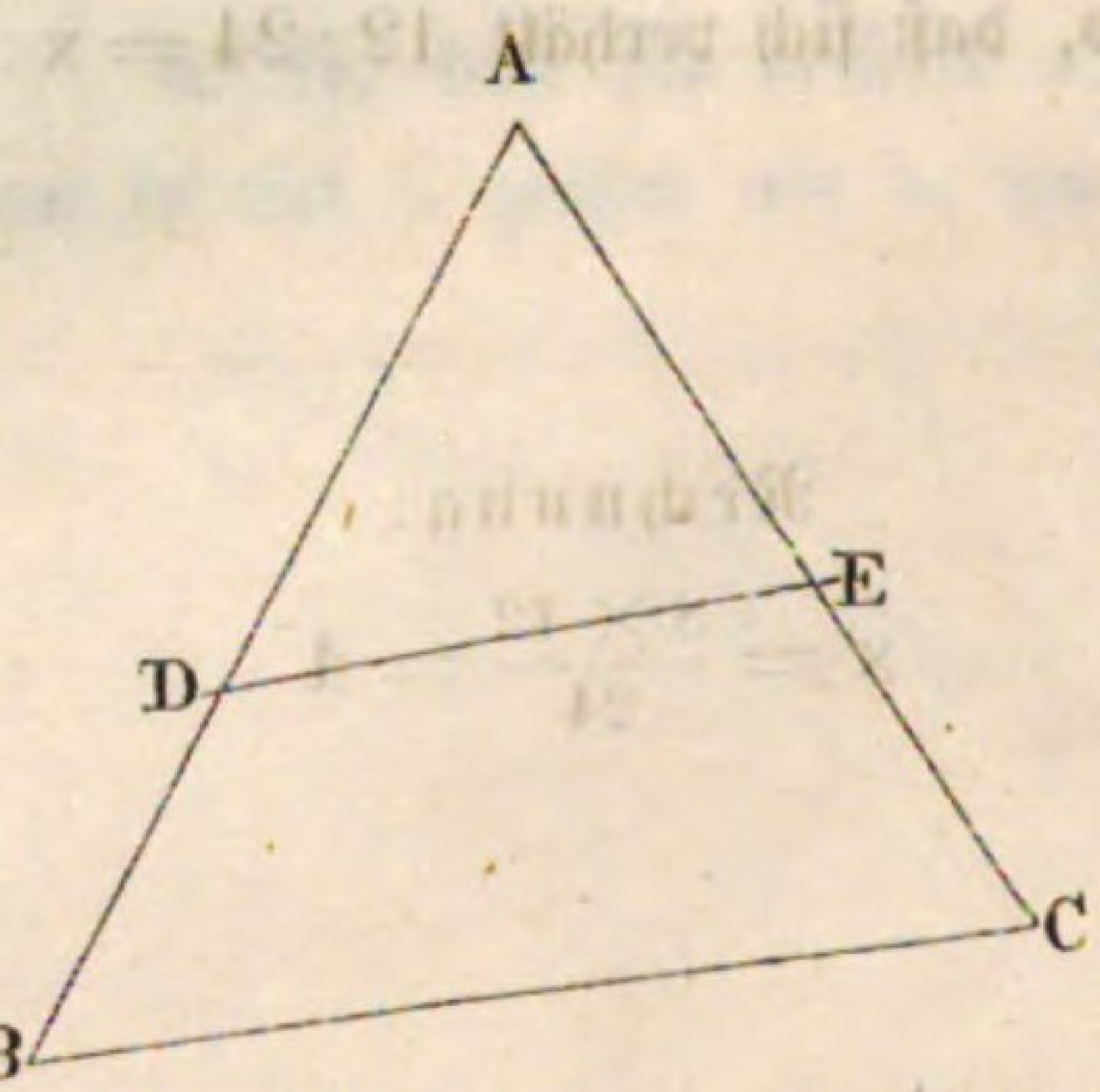
$$x = \frac{12 \times 24}{8} = 36.$$

Die Lösung dieser Aufgabe hat gezeigt, wie sich eine Aufgabe der Regeldetri geometrisch auflösen läßt.

4) Ein Dreieck zu zeichnen, das einem gegebenen ähnlich sei.

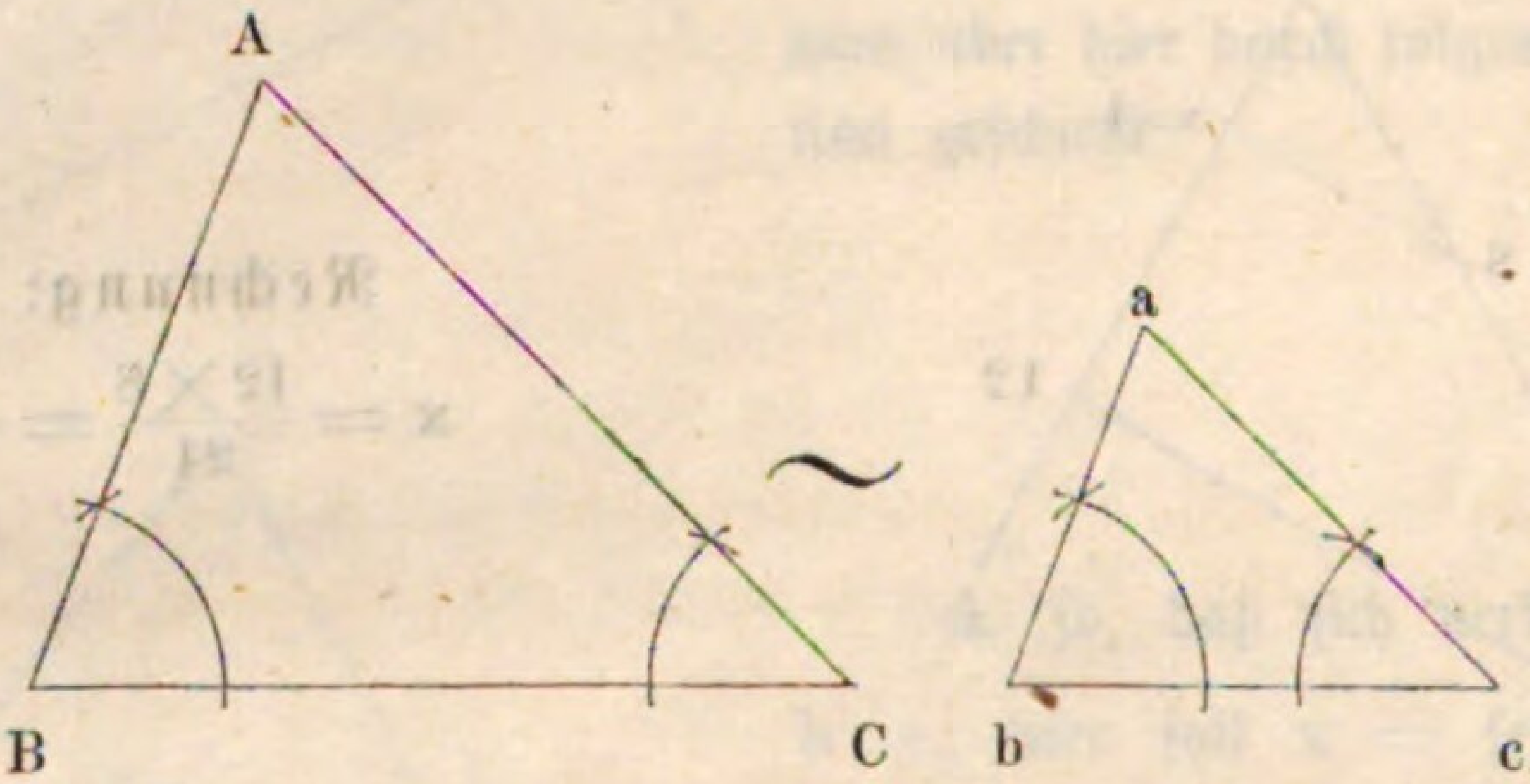
Auflösung:

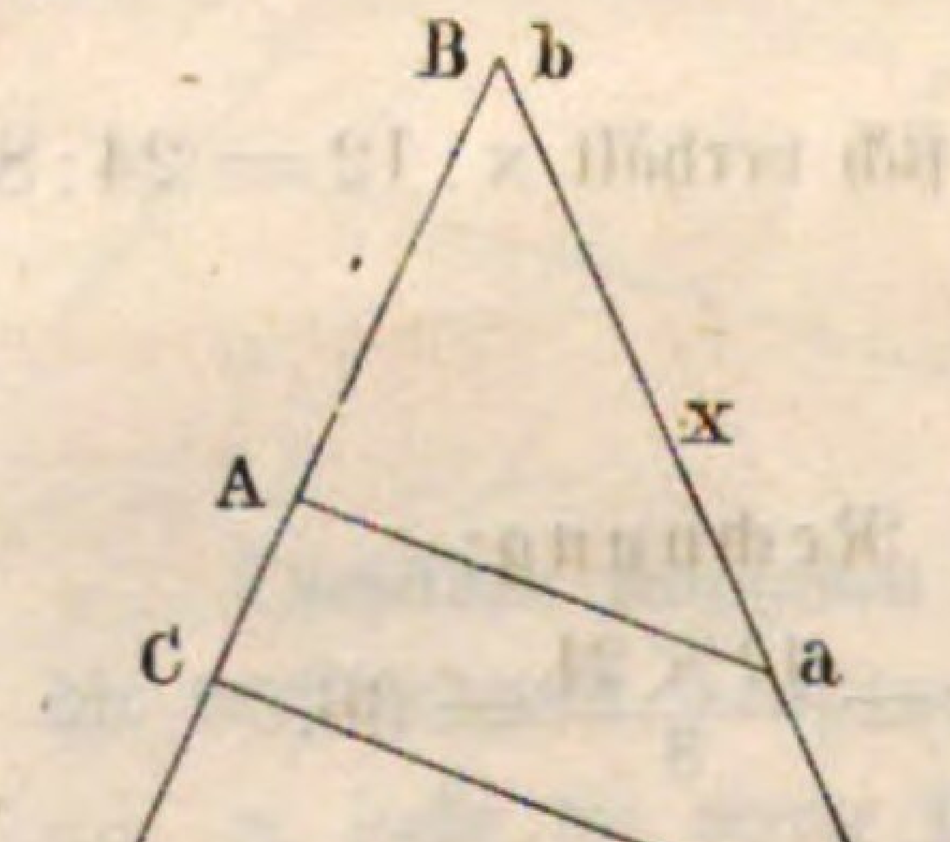
Ein jeder Satz von der Aehnlichkeit der Dreiecke gibt ein Verfahren zur Auflösung dieser Aufgabe.



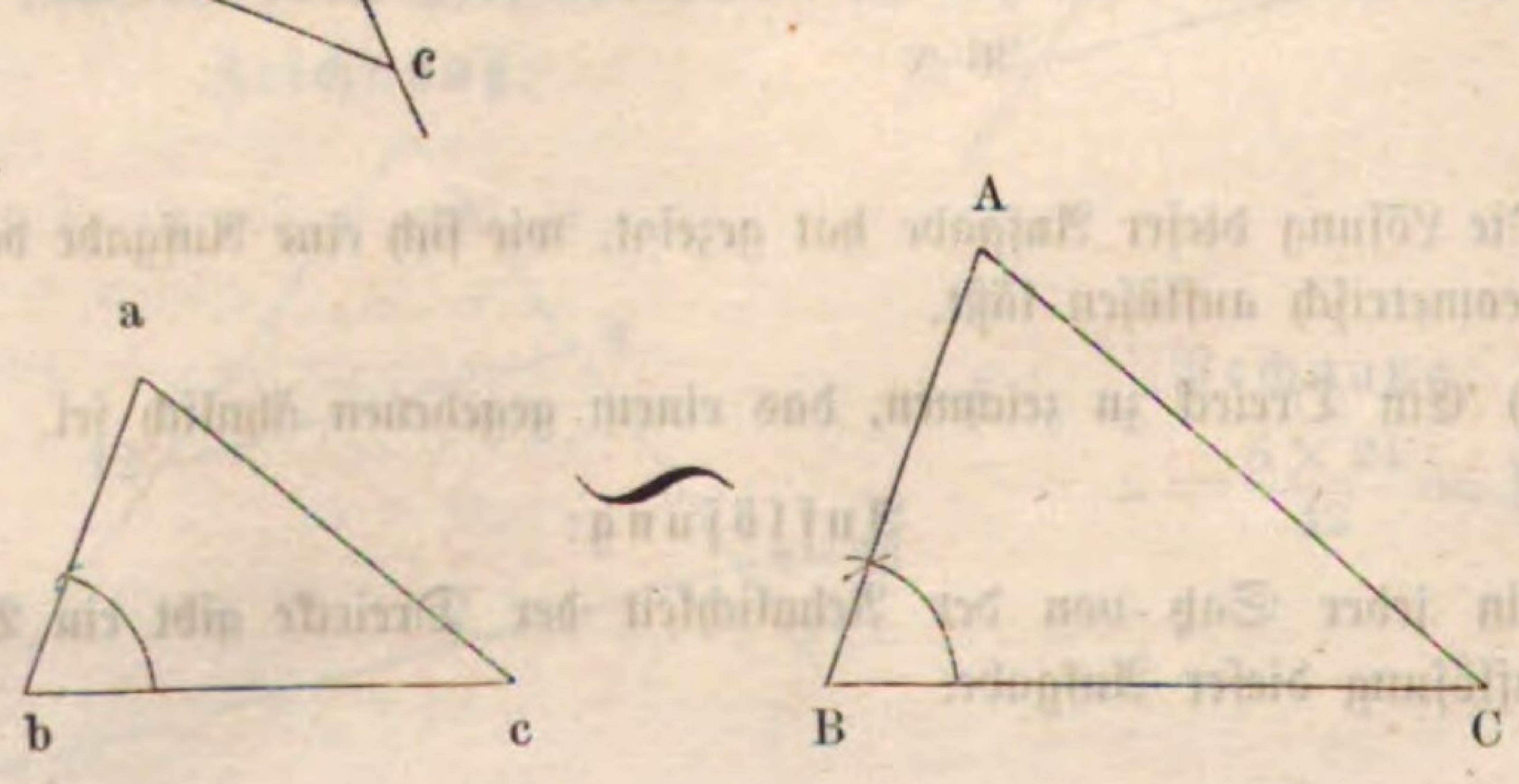
a. Das gegebene Dreieck sei ABC; man nehme in einer seiner Seiten einen beliebigen Punkt, D, und ziehe durch denselben DE ∥ BC, so ist Dreieck ADE ähnlich ABC.

b. Man nehme eine beliebige Linie, bc, als gleichnamige Seite von BC, trage an b einen Winkel = B und an c einen Winkel = C, so ist Dreieck abc ∾ ABC.

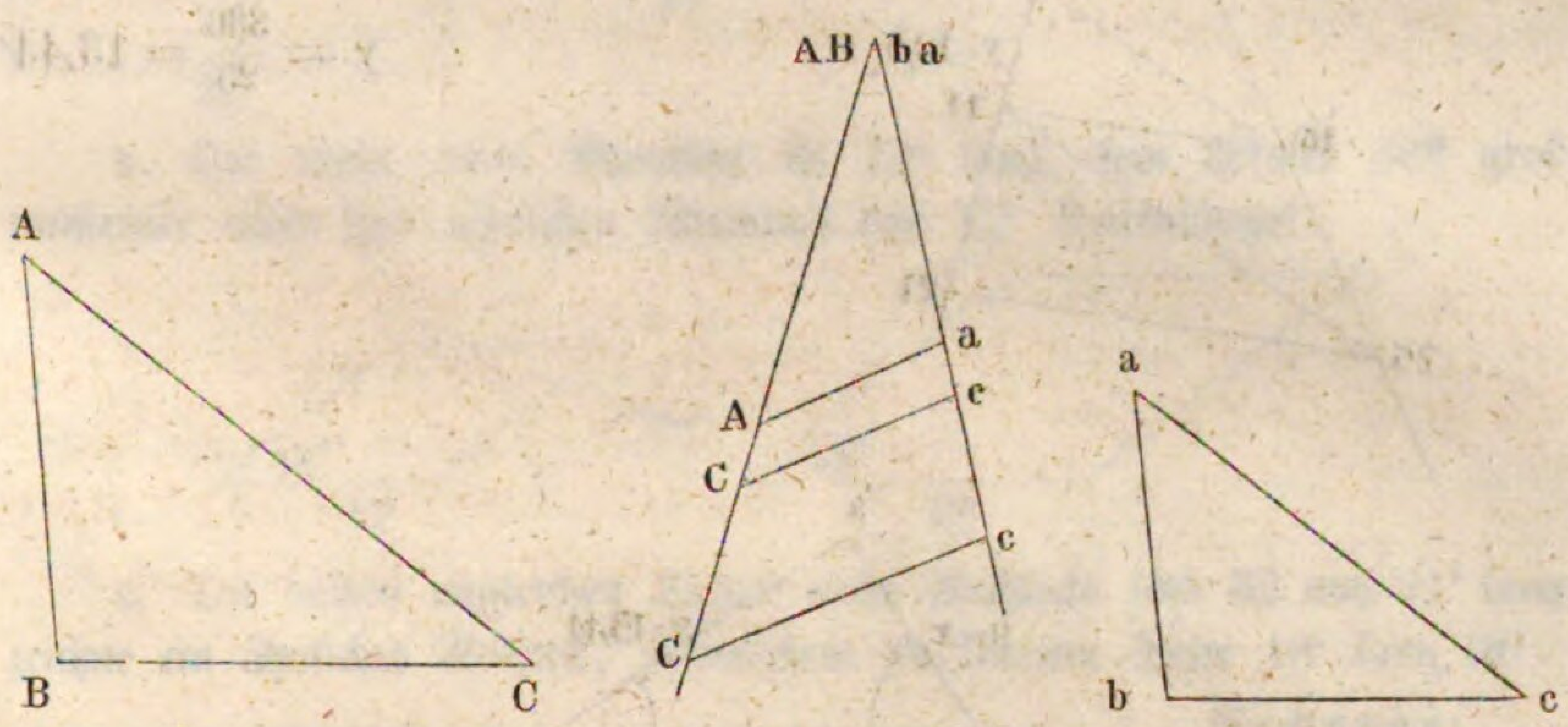




c. Man nehme wieder bc als gleichnamige Seite von BC, trage an b einen Winkel = B, suche alsdann zu BC, AB und bc die vierte Proportionallinie, mache ab dieser gleich und ziehe ac, so ist Dreieck abc ∾ ABC.



d. Man suche zu B C, A B und der willkürlich angenommenen, b c, eine vierte Proportionallinie und beschreibe mit dieser aus b über b c einen Bogen; alsdann nehme man die vierte Proportionallinie zu B C, A C und b c und beschreibe damit aus c einen Bogen, der den ersten schneidet; so erhält man den Punkt a des Dreiecks a b c, welches dem Dreieck A B C ähnlich ist.

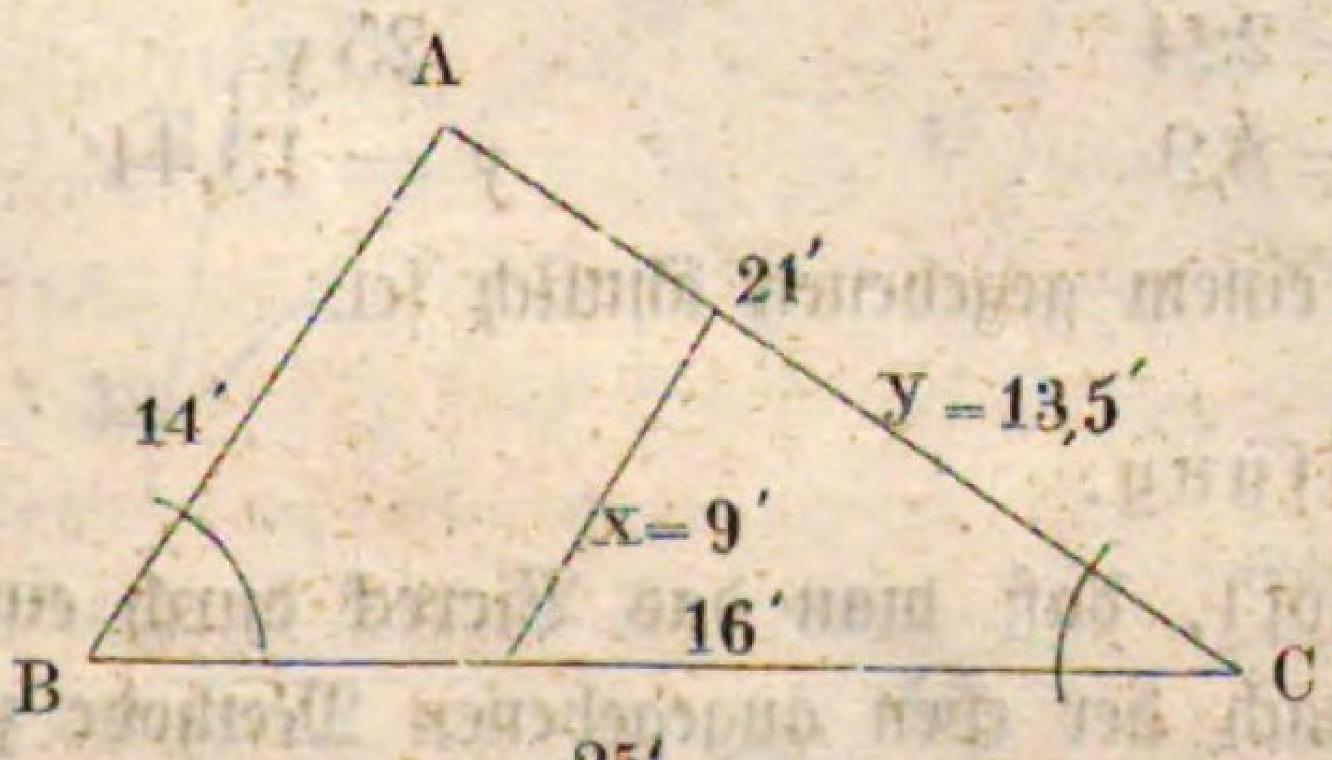


Die eben gelös'ten Aufgaben gehören in die Klasse der unbestimmten, indem einem gegebenen Dreiecke unzählige andere ähnlich sein können. Ist aber noch die gleichnamige Seite von einer der Seiten des Dreiecks A B C gegeben; so wird die Aufgabe bestimmt; also

e. Die drei Seiten eines Dreiecks sind 25′, 14′ und 21′ lang; construire nach allen vier Methoden ein ähnliches Dreieck, in welchem die Grundlinie statt 25′ 16′ lang ist und prüfe die Richtigkeit der Zeichnung durch Rechnung!

Erste Methode:

1. Zeichnung:



2. Rechnung:

$$25 : 16 = 14 : x$$

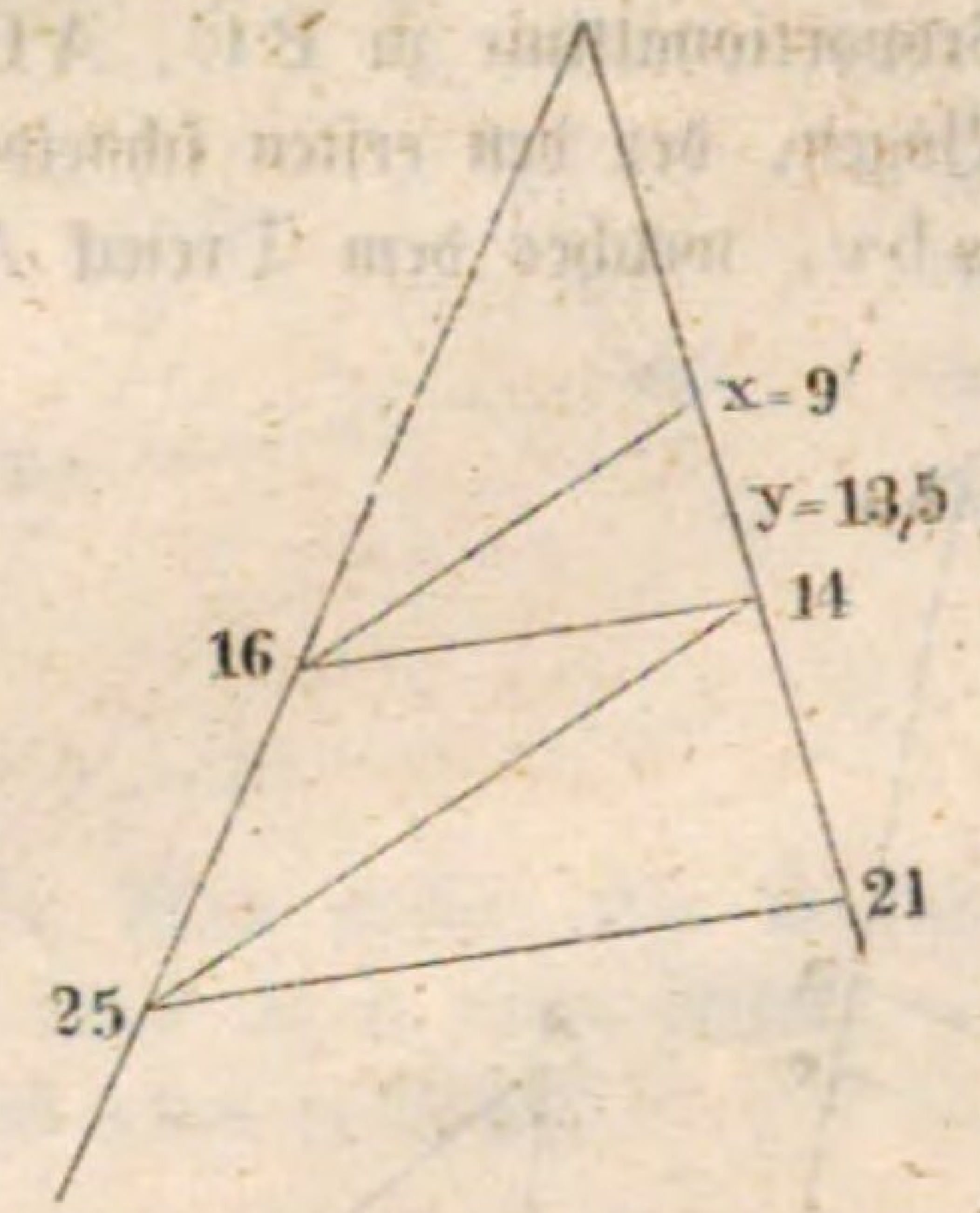
$$224$$

$$25\,x = 224$$

$$x = \frac{224}{25} = 8{,}9'$$

Zweite Methode:

1. Zeichnung:



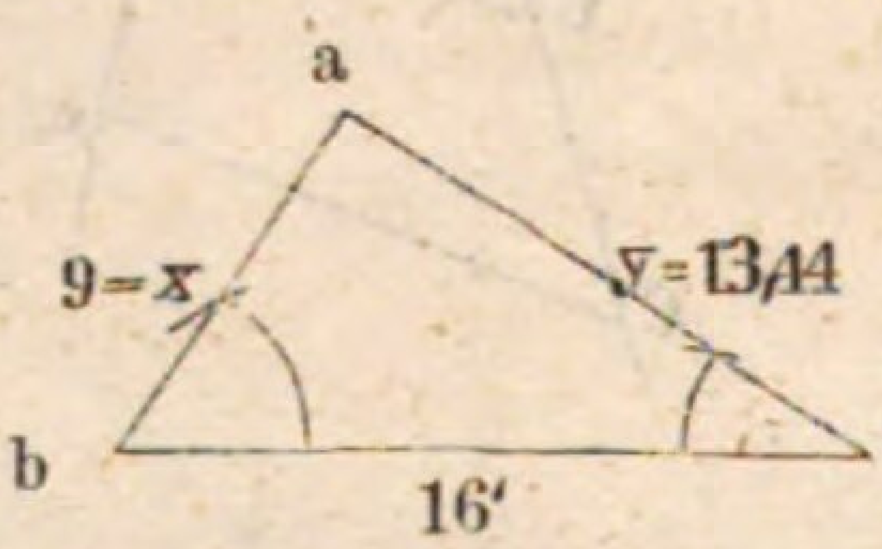
2. Rechnung:

$$25 : 16 = 21 : y$$

$$336$$

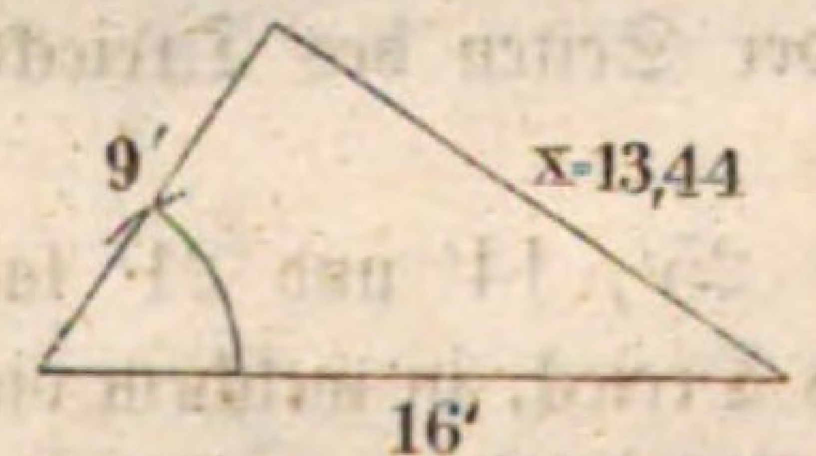
$$25\,y = 336$$

$$y = \frac{336}{25} = 13{,}44'$$



Dritte Methode:

1. Zeichnung:



2. Rechnung:

$$25 : 21 = 16 : x$$

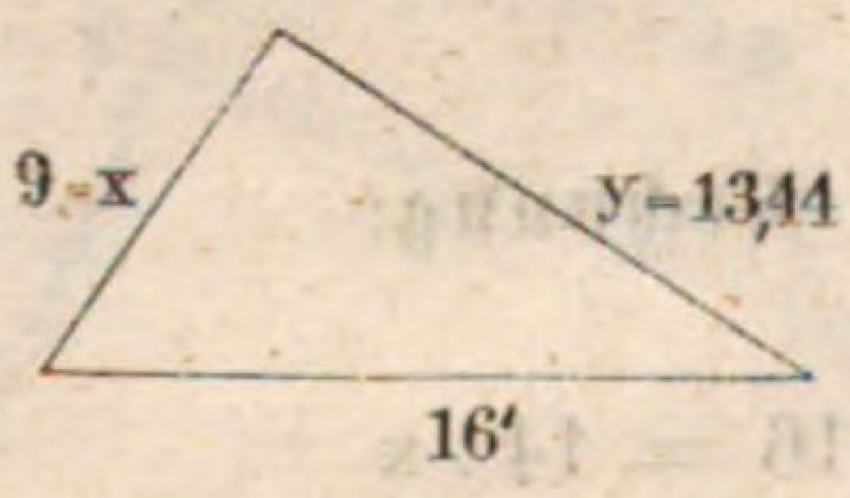
$$336$$

$$25\,x = 336$$

$$x = \frac{336}{25} = 13{,}44'$$

Vierte Methode:

1. Zeichnung:



2. Rechnung:

$$25 : 14 = 16 : x$$

$$224$$

$$25\,x = 224$$

$$x = 8{,}9$$

$$25 : 21 = 16 : y$$

$$336$$

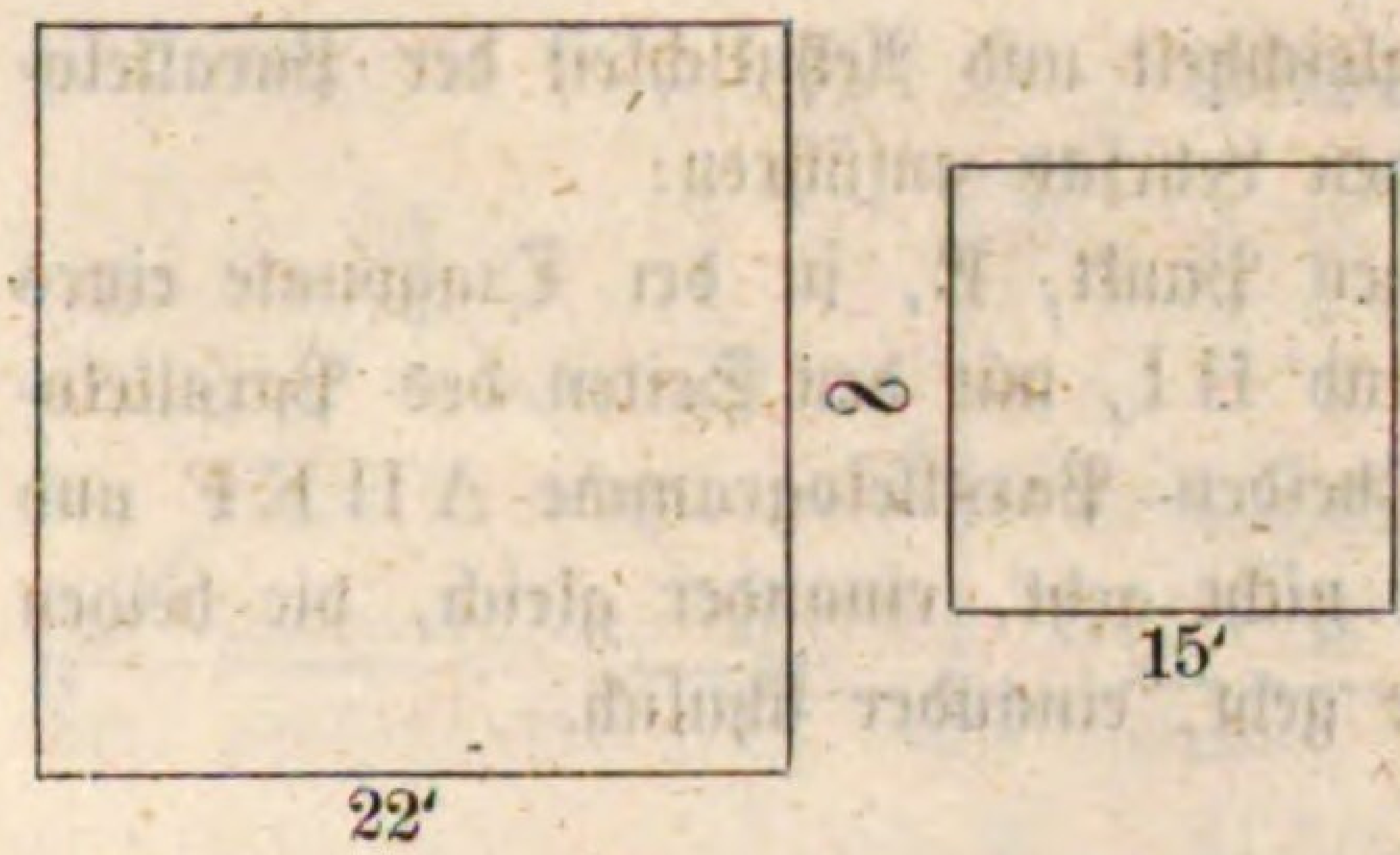
$$25\,y$$

$$y = 13{,}44'$$

5) Ein Viereck zu zeichnen, das einem gegebenen ähnlich sei.

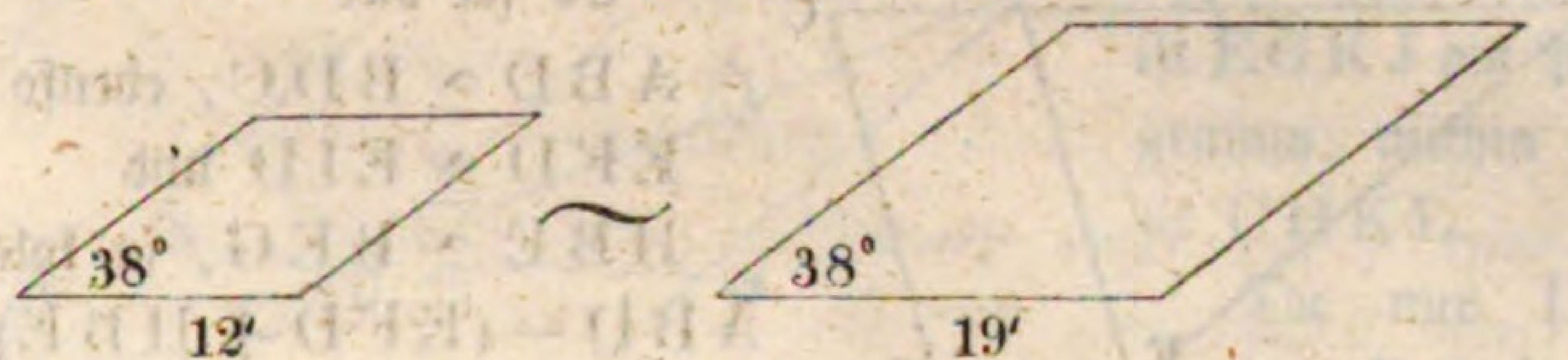
Auflösung:

Diese Aufgabe wird dadurch gelös't, daß man das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, nach der eben angegebenen Methode zu den entstandenen Dreiecken ähnliche construirt und diese zu einem Viereck verbindet, wobei jedoch zu bemerken ist, daß die Parallelogramme leichter durch Aufsuchung der vierten Proportionallinie gezeichnet werden können.

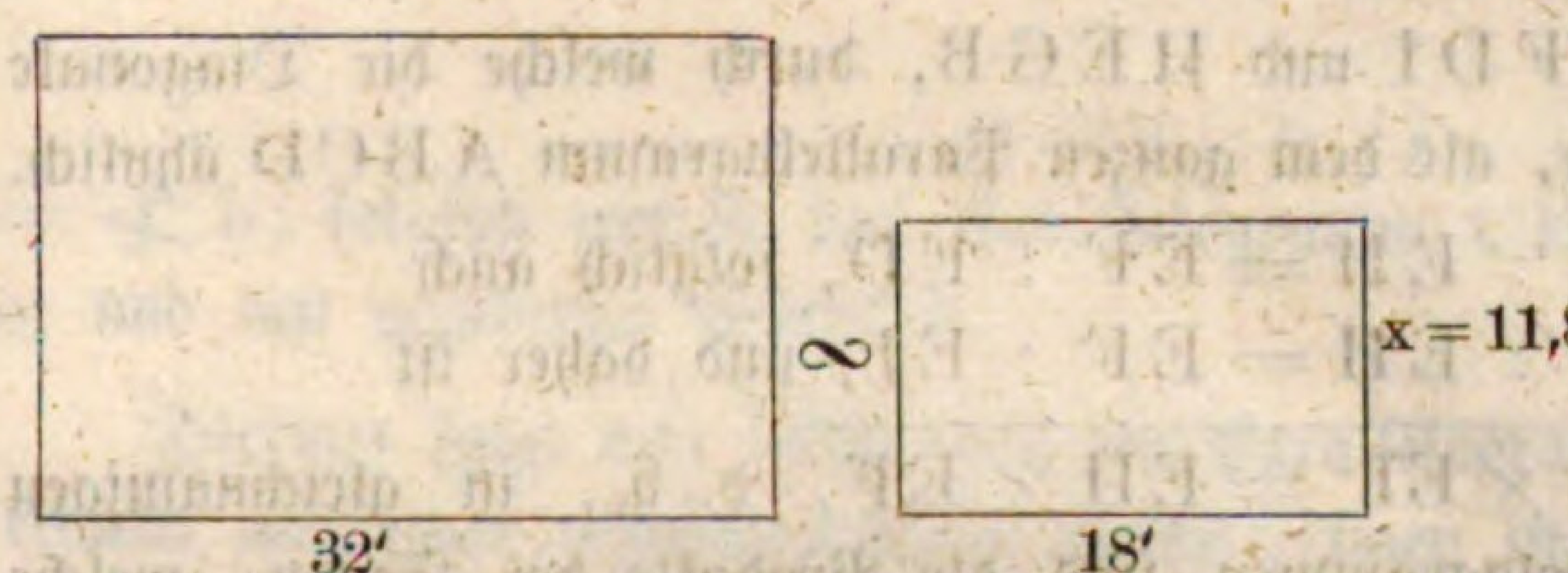


a. Zeichne zu einem Quadrat von 22′ Seitenlänge ein ähnliches von 15′ Seitenlänge!

b. Die Seite eines Rhombus ist 12′ lang, sein Winkel 38° groß; construire einen ihm ähnlichen Rhombus von 19′ Seitenlänge!



c. Die beiden ungleichen Seiten eines Rechtecks sind 32 und 21′ lang; zeichne ein ähnliches Rechteck, in welchem die längere Seite 18′ lang ist!



Rechnung:

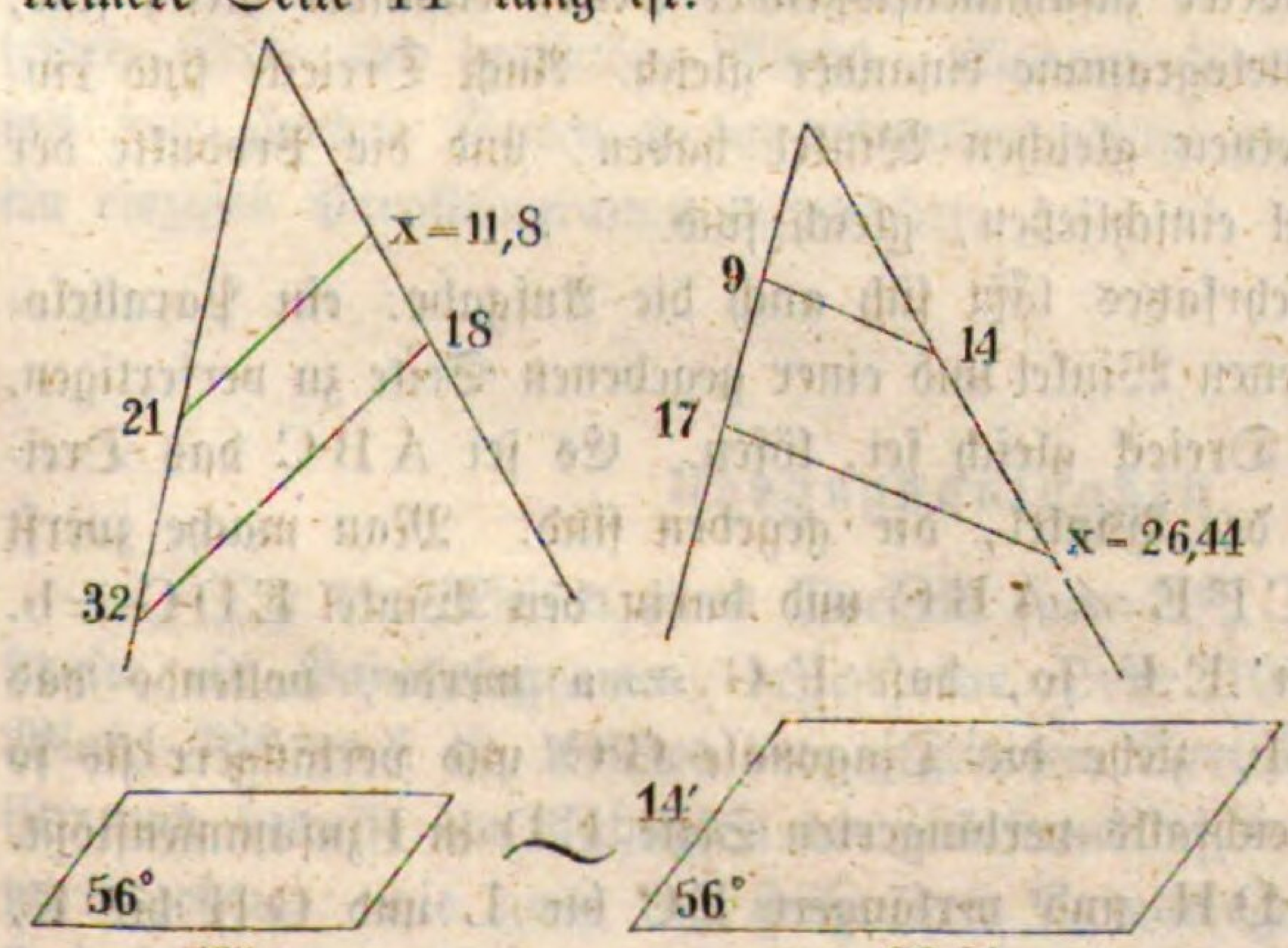
$$32 : 21 = 18 : x$$

$$378$$

$$32x = 378$$

$$x = \frac{378}{32} = 11{,}8.$$

d. Die beiden ungleichen Seiten einer Rhomboide sind 17 und 9′ lang, der eine Winkel ist 56° groß; zeichne eine ähnliche Rhomboide, in welcher die kleinere Seite 14′ lang ist!



Rechnung:

$$9 : 17 = 14 : x$$

$$238$$

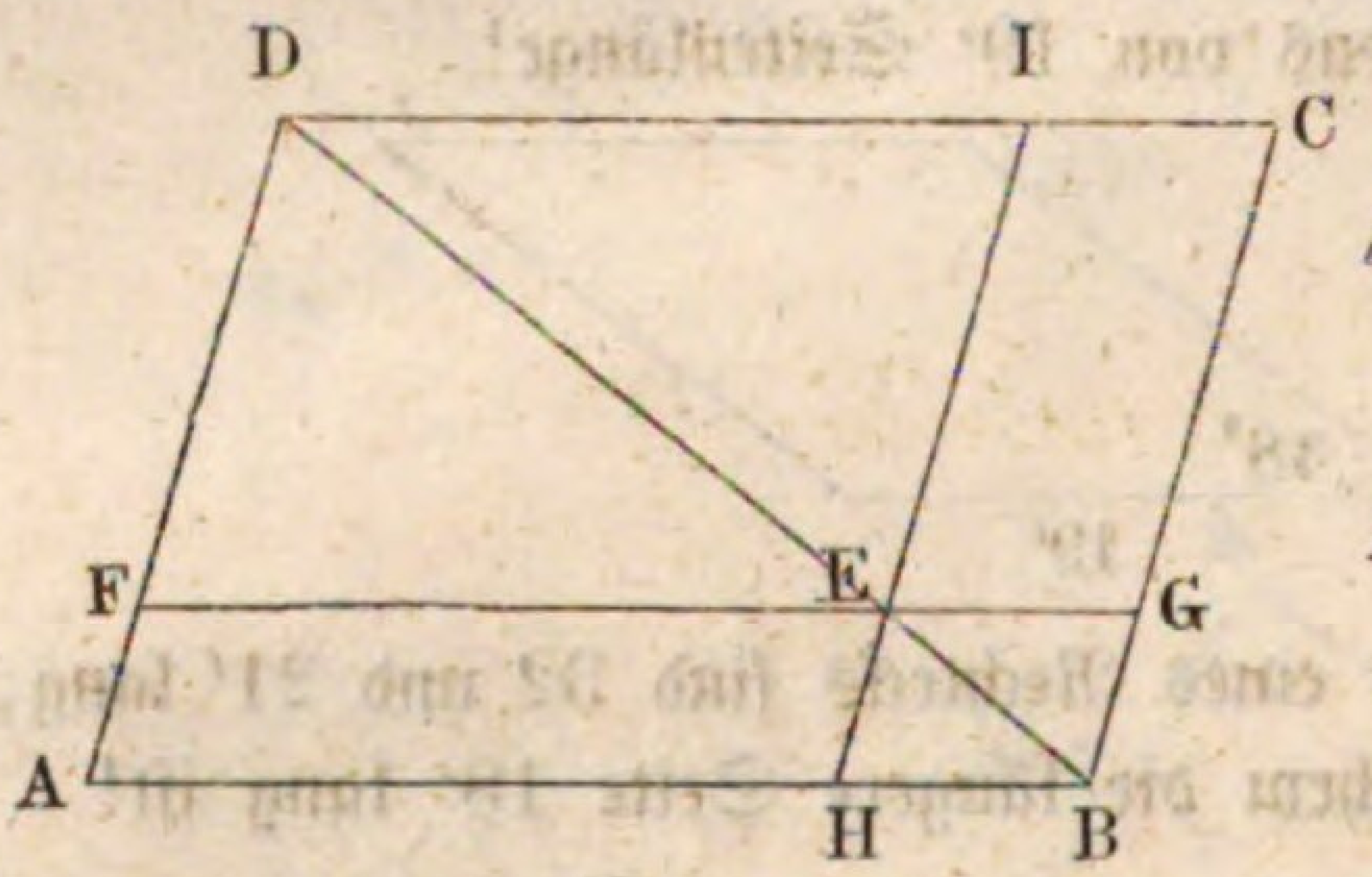
$$9x = 238$$

$$x = \frac{238}{9} = 26{,}44.$$

In Beziehung auf die Inhaltsgleichheit und Aehnlichkeit der Parallelogramme wollen wir hier noch folgenden Lehrsatz anführen:

Wenn man durch einen beliebigen Punkt, E, in der Diagonale eines Parallelogramms zwei Linien, F G und H I, mit den Seiten des Parallelogramms parallel zieht, so sind die beiden Parallelogramme A H E F und E G C I, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich, die beiden hingegen, durch welche die Diagonale geht, einander ähnlich.

Beweis:



Es sei das

$\triangle$ A B D $\cong$ B D C, ebenso

E F D $\cong$ E I D und

H B E $\cong$ B E G, so folgt, daß

A B D $-$ (E F D $+$ H B E) $=$ B D C $-$ (E I D $+$ E B G) ist, das ist

A H E F $=$ E G C I.

Die Parallelogramme E F D I und H E G B, durch welche die Diagonale geht, sind sowohl einander, als dem ganzen Parallelogramm A B C D ähnlich.

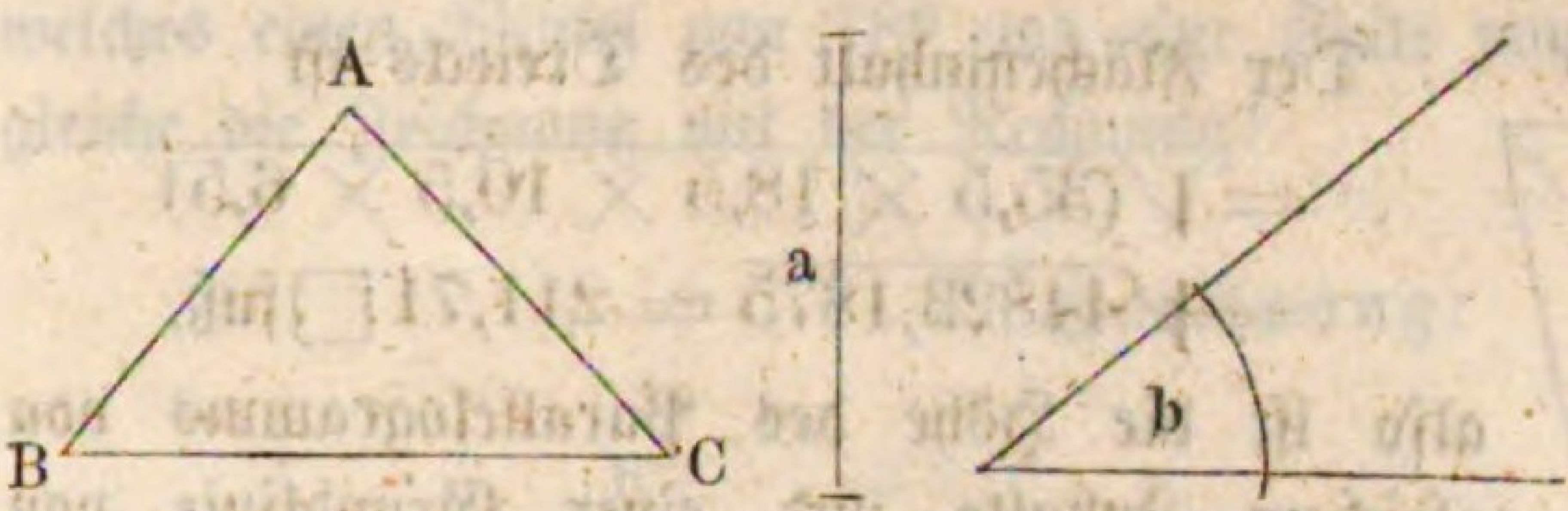
Es verhält sich H B : E H $=$ E F : F D, folglich auch

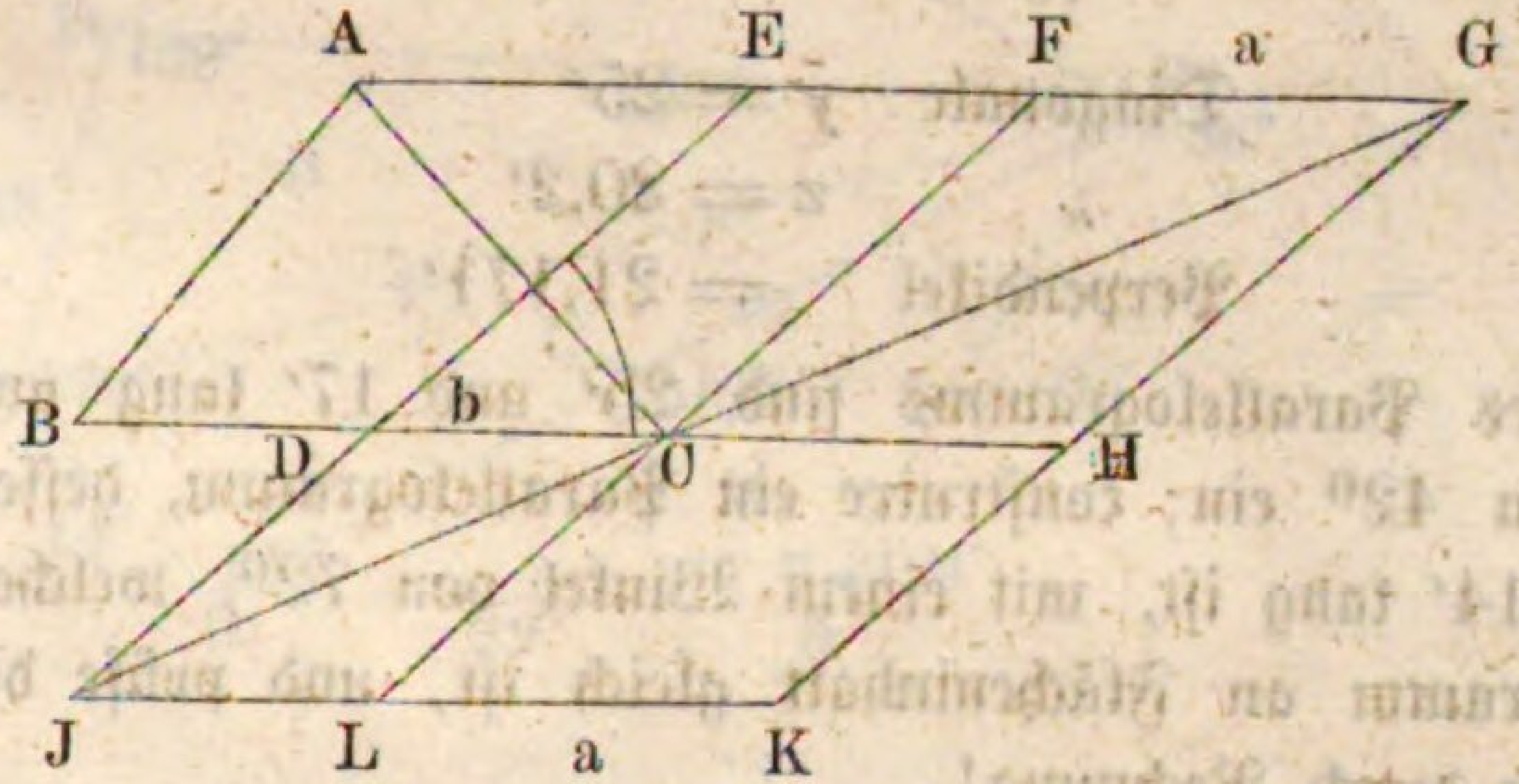
E G : E H $=$ E F : E I, und daher ist

E G $\times$ E I $=$ E H $\times$ E F, d. h., in gleichnamigen und gleich großen Parallelogrammen sind die Produkte der Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, oder überhaupt zweier zusammenstoßender Seiten einander gleich. Umgekehrt also, wenn bei gleichwinkligen Parallelogrammen die Produkte zweier zusammenstoßender Seiten einander gleich sind, so sind die ganzen Parallelogramme einander gleich. Auch Dreiecke sind einander gleich, wenn sie einen gleichen Winkel haben, und die Produkte der Seiten, die diesen Winkel einschließen, gleich sind.

Mit Hülfe dieses Lehrsatzes läßt sich auch die Aufgabe: ein Parallelogramm von einem gegebenen Winkel und einer gegebenen Seite zu verfertigen, welches einem gegebenen Dreieck gleich sei, lösen. Es sei A B C das Dreieck, a die Seite und b der Winkel, die gegeben sind. Man mache zuerst das Parallelogramm D C F E $=$ A B C und darin den Winkel E D C $=$ b. Alsdann verlängere man E F so, daß F G $=$ a werde, vollende das Parallelogramm C F G H, ziehe die Diagonale G C und verlängere sie so weit, daß sie mit der gleichfalls verlängerten Seite E D in I zusammenstößt. Endlich ziehe man I K $\parallel$ D H und verlängere F C bis L und G H bis K, so ist L K H C das verlangte Parallelogramm.

Beweis:





Da ED || FC und FC || GH ist, so ist auch ED || GH, folglich auch EJ || GK. Daher muß GC, hinlänglich verlängert, mit EJ zusammentreffen. Ferner ist EG || DH und JK || DH, folglich auch EG || JK, also ist EGKJ ein Parallelogramm; mithin DCFE = CHKL.

Da nun DCFE = △ABC ist, so ist auch CHKL = △ABC. Es ist ferner CH = FG = a und Winkel CLK = ∢ FCH = ∢ EDC = ∢ b; folglich enthält das Parallelogramm CHKL die gegebene Seite, a, und den gegebenen Winkel b.

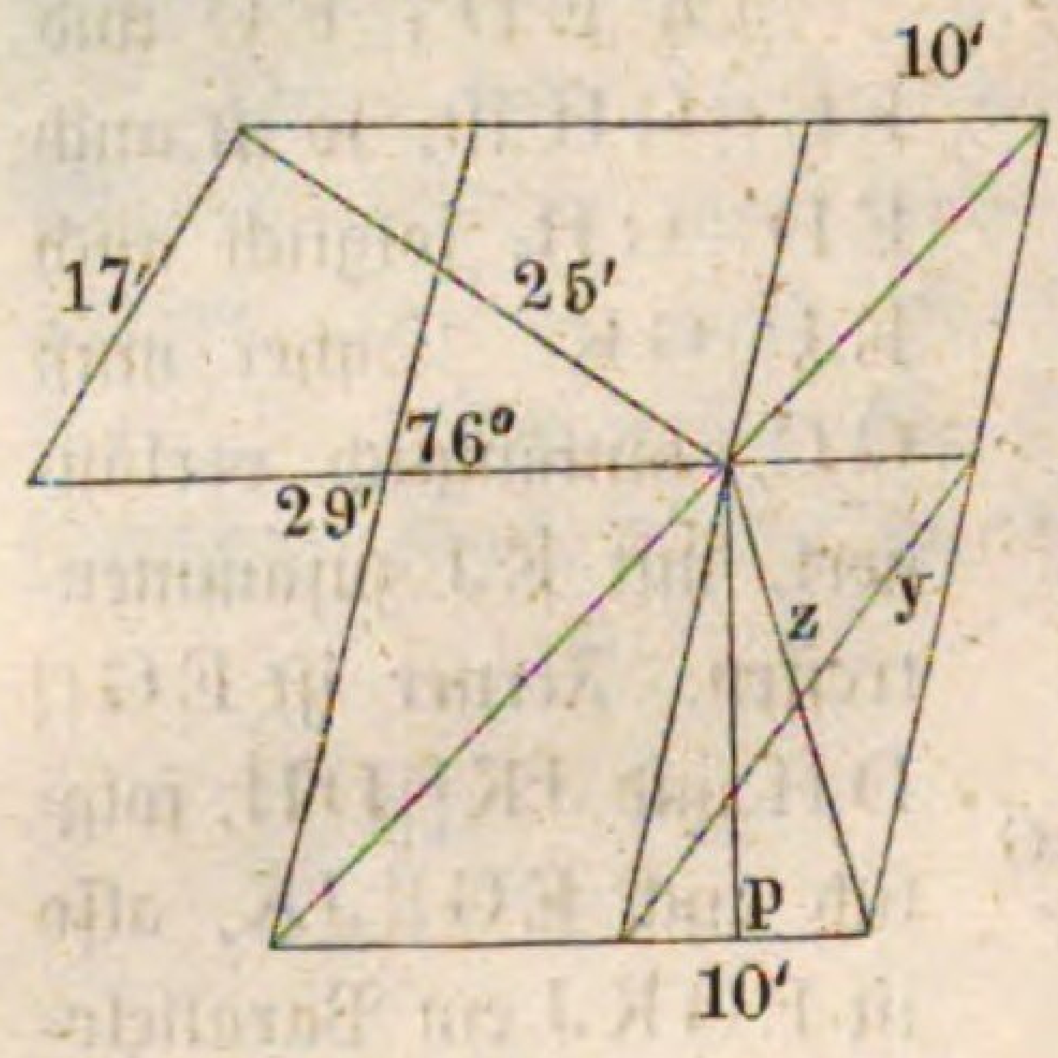
Hieraus folgt von selbst, wie ein Parallelogramm von einem gegebenen Winkel und einer gegebenen Seite zu verfertigen ist, welches einem gegebenen Parallelogramm gleich sei.

Um jede geradlinige Figur in ein Parallelogramm zu verwandeln, zerlege man sie in Dreiecke und verwandle diese in Parallelogramme von derselben Seite und demselben Winkel. Alsdann können alle Parallelogramme mit den gleichen Seiten so an einander gefügt werden, daß sie zusammen ein einziges Parallelogramm ausmachen.

Uebungsaufgaben:

1) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 29′, 17′ und 25′ lang; construire ein Parallelogramm, dessen eine Seite 10′ lang und dessen einer Winkel 76° groß ist, welches dem gegebenen Dreieck an Flächeninhalt gleich ist, und beweise die Richtigkeit der Construction durch Rechnung! Zugleich wird gefragt: wie groß die Höhe des Parallelogramms ist und wie viele Fuß seine beiden Diagonalen messen?

1. Zeichnung:



2. Rechnung:

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist

$$= \sqrt{(35{,}5 \times 18{,}5 \times 10{,}5 \times 6{,}5)}$$
$$= \sqrt{44823{,}1875} = 211{,}71 \,\square\, \text{Fuß},$$

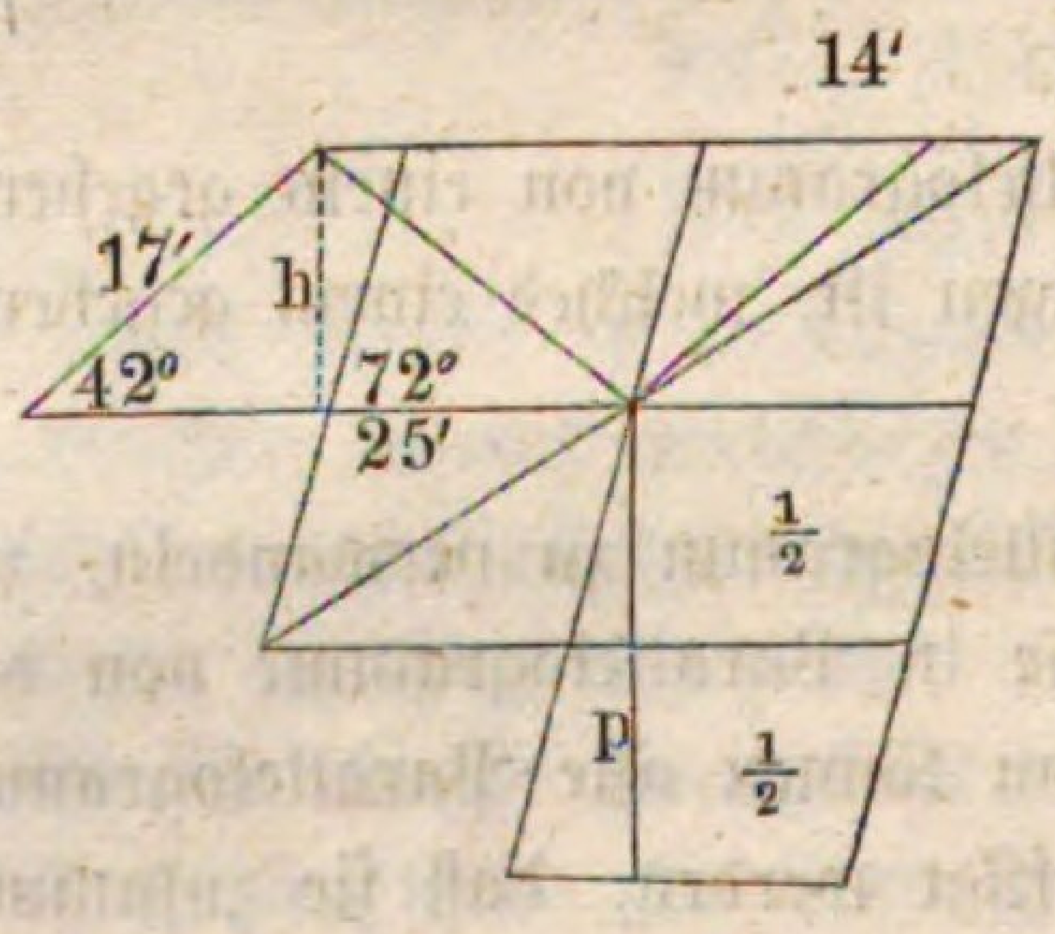
also ist die Höhe des Parallelogramms von gleichem Inhalte und einer Grundlinie von $10' = \frac{211{,}71\square'}{10'}\ 21{,}171'$.

Diagonale $y = 25'$
" $z = 20{,}2'$
Perpendikel $= 21{,}171'$.

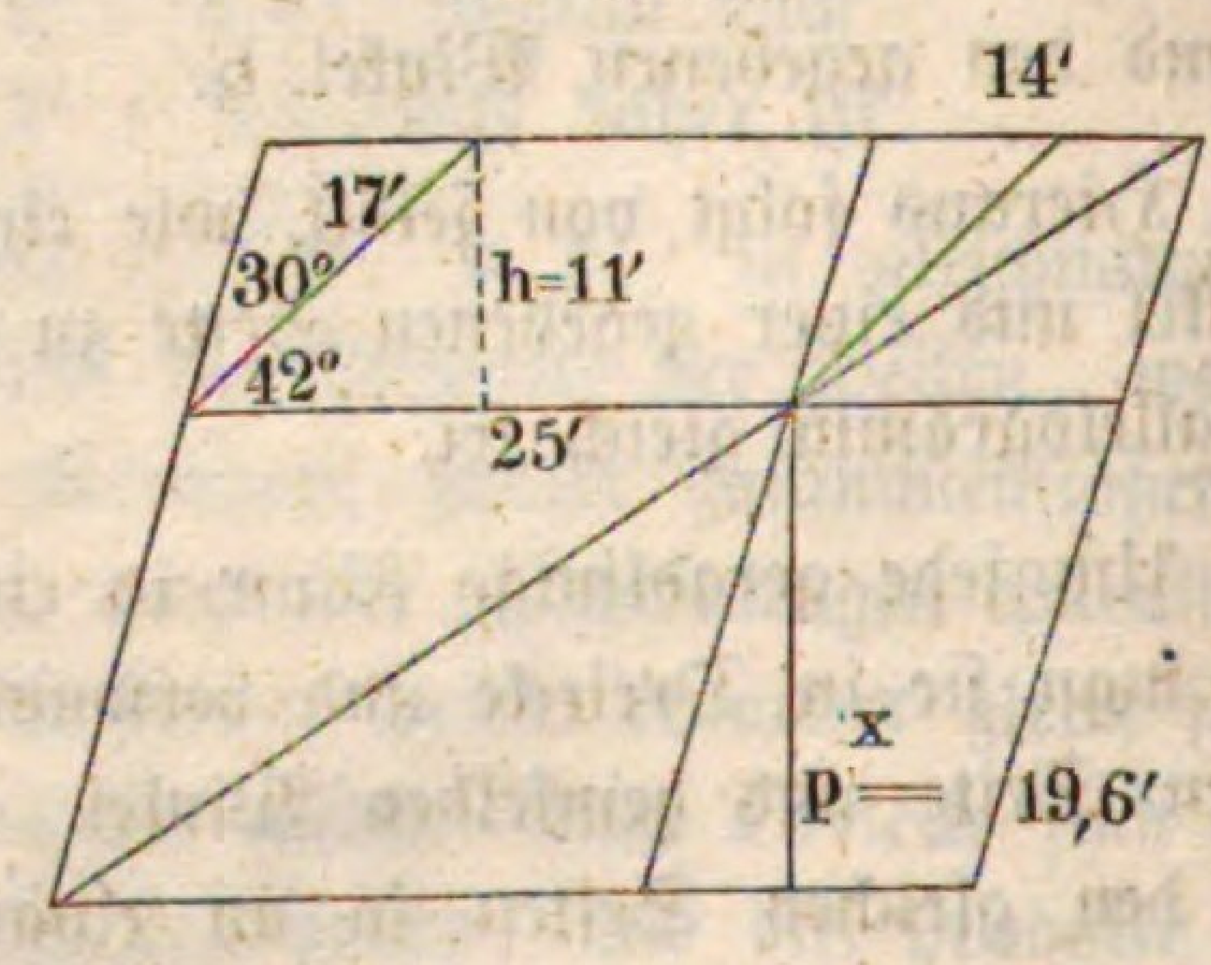
2) Zwei Seiten eines Parallelogramms sind 25′ und 17′ lang und schließen einen Winkel von 42° ein; construire ein Parallelogramm, dessen Grundlinie statt 25′ nur 14′ lang ist, mit einem Winkel von 72°, welches dem gegebenen Parallelogramm an Flächeninhalt gleich ist, und prüfe die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!

1. Zeichnung:

a. indirect.



b. direct.



2. Rechnung:

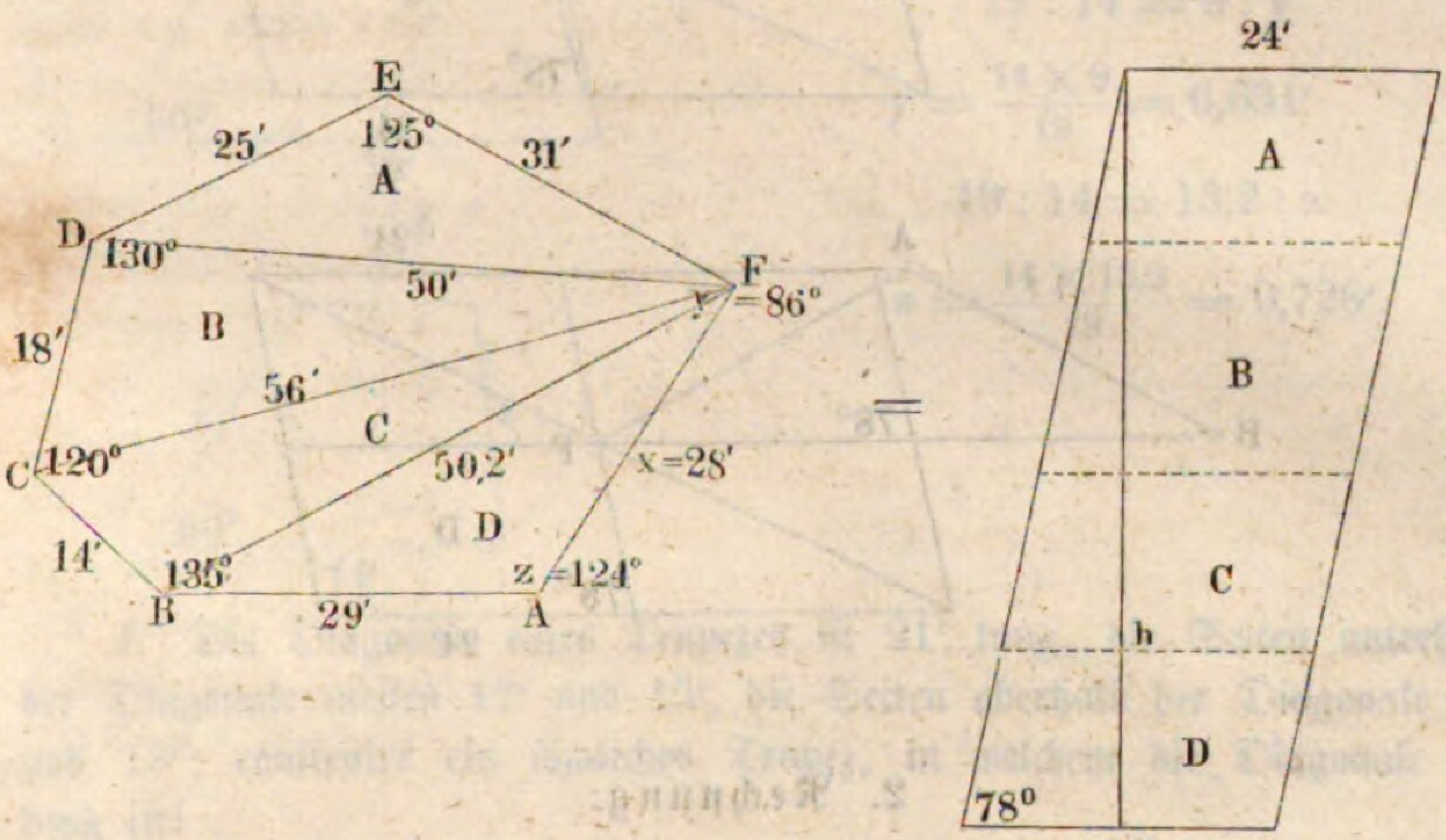
Die Höhe des gegebenen Parallelogramms beträgt 11′, sein Flächeninhalt also $= 11' \times 25' = 275\square'$; die Höhe des gleich großen Parallelogramms von 14′ Grundlinie muß demnach $\frac{275}{14} = 19{,}643'$ sein.

3) Construire ein unregelmäßiges Sechseck nach folgenden Angaben:

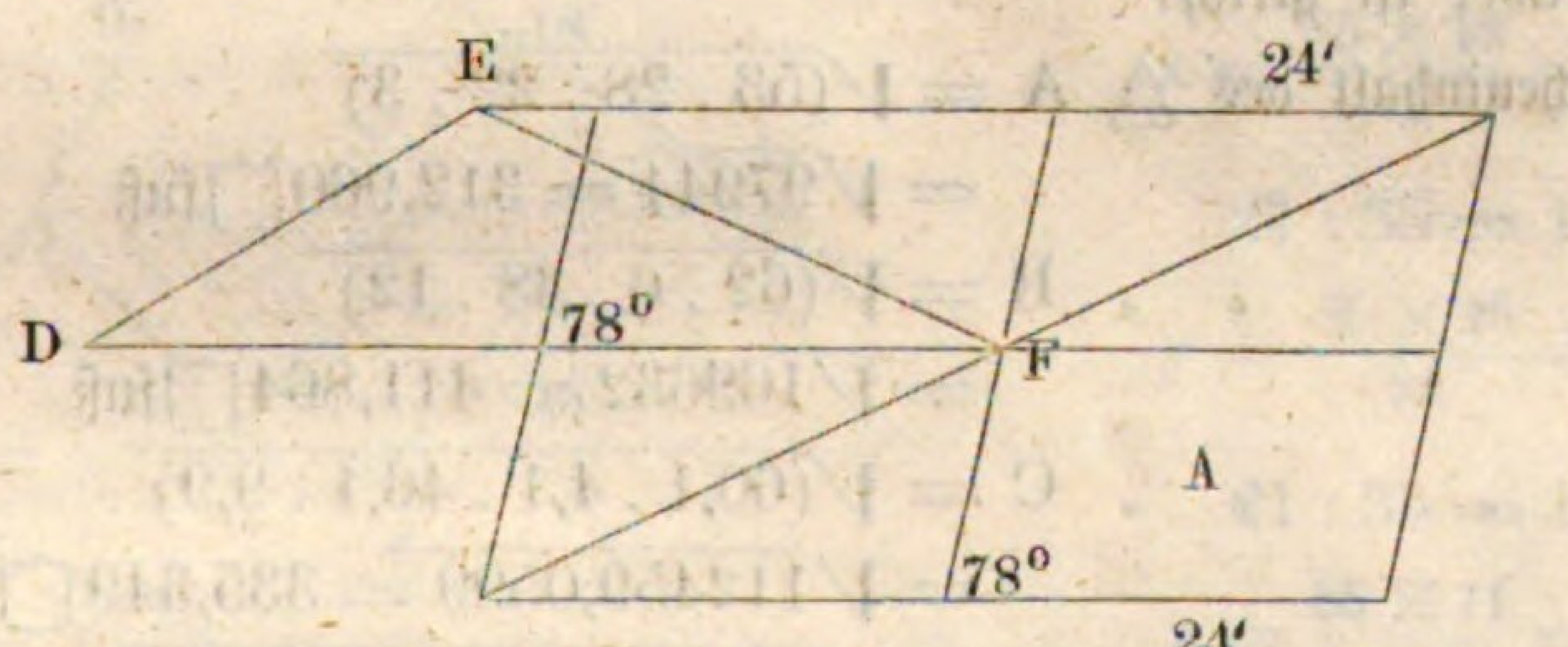
Seite	$AB = 29'$,	Winkel	$B = 135^0$,
"	$BC = 14'$,	"	$C = 120^0$,
"	$CD = 18'$,	"	$D = 130^0$,
"	$DE = 25'$,	"	$E = 125^0$,
"	$EF = 31'$,		

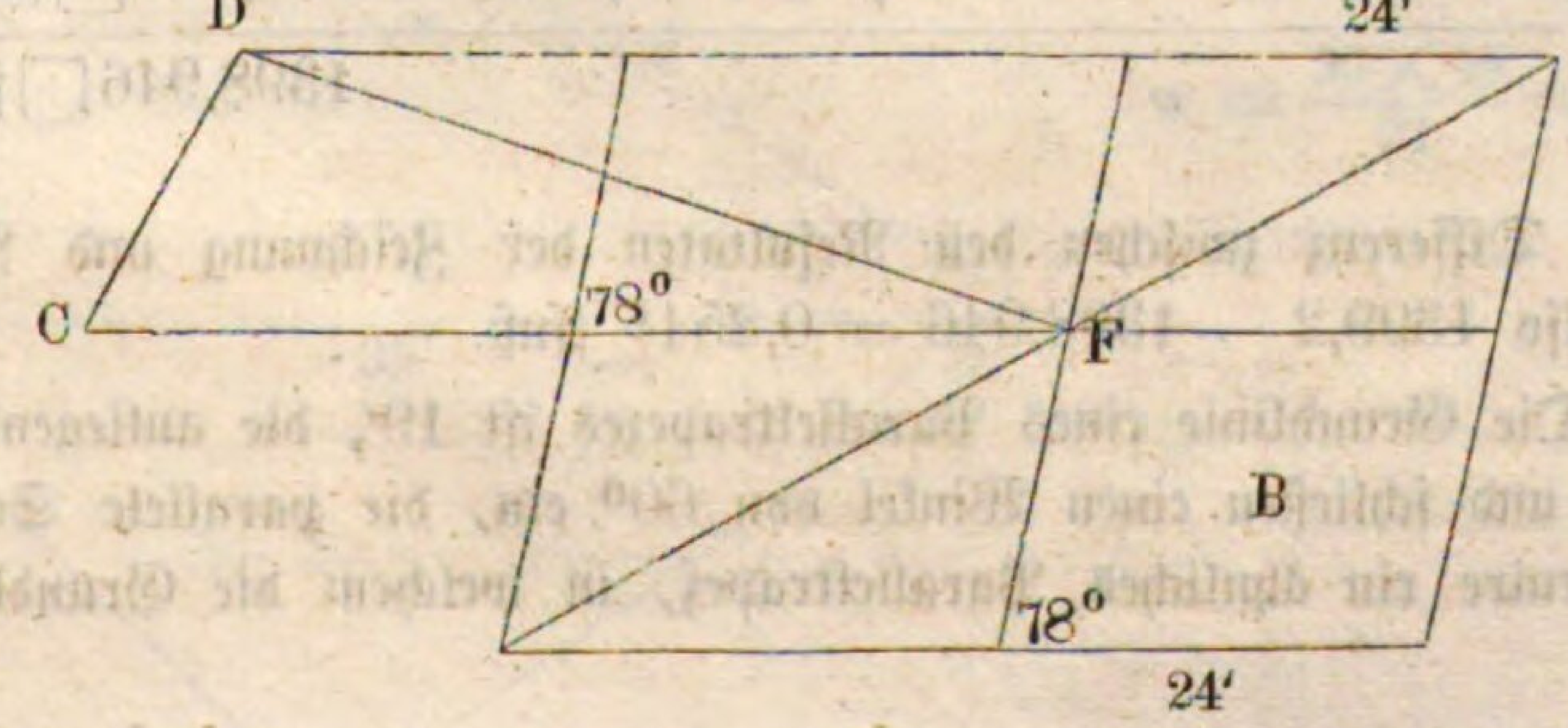
und verwandle diese Figur in ein Parallelogramm von gleichem Flächeninhalt, welches einen Winkel von 78⁰ und eine Seite von 24′ Länge hat, und vergleiche die Zeichnung mit der Rechnung!

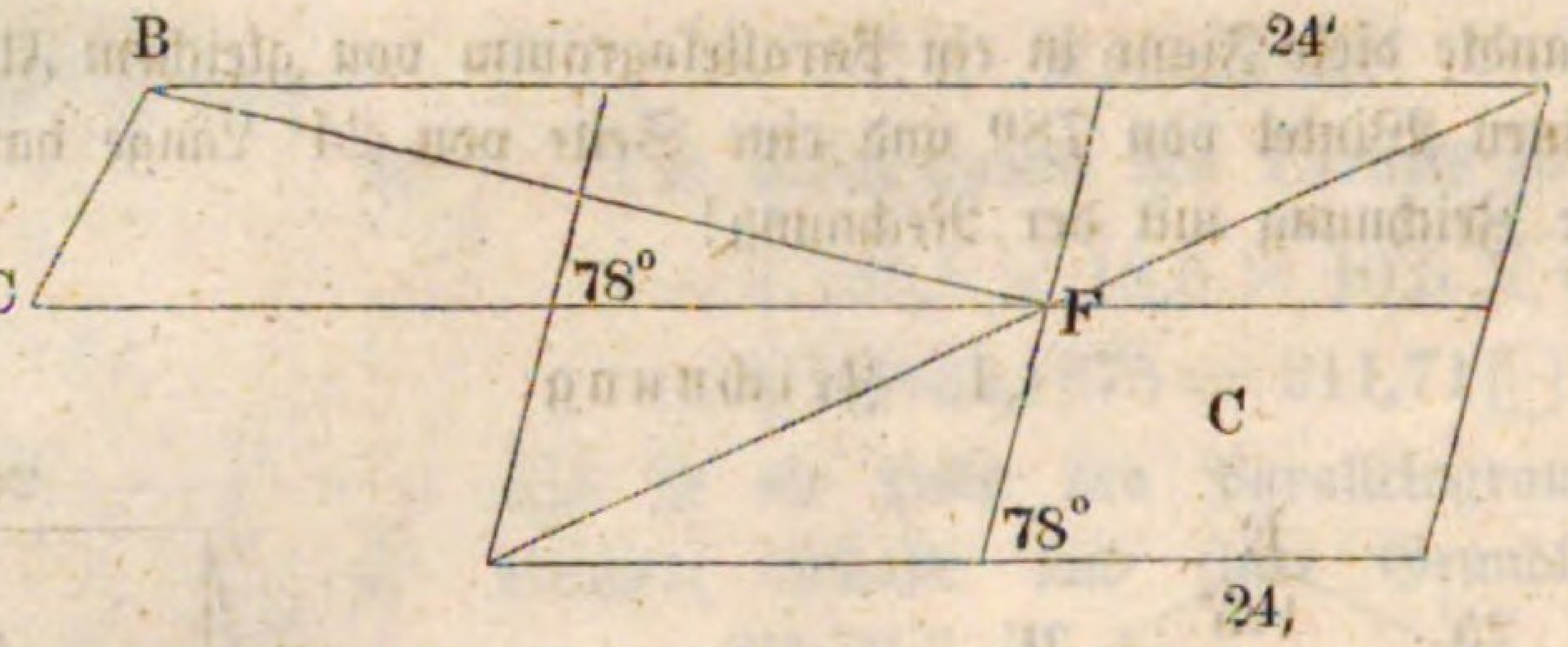
1. Zeichnung:

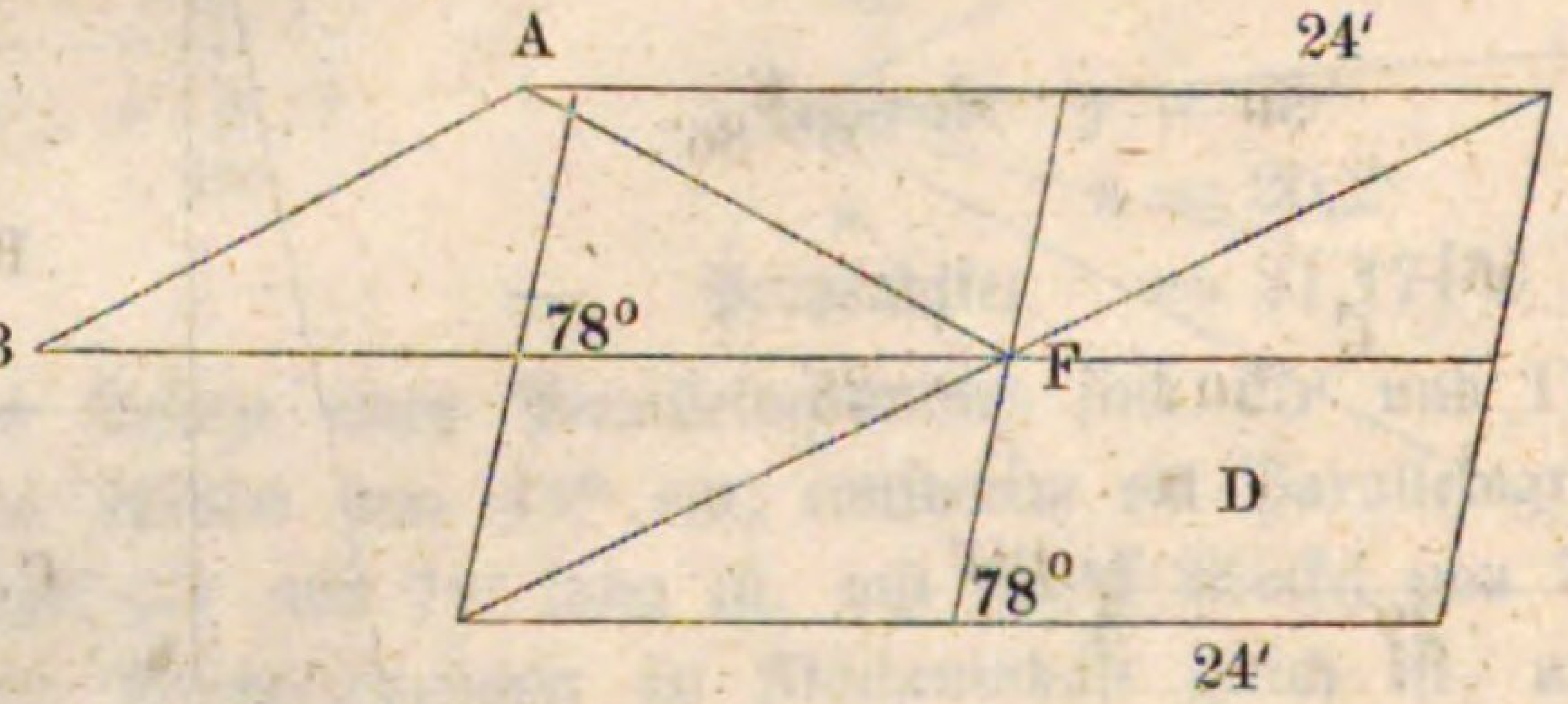


Höhe h = 58,3′.









2. Rechnung:

Der Flächeninhalt des durch Construction gefundenen Parallelogramms ist also $= 24' \times 58{,}3' = 1399{,}2 \square'$; der Flächeninhalt des gegebenen Sechsecks aber ist gleich:

Flächeninhalt des $\triangle$ A $= \sqrt{(53 \,.\, 28 \,.\, 22 \,.\, 3)}$
$= \sqrt{97944} = 312{,}960 \square$ fuß

" " " B $= \sqrt{(62 \,.\, 6 \,.\, 38 \,.\, 12)}$
$= \sqrt{169632} = 411{,}864 \square$ fuß

" " " C $= \sqrt{(60{,}1 \,.\, 4{,}1 \,.\, 46{,}1 \,.\, 9{,}9)}$
$= \sqrt{112459{,}0599} = 335{,}349 \square$ fuß

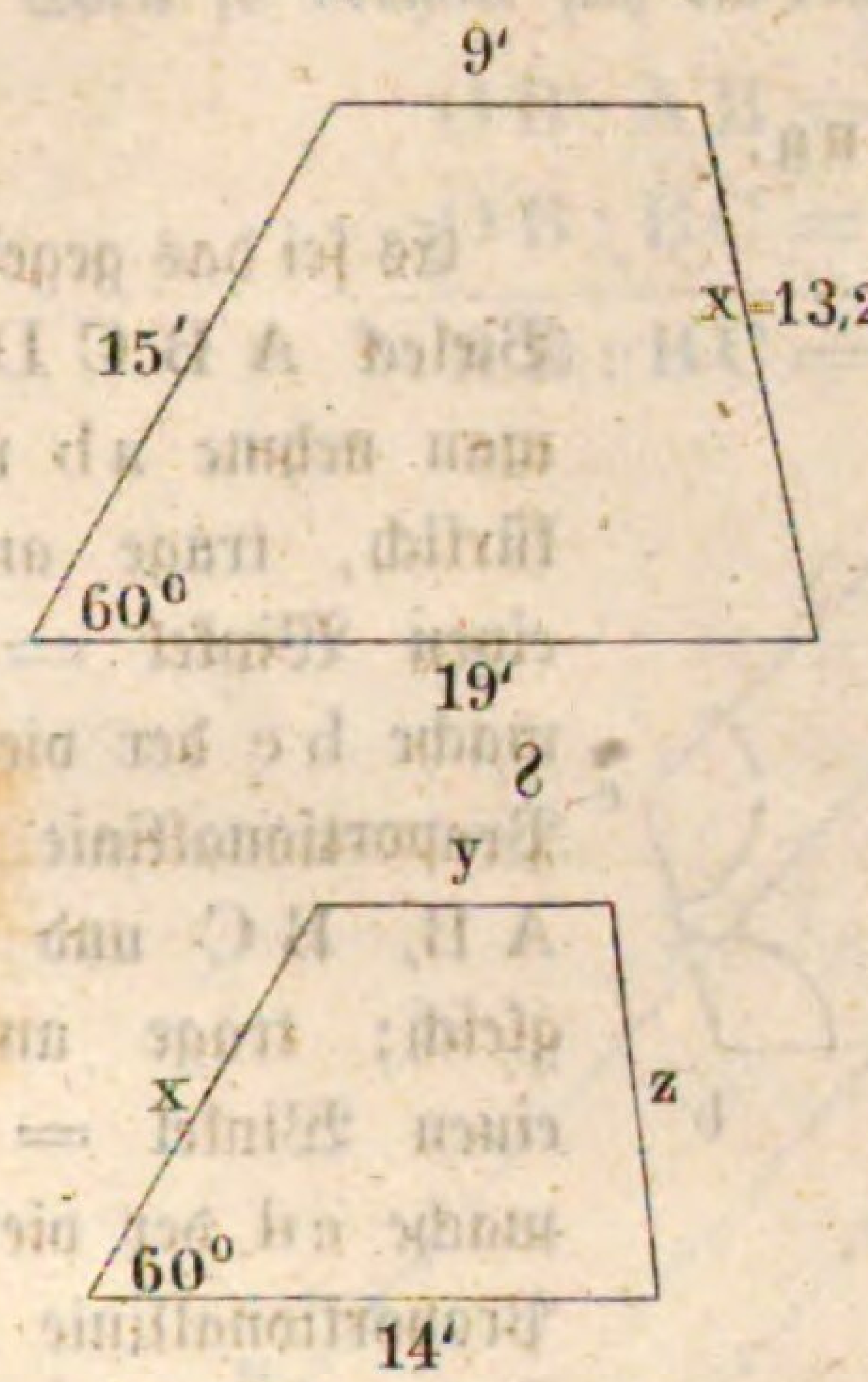
" " " D $= \sqrt{(53{,}6 \,.\, 3{,}4 \,.\, 24{,}6 \,.\, 25{,}6)}$
$= \sqrt{114767{,}4624} = 338{,}773 \square$ fuß

1398,946 □ fuß.

Die Differenz zwischen den Resultaten der Zeichnung und Rechnung beträgt also $1399{,}2 - 1398{,}946 = 0{,}254 \square$ fuß.

e. Die Grundlinie eines Paralleltrapezes ist 19′, die anliegende Seite 15′ lang und schließen einen Winkel von 60° ein, die parallele Seite mißt 9′; construire ein ähnliches Paralleltrapez, in welchem die Grundlinie 14′ lang ist!

1. Zeichnung:



2. Rechnung:

$$19 : 14 = 15 : x$$

$$x = \frac{14 \times 15}{19} = 11{,}052'$$

$$19 : 14 = 9 : y$$

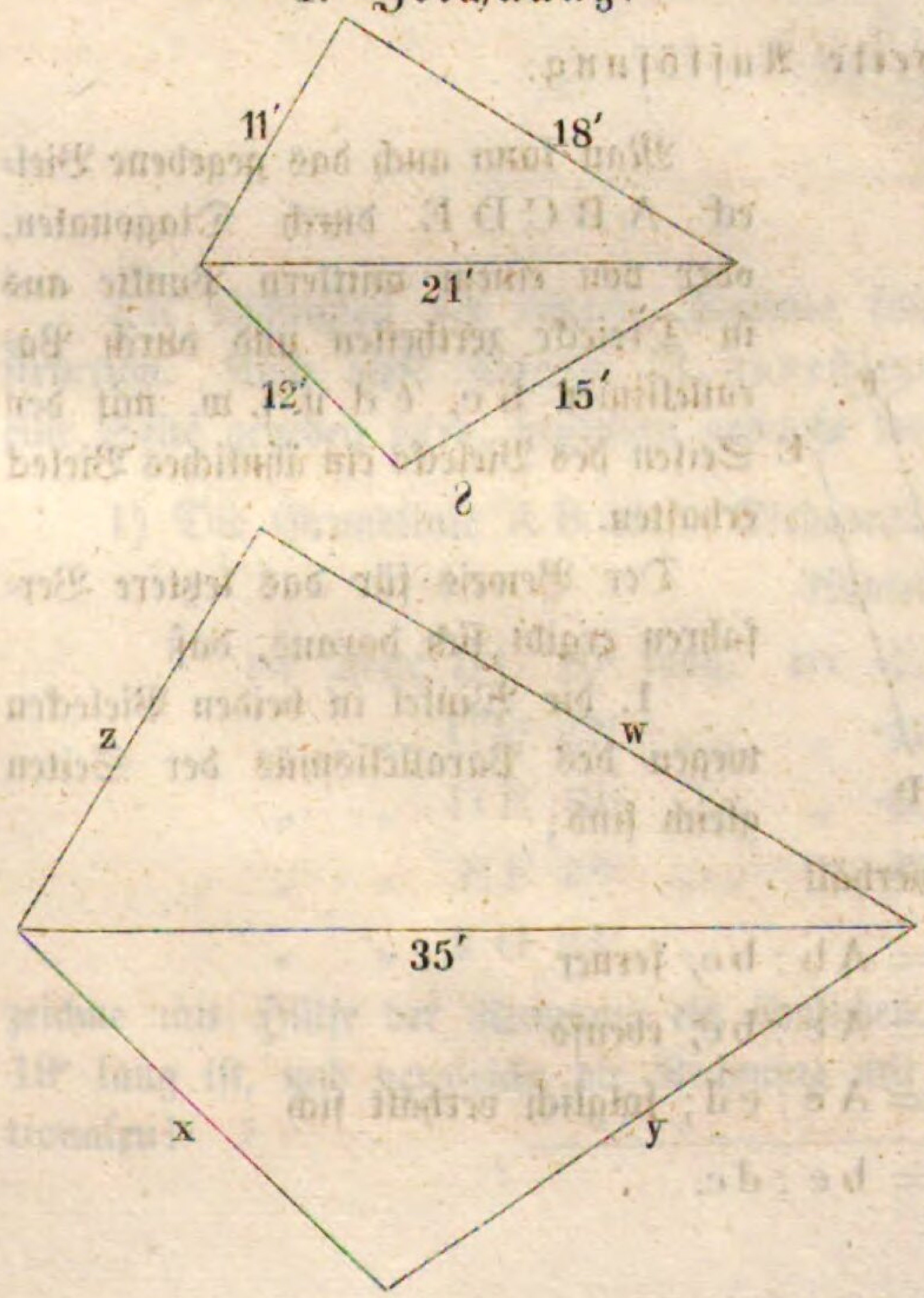
$$y = \frac{14 \times 9}{19} = 6{,}631'$$

$$19 : 14 = 13{,}2 : z$$

$$z = \frac{14 \times 13{,}2}{19} = 9{,}726'.$$

f. Die Diagonale eines Trapezes ist 21′ lang, die Seiten unterhalb der Diagonale messen 12′ und 15′, die Seiten oberhalb der Diagonale 11′ und 18′; construire ein ähnliches Trapez, in welchem die Diagonale 35′ lang ist!

1. Zeichnung:



2. Rechnung:

$$21 : 35 = 12 : x$$

$$x = \frac{35 \times 12}{21} = 20'$$

$$21 : 35 = 15 : y$$

$$y = \frac{35 \times 15}{21} = 25'$$

$$21 : 35 = 11 : z$$

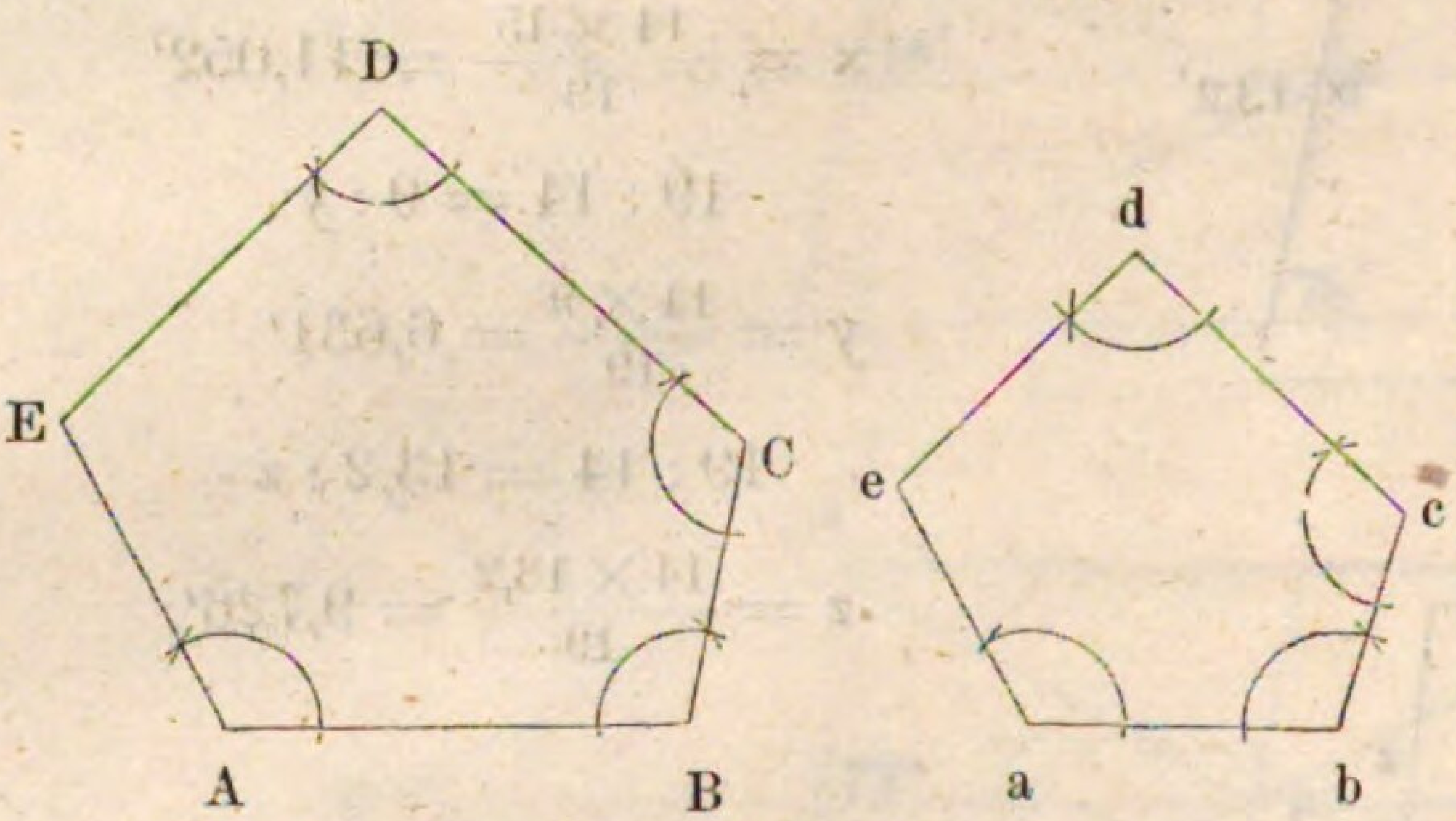
$$z = \frac{35 \times 11}{21} = 18{,}333'$$

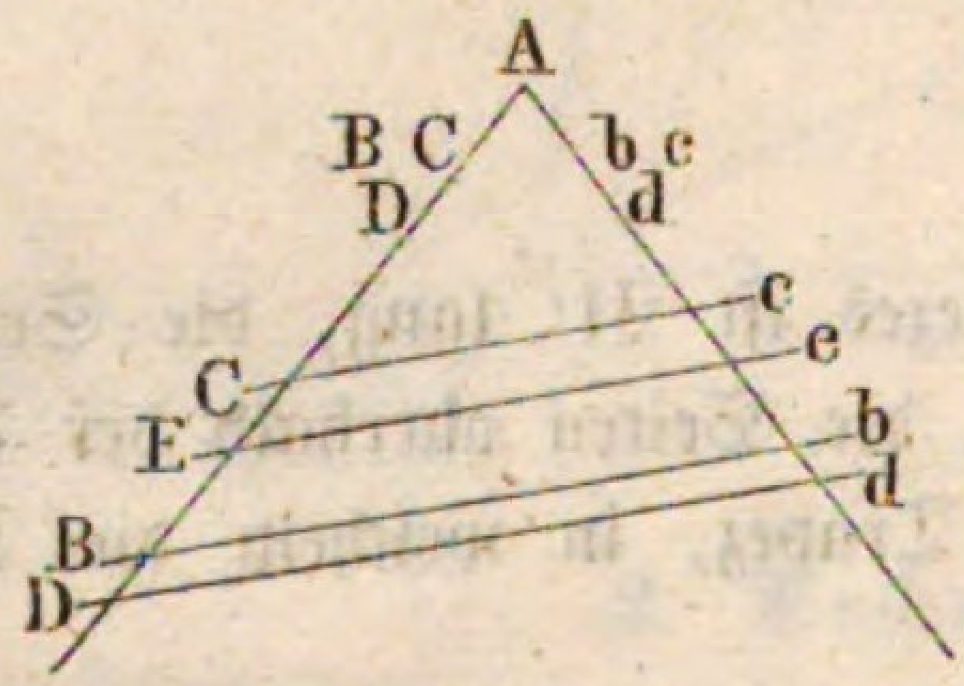
$$21 : 35 = 18 : w$$

$$w = \frac{35 \times 18}{21} = 30'.$$

6) Ein Vieleck zu zeichnen, welches einem gegebenen ähnlich ist!

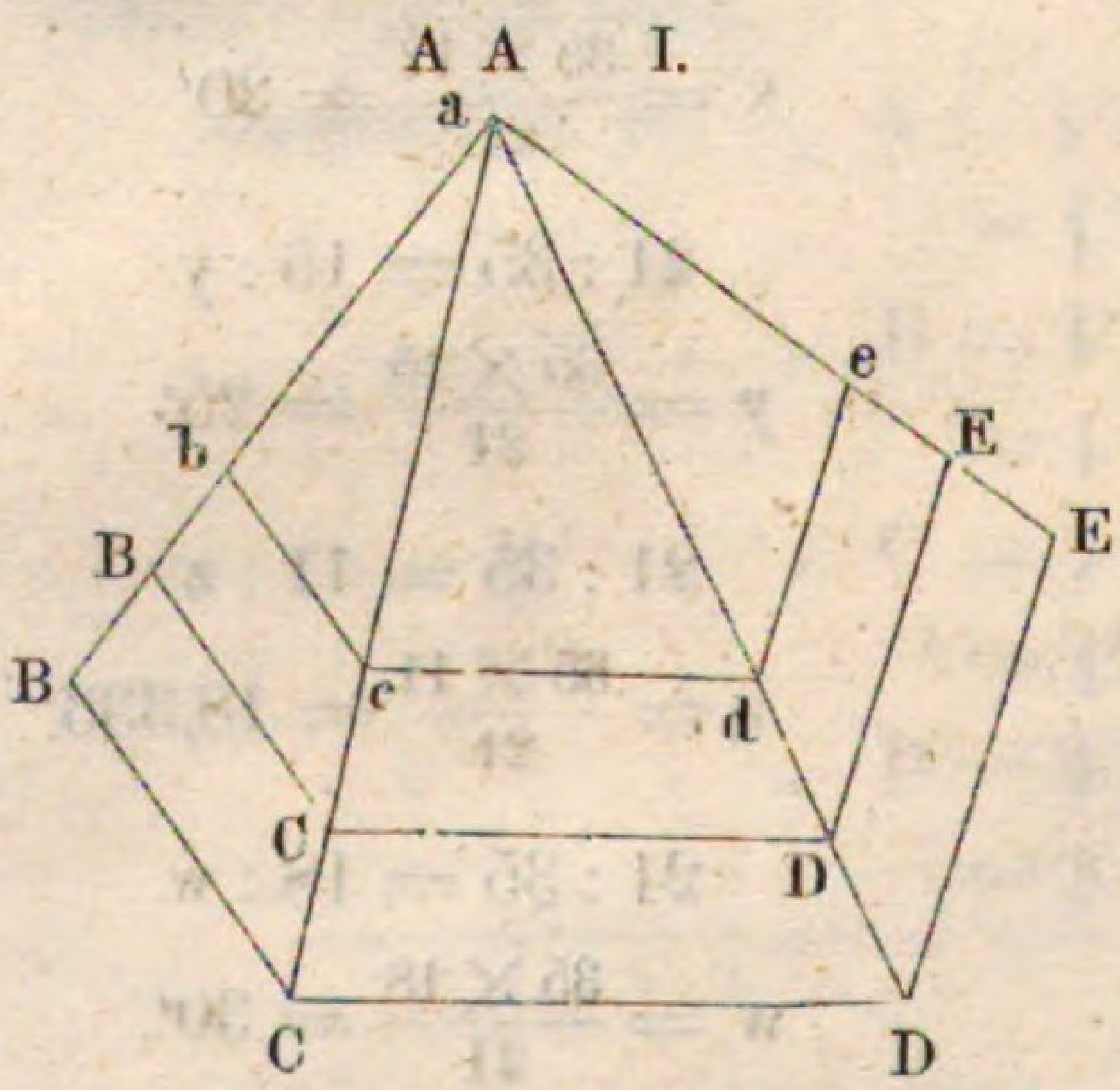
Erste Auflösung:





Es sei das gegebene Vieleck A B C D E; man nehme a b willkürlich, trage an b einen Winkel = B, mache b c der vierten Proportionallinie zu A B, B C und a b gleich; trage an c einen Winkel = C, mache c d der vierten Proportionallinie zu B C, C D und b c gleich u. s. w., so wird abcde ∽ ABCDE.

Zweite Auflösung:



Man kann auch das gegebene Vieleck A B C D E durch Diagonalen, oder von einem mittlern Punkte aus in Dreiecke zertheilen und durch Parallellinien b c, c d u. s. w. mit den Seiten des Vielecks ein ähnliches Vieleck erhalten.

Der Beweis für das letztere Verfahren ergibt sich daraus, daß

1. die Winkel in beiden Vielecken wegen des Parallelismus der Seiten gleich sind;

2. daß in № I sich verhält

$$AB : BC = Ab : bc, \text{ ferner}$$
$$AC : BC = Ac : bc, \text{ ebenso}$$
$$AC : CD = Ac : cd; \text{ folglich verhält sich}$$
$$BC : CD = bc : dc.$$

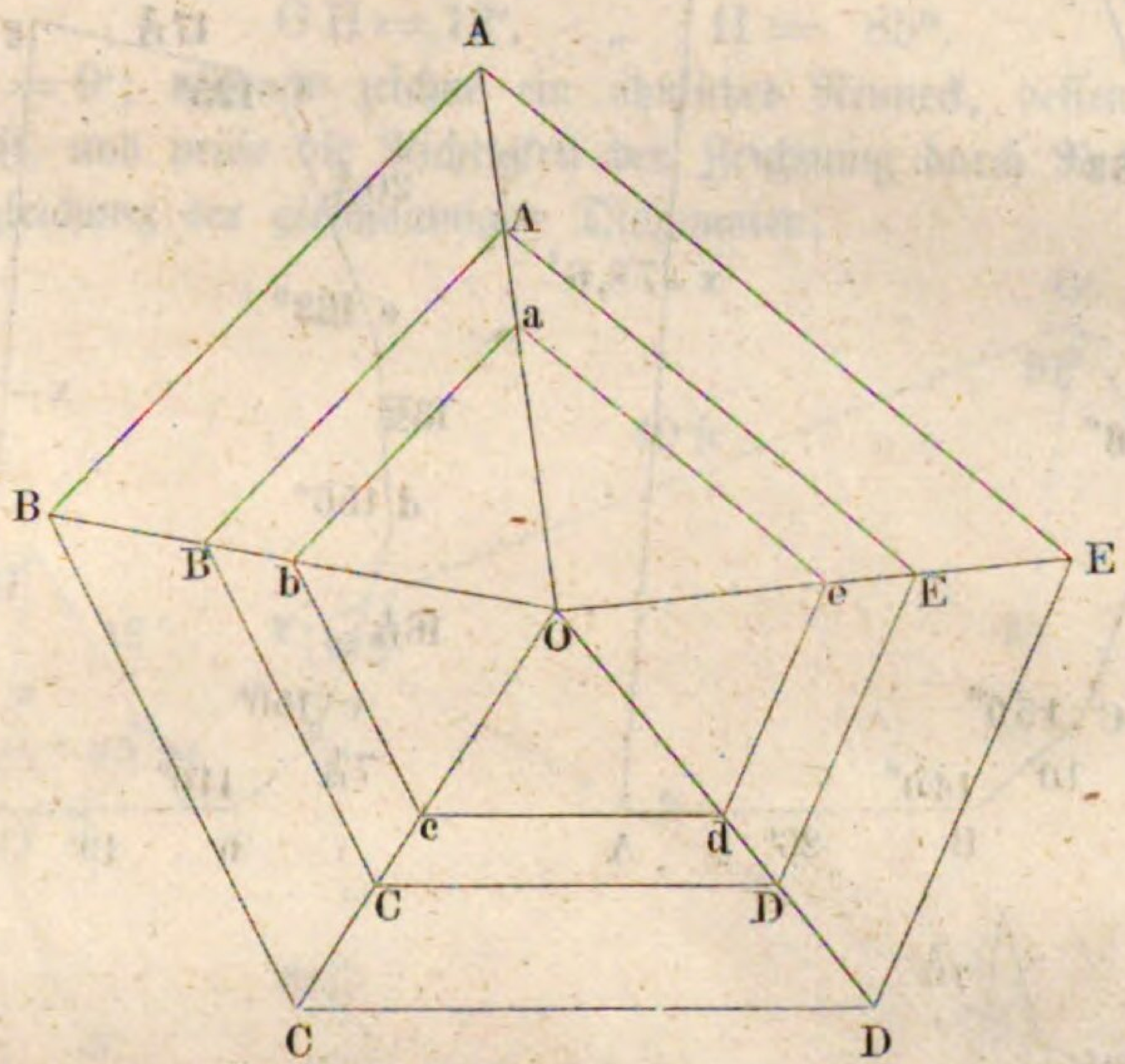
Eben so verhält sich in №. II

$OB : AB = Ob : ab$, ingleichen

$OB : BC = Ob : bc$, folglich verhält sich

$AB : BC = ab : bc$.

II.



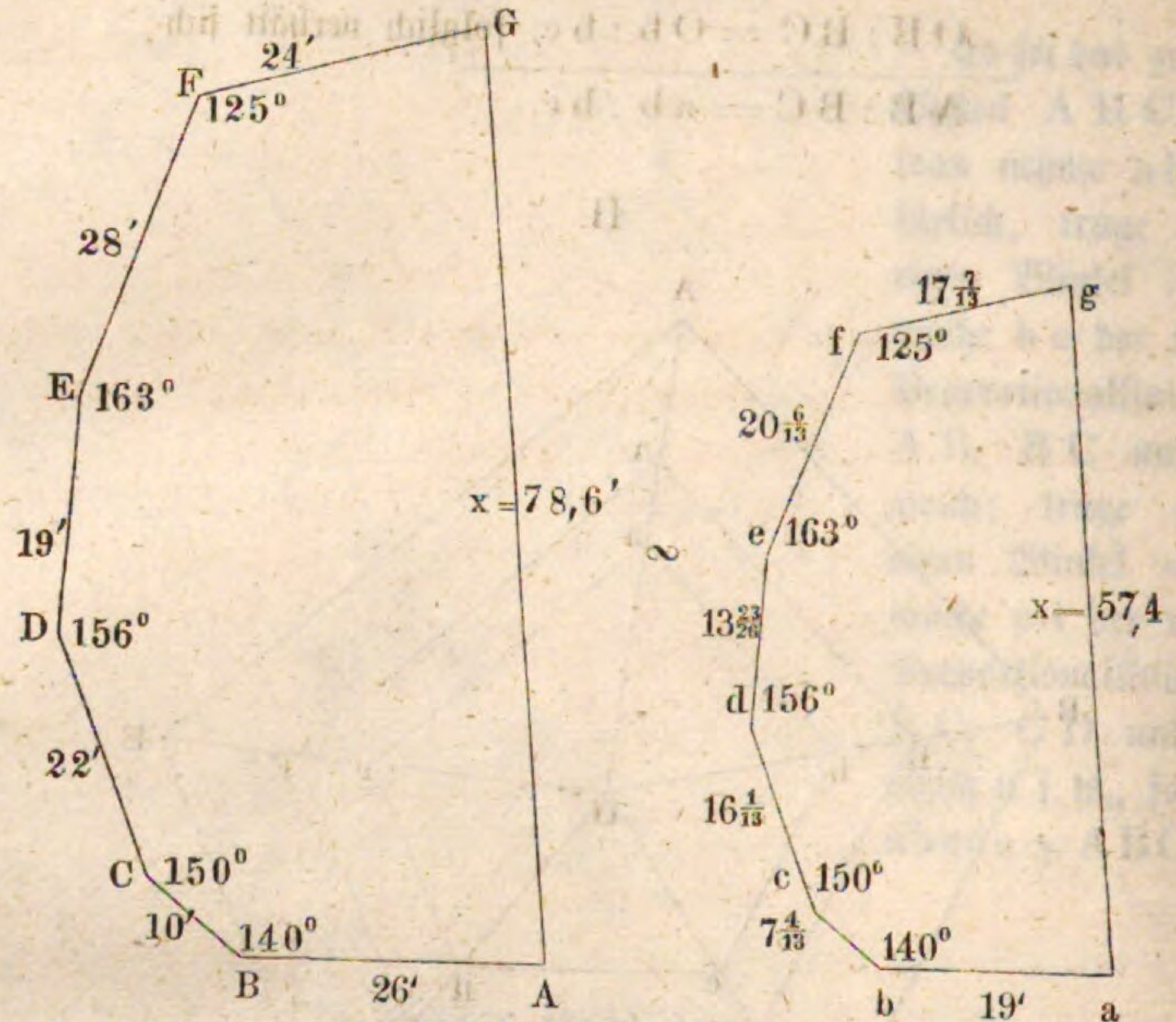
Die Richtigkeit der erstern Methode folgt unmittelbar aus der Construction. Auch diese Aufgabe ist **unbestimmt**, kann aber dadurch, daß eine Seite gegeben wird, bestimmt gemacht werden, z. B.

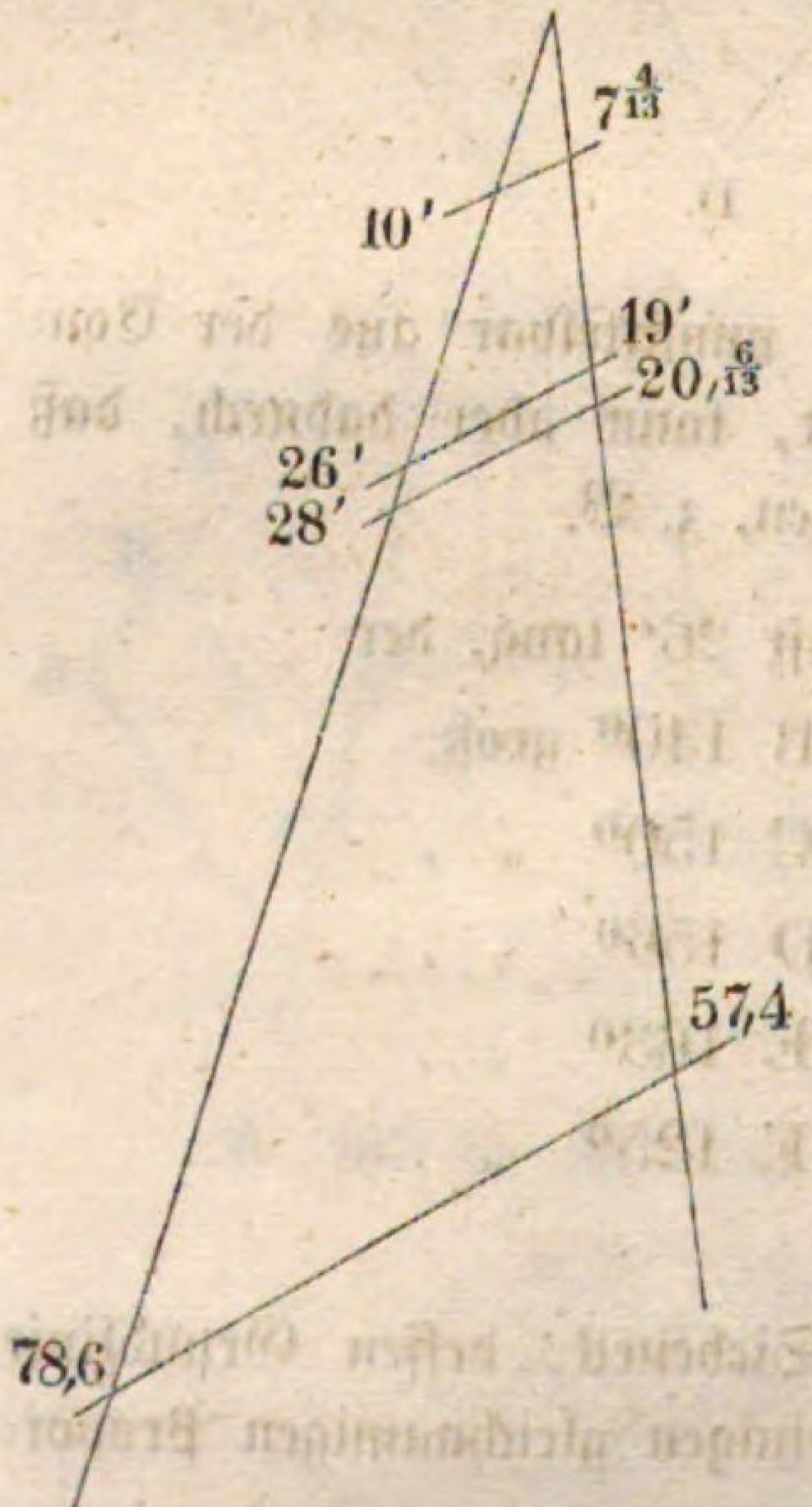
1) Die Grundlinie AB eines Siebenecks ist 26′ lang, der Winkel B 140° groß,

		Winkel	B 140° groß,
die Seite	BC 10′ lang,	der ∢	C 150° „ ,
„ „	CD 22′ „ ,	„ ∢	D 156° „ ,
„ „	DE 19′ „ ,	„ ∢	E 163° „ ,
„ „	EF 28′ „ ,	„ ∢	F 125° „ ,
„ „	FG 24′ „ ;		

zeichne mit Hülfe der Rechnung ein ähnliches Siebeneck, dessen Grundlinie 19′ lang ist, und vergleiche die Rechnung mit einigen gleichnamigen Proportionalen!

1. Zeichnung:





2. Rechnung:

$$26' : 10' = 19' : bc$$

$$bc = \frac{10 \times 19}{26} = 7^4/_{13},$$

$$cd = \frac{22 \times 19}{26} = 16^1/_{13},$$

$$de = \frac{19 \times 19}{26} = 13^{23}/_{26},$$

$$ef = \frac{28 \times 19}{26} = 20^6/_{13},$$

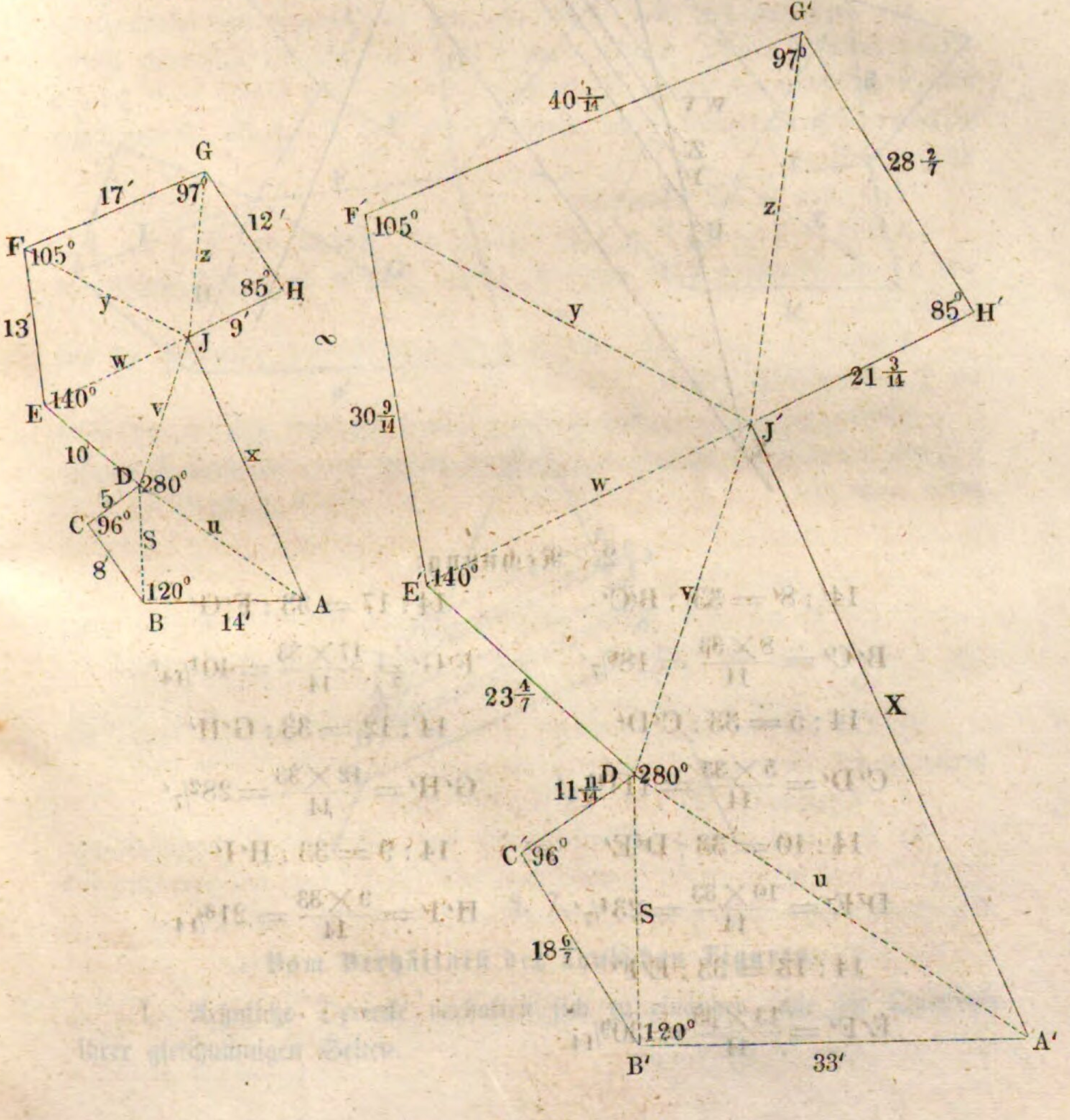
$$fg = \frac{24 \times 19}{26} = 17^7/_{13},$$

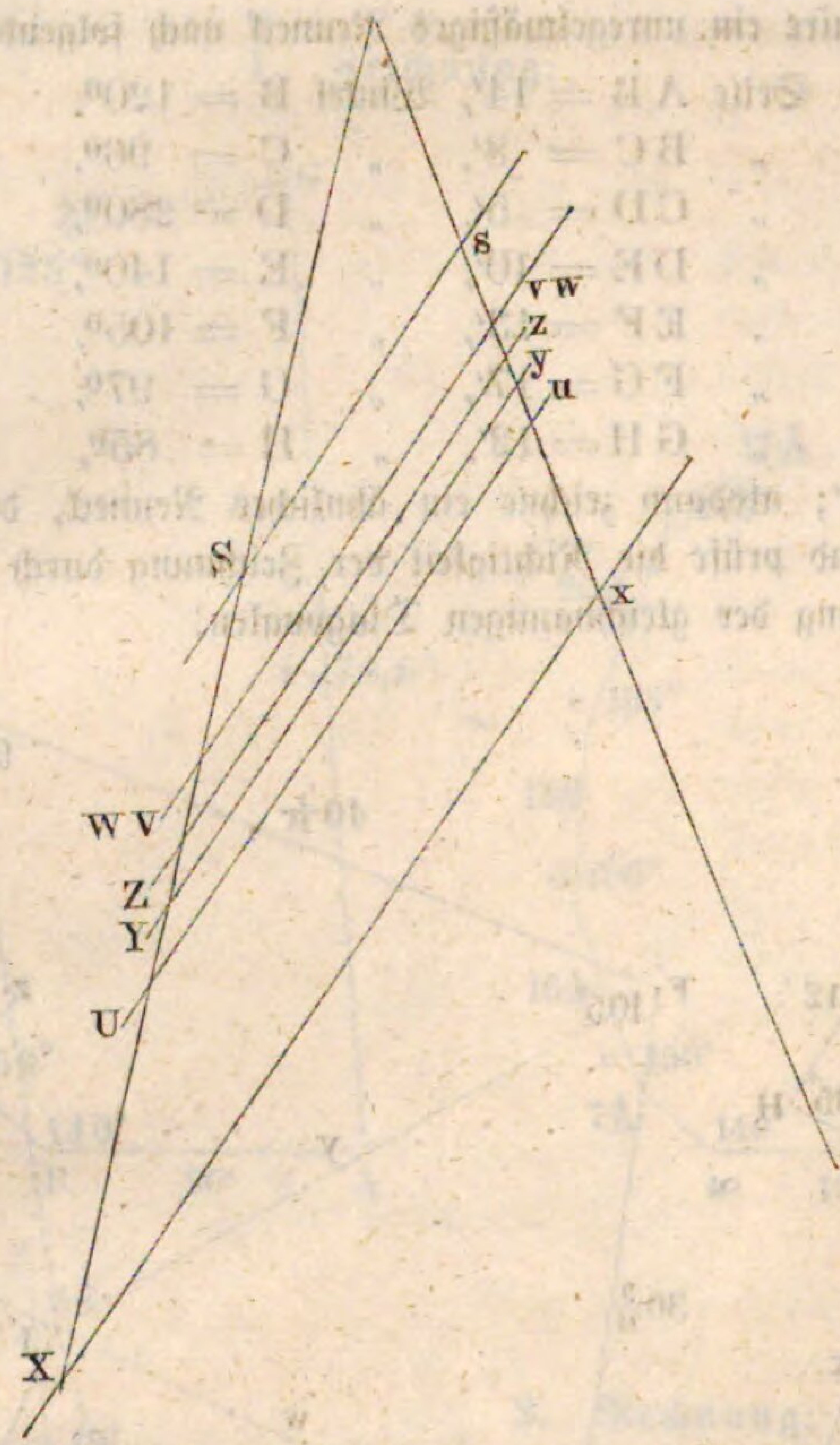
$$ga = \frac{78,6 \times 19}{26} = 57,4.$$

2) Construire ein unregelmäßiges Neuneck nach folgenden Angaben:

Seite	AB = 14′,	Winkel	B = 120°,
„	BC = 8′,	„	C = 96°,
„	CD = 5′,	„	D = 280°,
„	DE = 10′,	„	E = 140°,
„	EF = 13′,	„	F = 105°,
„	FG = 17′,	„	G = 97°,
„	GH = 12′,	„	H = 85°,

Seite HJ = 9′; alsdann zeichne ein ähnliches Neuneck, dessen Grundlinie 33′ lang ist, und prüfe die Richtigkeit der Zeichnung durch Rechnung, sowie durch Vergleichung der gleichnamigen Diagonalen!





2. Rechnung:

$14' : 8' = 33' : B'C'$

$B'C' = \frac{8 \times 33}{14} = 18^{6}/_{7}'$

$14 : 5 = 33 : C'D'$

$C'D' = \frac{5 \times 33}{14} = 11^{11}/_{14}'$

$14 : 10 = 33 : D'E'$

$D'E' = \frac{10 \times 33}{14} = 23^{4}/_{7}'$

$14 : 13 = 33 : E'F'$

$E'F' = \frac{13 \times 33}{14} = 30^{9}/_{14}$

$14 : 17 = 33 : F'G'$

$F'G' = \frac{17 \times 33}{14} = 40^{1}/_{14}'$

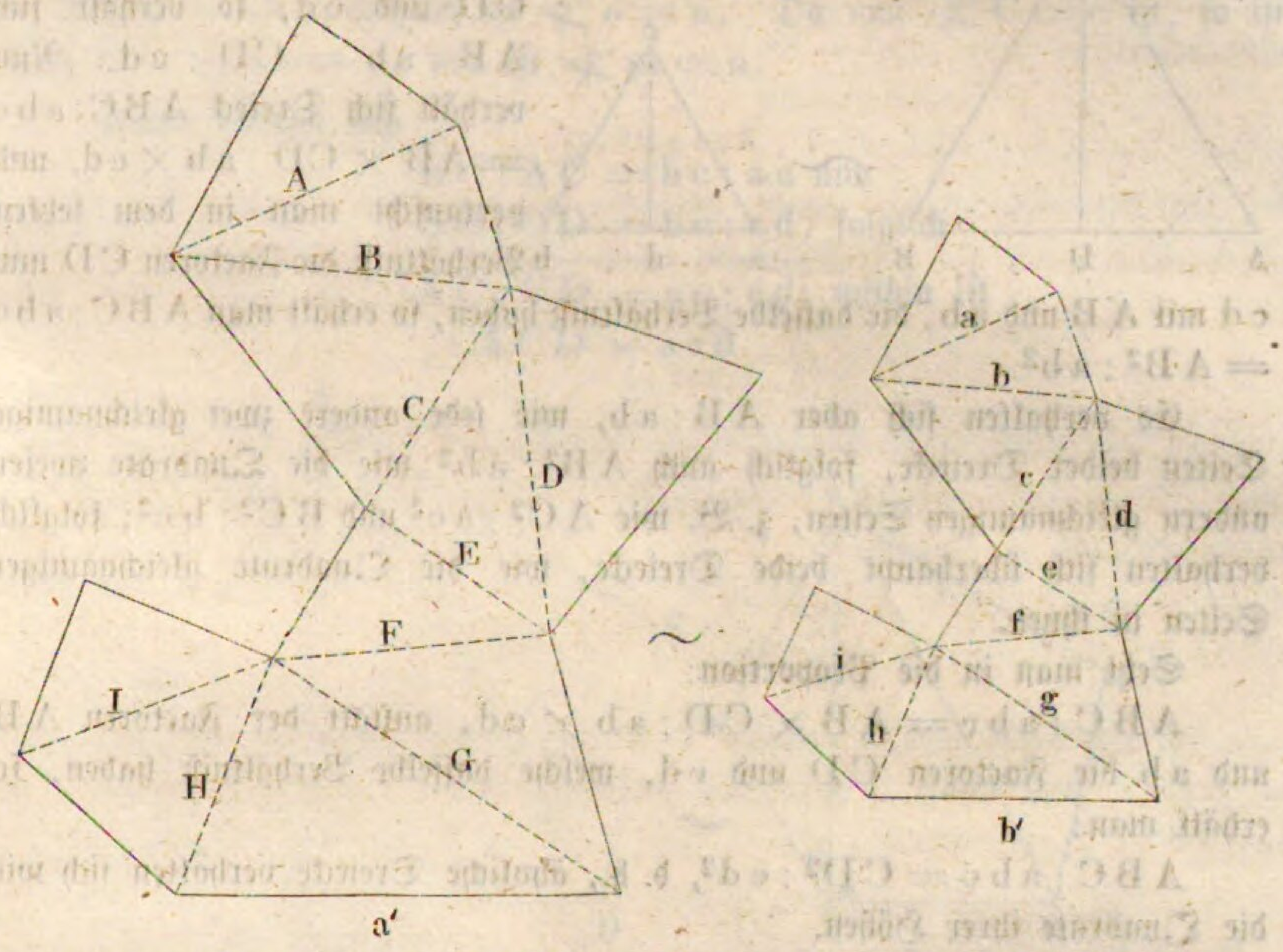
$14 : 12 = 33 : G'H'$

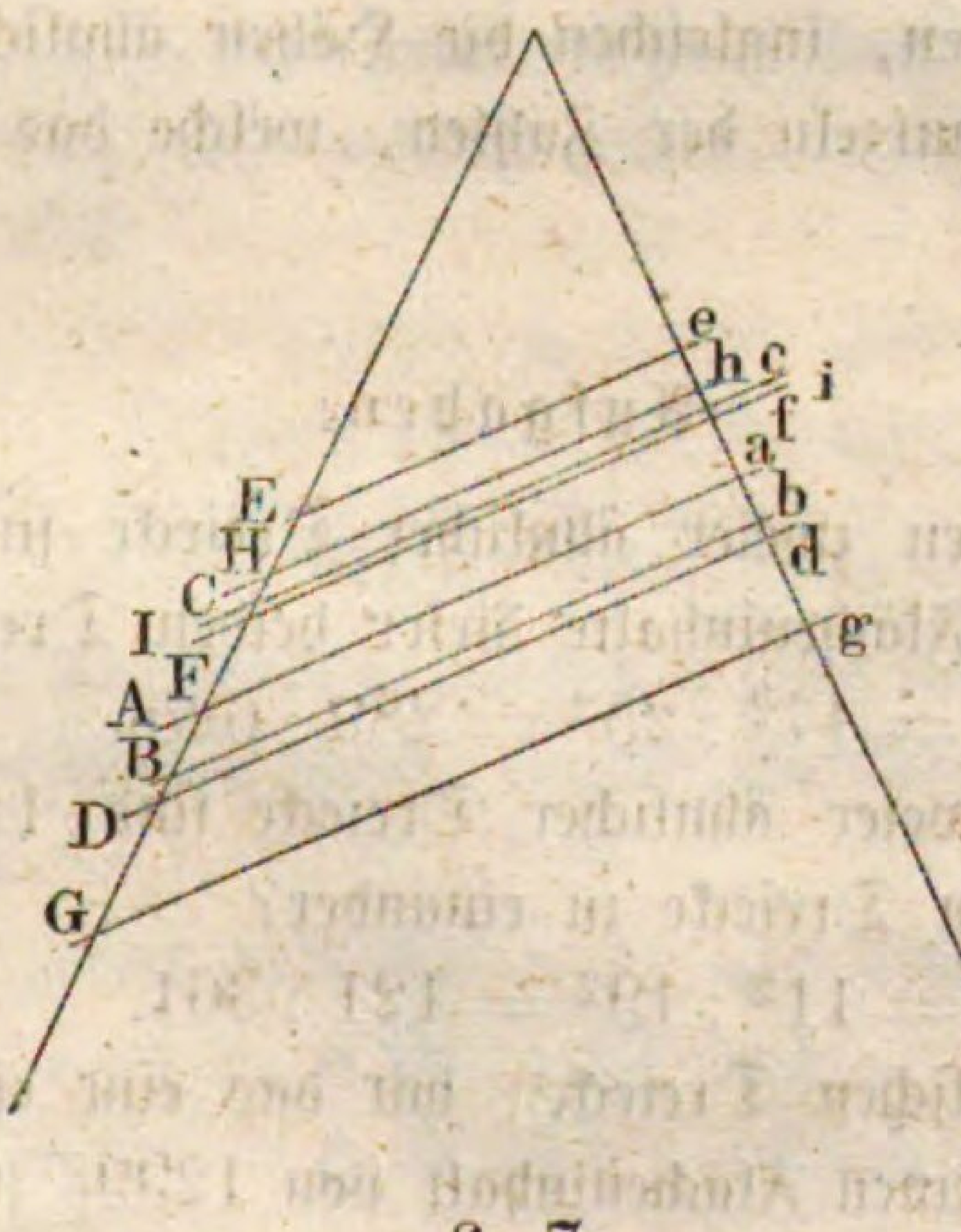
$G'H' = \frac{12 \times 33}{14} = 28^{2}/_{7}'$

$14 : 9 = 33 : H'I'$

$H'I' = \frac{9 \times 33}{14} = 21^{3}/_{14}.$

3) Die Grundlinie des vorgezeichneten Zwölfecks ist a′ lang; construire ein ähnliches Vieleck, in welchem die Grundlinie b′ lang ist, und prüfe die Richtigkeit der Zeichnung durch Vergleichung der gleichnamigen Diagonalen!



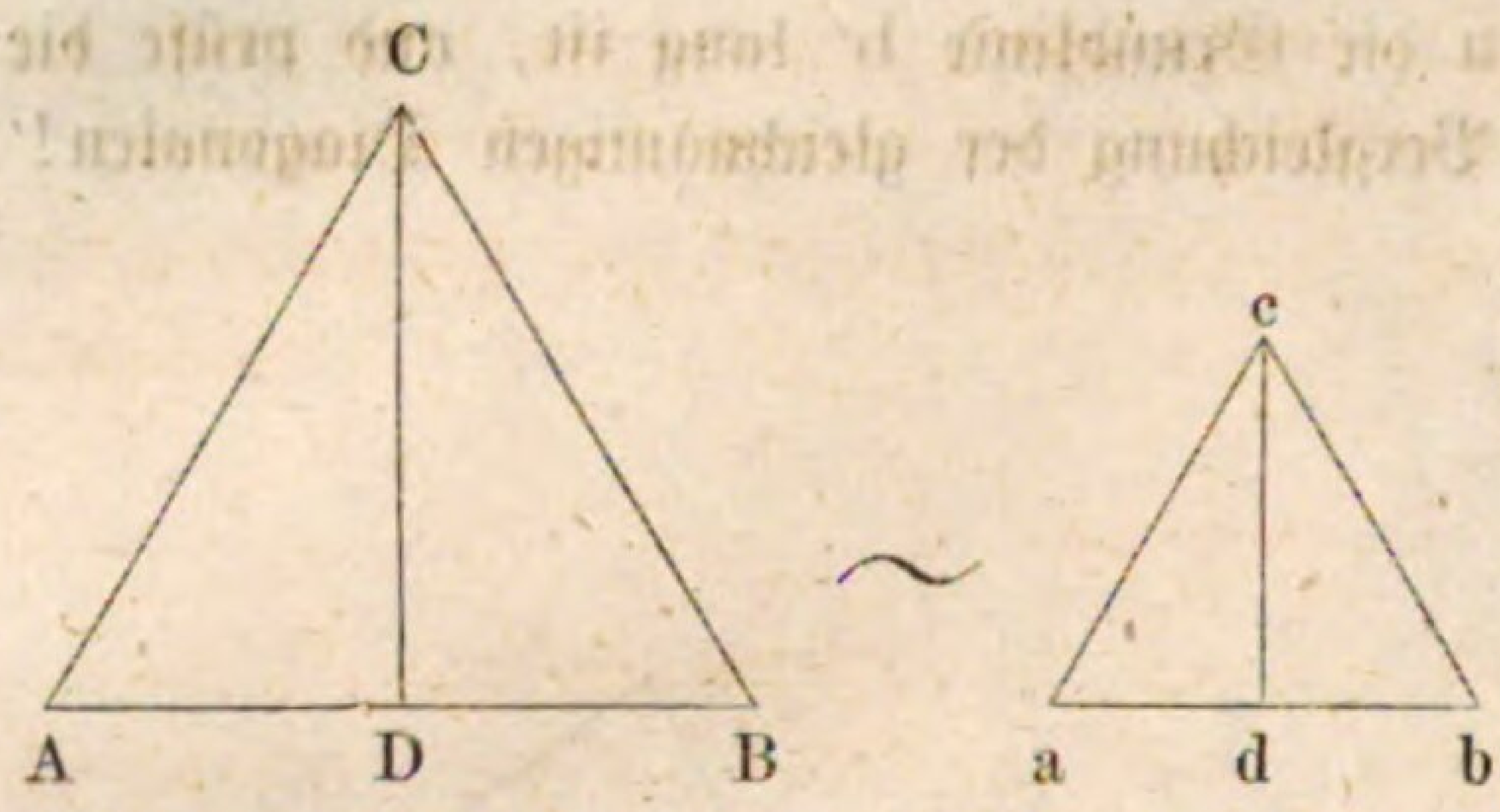


§. 7.

Vom Verhältniß der ähnlichen Figuren.

I. Aehnliche Dreiecke verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.

Beweis:



Es sei das Dreieck A B C $\sim$ a b c; man fälle die Perpendikel CD und c d, so verhält sich AB : ab = CD : cd. Nun verhält sich Dreieck ABC : abc = AB $\times$ CD : ab $\times$ cd, und vertauscht man in dem letzten Verhältniß die Factoren CD und cd mit A B und a b, die dasselbe Verhältniß haben, so erhält man ABC : abc = $AB^2 : ab^2$.

Es verhalten sich aber AB : ab, wie jede andere zwei gleichnamige Seiten beider Dreiecke, folglich auch $AB^2 : ab^2$ wie die Quadrate zweier andern gleichnamigen Seiten, z. B. wie $AC^2 : ac^2$ und $BC^2 : bc^2$; folglich verhalten sich überhaupt beide Dreiecke, wie die Quadrate gleichnamiger Seiten in ihnen.

Setzt man in die Proportion:

ABC : abc = AB $\times$ CD : ab $\times$ cd, anstatt der Factoren AB und ab die Factoren CD und cd, welche dasselbe Verhältniß haben, so erhält man:

ABC : abc = $CD^2 : cd^2$, d. h., ähnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer Höhen.

Gleichnamige Seiten, ingleichen die Höhen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Zahlen, welche das Verhältniß ihres Inhalts ausdrücken.

Aufgaben:

1) Die Grundlinien zweier ähnlicher Dreiecke sind 17′ und 25′ lang; wie verhalten sich die Flächeninhalte dieser beiden Dreiecke zu einander?

Antwort: $= 17^2 : 25^2 = 289 : 625$.

2) Die Höhen zweier ähnlicher Dreiecke sind 11′ und 19′ lang; wie verhalten sich die beiden Dreiecke zu einander?

Antwort: $= 11^2 : 19^2 = 121 : 361$.

3) Von zwei ähnlichen Dreiecken hat das eine einen Flächeninhalt von 3651 □′, das andere einen Flächeninhalt von 1299 □fuß; wie verhalten sich die gleichnamigen Seiten und Höhen dieser Dreiecke zu einander?

Antwort: $= \sqrt{3651} : \sqrt{1299} = 60{,}42 : 36{,}04$.

II. Aehnliche Vier- und Vielecke verhalten sich wie die Quadrate gleichnamiger Seiten in ihnen.

Beweis:

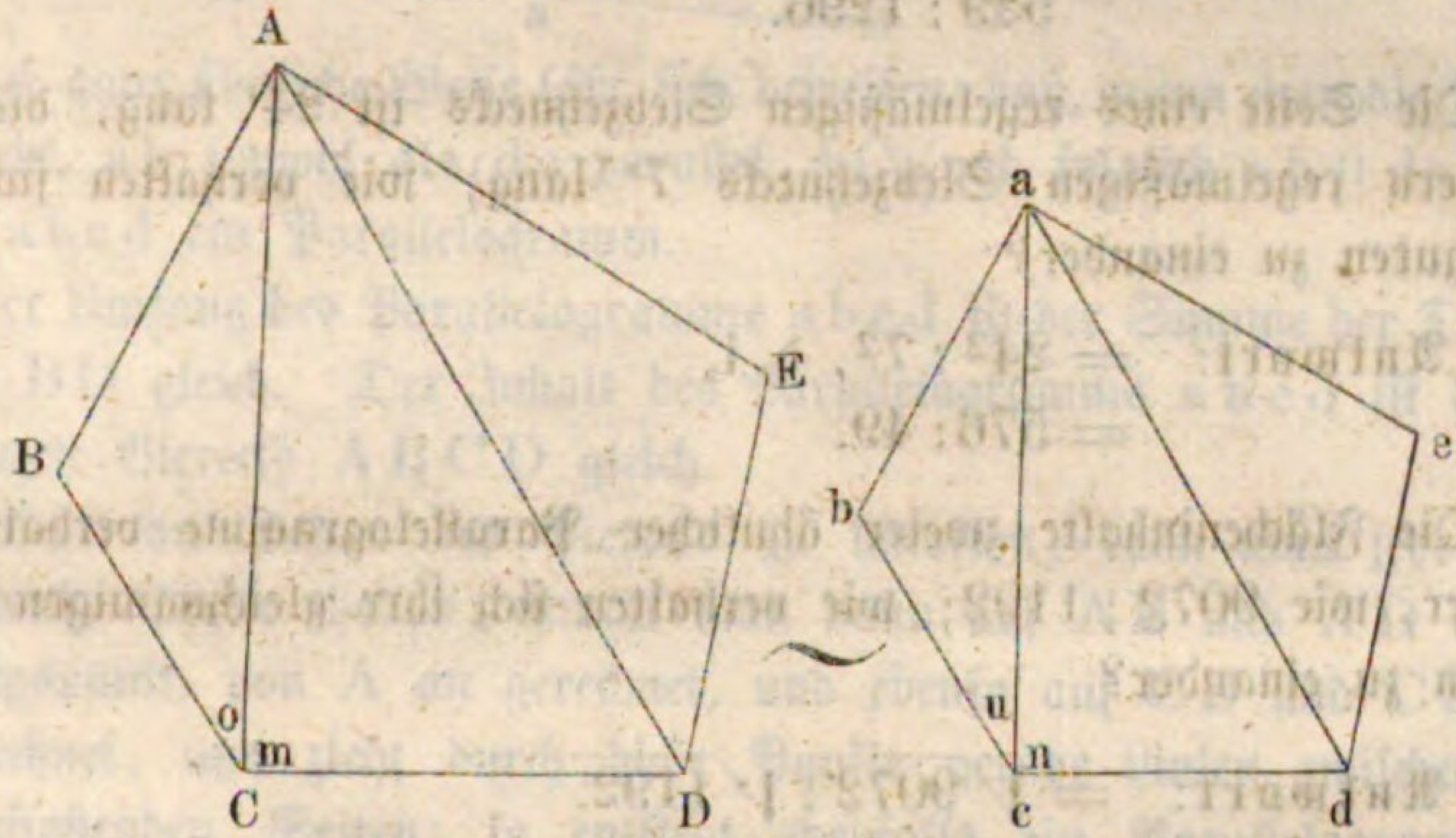
Es sei $ABCDE \backsim abcde$; man theile beide auf eine ähnliche Art in Dreiecke, so ist

$\triangle ABC \backsim abc$; folglich ist $\measuredangle o = u$. Da nun $\measuredangle C = c$ ist, so ist auch $C - o = c - u$, das ist $\measuredangle m = n$.

Ferner verhält sich

$BC : AC = bc : ac$ und
$BC : CD = bc : cd$, folglich

$AC : CD = ac : cd$; mithin ist
$\triangle ACD \backsim acd$.



Diese Art zu schließen, kann man auf jedes Paar der folgenden Dreiecke in beiden Figuren anwenden und dadurch zeigen, daß sie einander ähnlich sind. Es verhält sich aber

$\triangle ABC : abc = AC^2 : ac^2$ und
$\triangle ACD : acd = AC^2 : ac^2$, folglich

$\triangle ABC : abc = ACD : acd$.

Ganz ebenso läßt sich erweisen, daß sich verhält $ACD : acd = ADE : ade$; folglich haben die ähnlichen Dreiecke einerlei Verhältniß gegen einander.

Nun verhält sich

$\triangle ABC : abc = AB^2 : ab^2$, also auch
$\triangle ACD : acd = AB^2 : ab^2$, und
$\triangle ADE : ade = AB^2 : ab^2$; folglich verhält sich

$$ABC + ACD + ADE : abc + acd + ade = 3AB^2 : 3ab^2 = AB^2 : ab^2,$$

und da AB sich zu ab wie jede zwei andere gleichnamige Seiten zu einander verhalten, mithin auch $AB^2 : ab^2$, wie die Quadrate zweier andern

gleichnamigen Seiten; so verhalten sich überhaupt die beiden Vielecke wie die Quadrate gleichnamiger Seiten in ihnen.

Gleichnamige Seiten ähnlicher Vielecke verhalten sich umgekehrt, wie die Quadratwurzeln aus den Zahlen, welche das Verhältniß der Vielecke selbst ausdrücken.

Aufgaben:

1) Die Grundlinien zweier ähnlicher Trapeze sind 23 und 36′ lang; wie verhalten sich die Flächeninhalte dieser Figuren zu einander?

Antwort: $= 23^2 : 36^2$ d. i.
$529 : 1296$.

2) Die Seite eines regelmäßigen Siebzehnecks ist 24′ lang, die Seite eines andern regelmäßigen Siebzehnecks 7′ lang; wie verhalten sich diese beiden Figuren zu einander?

Antwort: $= 24^2 : 7^2$, d. i.
$= 576 : 49$.

3) Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Parallelogramme verhalten sich zu einander, wie 9072 : 1192; wie verhalten sich ihre gleichnamigen Seiten und Höhen zu einander?

Antwort: $= \sqrt{9072} : \sqrt{1192}$
$= 95,24 : 34,52$.

4) Von zwei ähnlichen Vielecken hat das eine einen Flächeninhalt von 9543☐fuß, das andere einen Flächeninhalt von 827☐fuß; wie verhalten sich die gleichnamigen Seiten und die gleichnamigen Diagonalen dieser Figuren zu einander?

Antwort: $= \sqrt{9543} : \sqrt{827}$.
$= 97,68 : 28,75$.

§. 8.

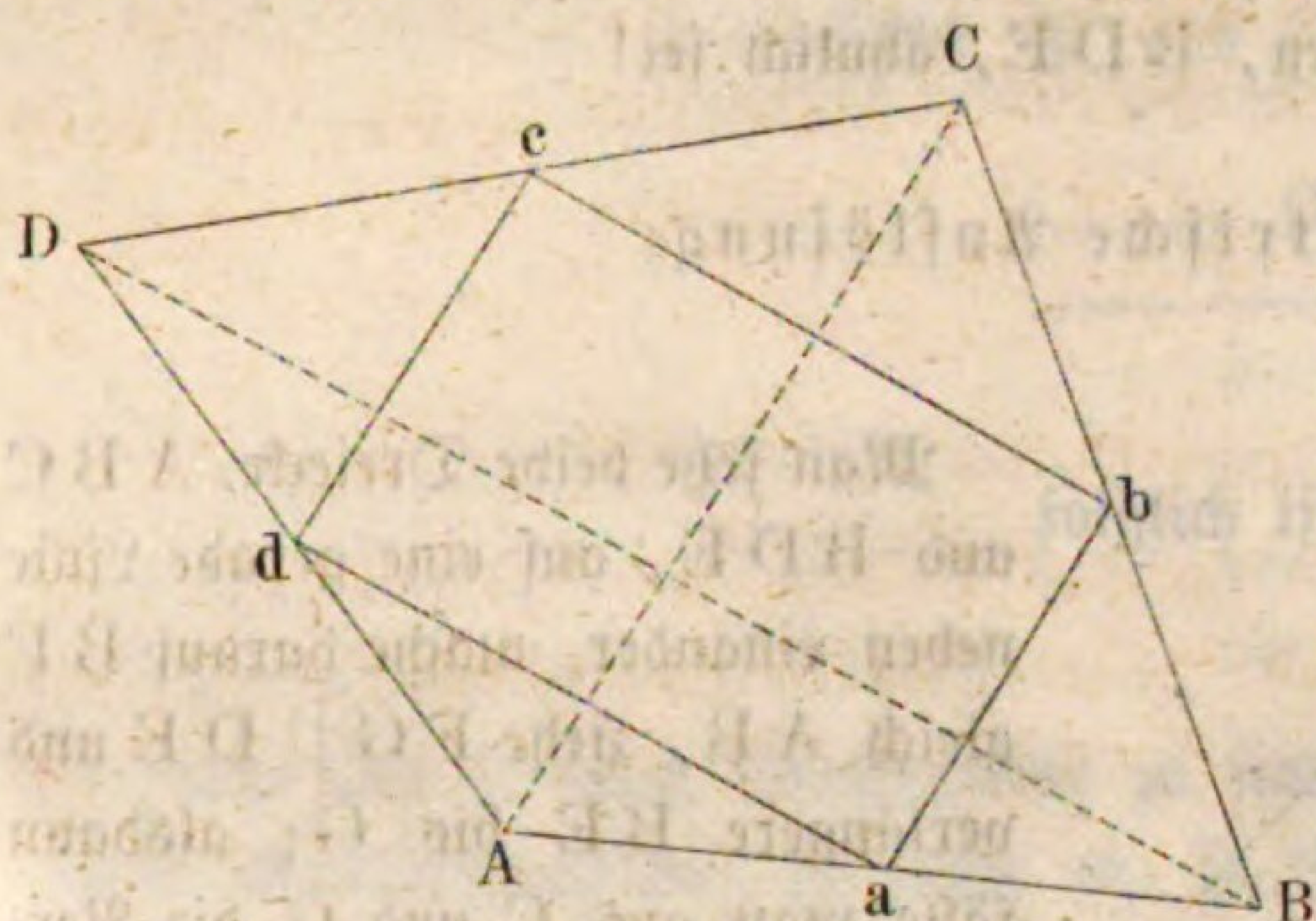
Schlußaufgaben.

I. In ein beliebiges Viereck A B C D ein Parallelogramm zu zeichnen.

Auflösung:

Man halbire jede Seite des gegebenen Vierecks und ziehe durch die Theilungspunkte je zweier zusammenstoßender Seiten eine gerade Linie, so entsteht ein Parallelogramm, a b c d.

Beweis:



Man ziehe die Diagonale BD; alsdann verhält sich in dem Dreieck ABD, weil AB und AD halbirt sind:

AB : AD = Aa : Ad; folglich ist ad || BD. Ebenso verhält sich in dem △BCD BC : CD = Cb : Cc; folglich ist bc || BD und daher ad || bc.

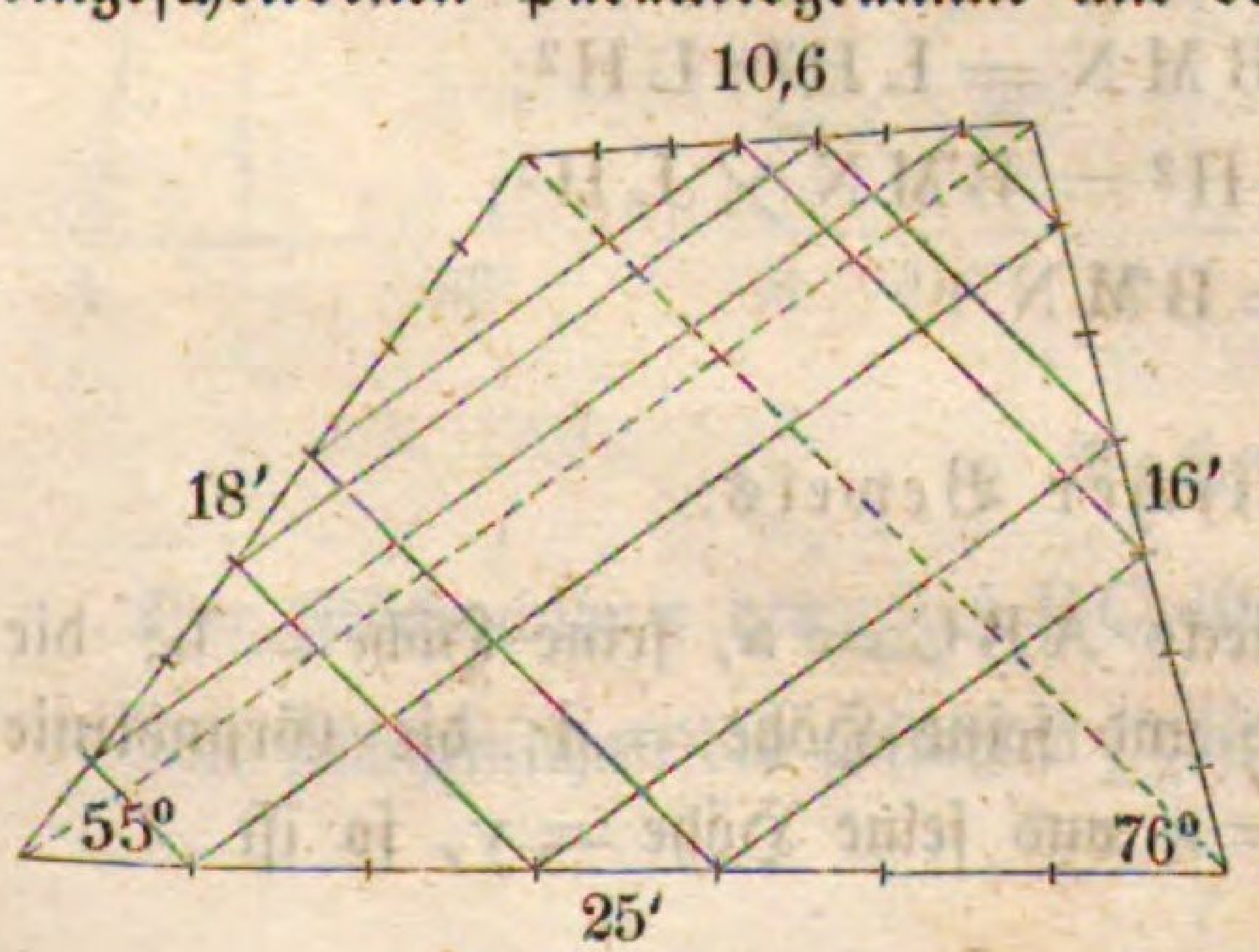
Auf ganz ähnliche Weise läßt sich beweisen, daß, wenn man die Diagonale AC zieht, ab sowohl als dc parallel AC, und folglich ab || dc ist; mithin ist abcd ein Parallelogramm.

Der Umfang des Parallelogramms abcd ist der Summe der Diagonalen AC + BD gleich. Der Inhalt des Parallelogramms abcd ist der Hälfte des ganzen Vierecks ABCD gleich.

Anstatt die Seiten des Vierecks zu halbiren, kann man jede derselben in n gleiche Theile theilen; nimmt man dann auf AB und AD den mten Theilungspunkt, von A an gerechnet, und ebenso auf CB und CD, von C an gerechnet, und zieht durch diese Punkte gerade Linien zwischen den zusammenstoßenden Seiten; so entsteht ebenfalls ein Parallelogramm. Auf diese Weise können unzählige Parallelogramme in ein Viereck beschrieben werden.

Aufgabe:

Construire ein Trapez von 25′ Grundlinie, an welcher ein Winkel von 55⁰ mit einem Schenkel von 18′ und ein Winkel von 76⁰ mit einem Schenkel von 16′ liegen; theile sodann jede Seite des Trapezes in 7 gleiche Theile, verbinde die zweiten, vierten und fünften Theilungspunkte durch gerade Linien mit einander und vergleiche die Umfänge und die Diagonalen der drei hineingeschriebenen Parallelogramme mit den eben angeführten beiden Lehrsätzen!



Summe der Diagonalen $= (26 + 20,5) = 46,5$

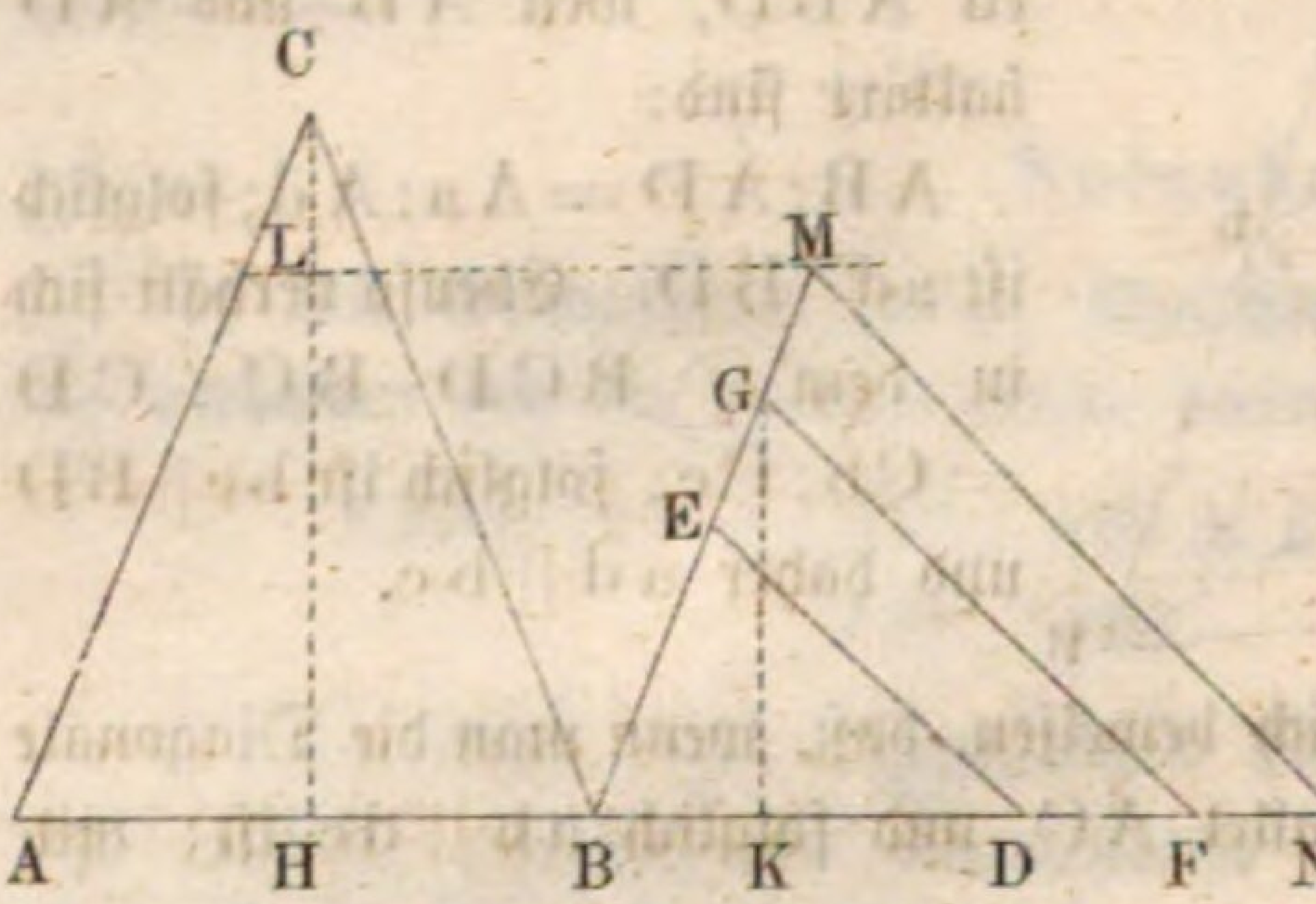
Der Umfang des ersten Parallelogramms ist $= (21 + 2,3)\,2 = 46,6$

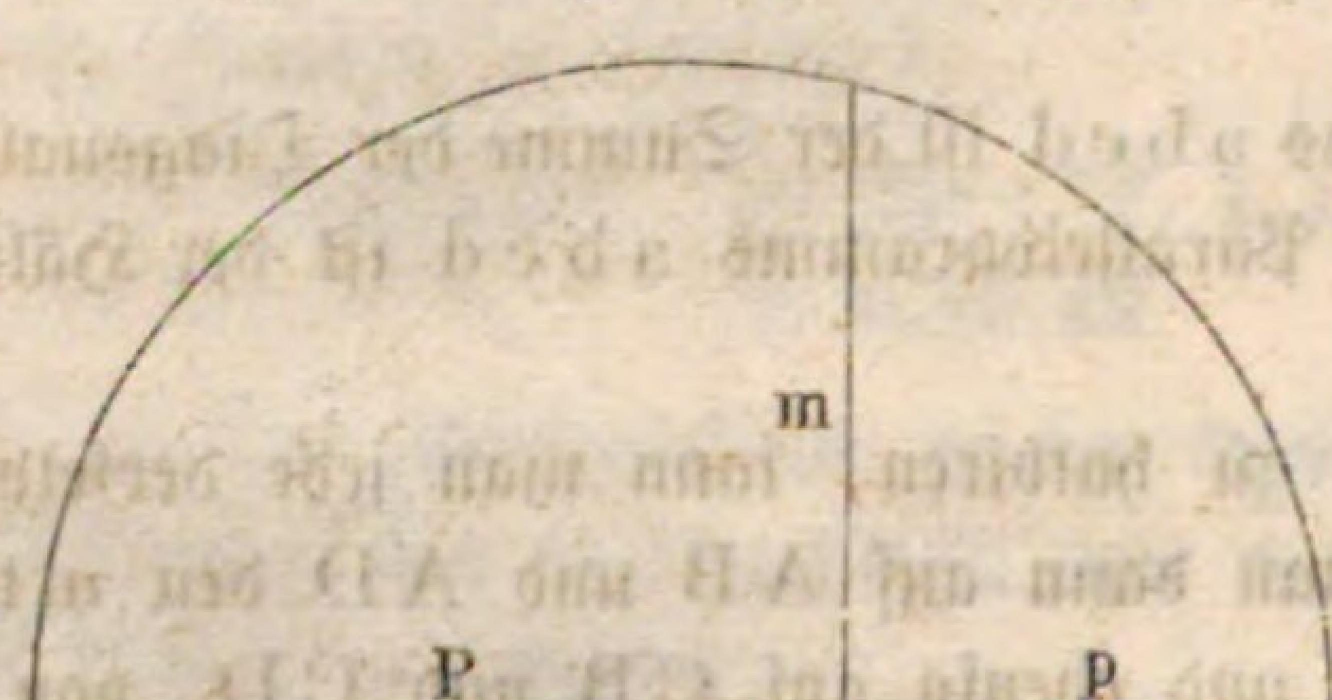
Der Umfang des zweiten $= (14,6 + 8,6)\,2 = 46,4$

Der Umfang des dritten $= (12 + 11,2)\,2 = 46,4$.

II. Ein Dreieck, BMN, zu zeichnen, welches einem gegebenen, ABC, gleich und einem andern gegebenen, BDE, ähnlich sei!

a. Geometrische Auflösung:





Man setze beide Dreiecke, ABC und BDE, auf eine gerade Linie neben einander, mache darauf BF gleich AB, ziehe FG || DE und verlängere BE bis G; alsdann fälle man aus C und G die Perpendikel CH und GK auf AF, und suche zwischen beiden Perpendikeln die mittlere Proportionallinie. Dieser mache man LH gleich, durch L ziehe man LM || AF und verlängere BG bis M; endlich ziehe man MN || ED, so ist BMN das verlangte Dreieck.

Beweis:

1) Da MN || ED ist, so ist $\triangle$ BMN $\sim$ BDE

2) Es verhält sich $\triangle$ ABC : BFG = CH : GK; ferner

$\triangle$ BFG : BMN = $GK^2 : LH^2$, folglich

verhält sich: $\triangle$ ABC : BMN = CH $\times$ GK : LH^2.

Nun verhält sich nach der Construction

CH : LH = LH : GK, folglich ist

CH $\times$ GK = LH^2.

Ferner verhält sich $\triangle$ ABC : BMN = $LH^2 : LH^2$;

es ist demnach ABC $\times$ LH^2 = BMN $\times$ LH^2;

also ist auch $\triangle$ ABC = BMN.

b. Arithmetischer Beweis:

Es sei die Grundlinie des Dreiecks ABC = a, seine Höhe = b; die Grundlinie des Dreiecks BDE = c und seine Höhe = d; die Grundlinie des gesuchten Dreiecks hingegen sei = x und seine Höhe = y, so ist

1. $ab = xy$;

2. $c : d = x : y$; folglich ist aus (1) $y = \frac{ab}{x}$

" (2) $y = \frac{dx}{c}$

$$\frac{ab}{x} = \frac{dx}{c}$$

folglich ist $abc = dx^2$ und daher

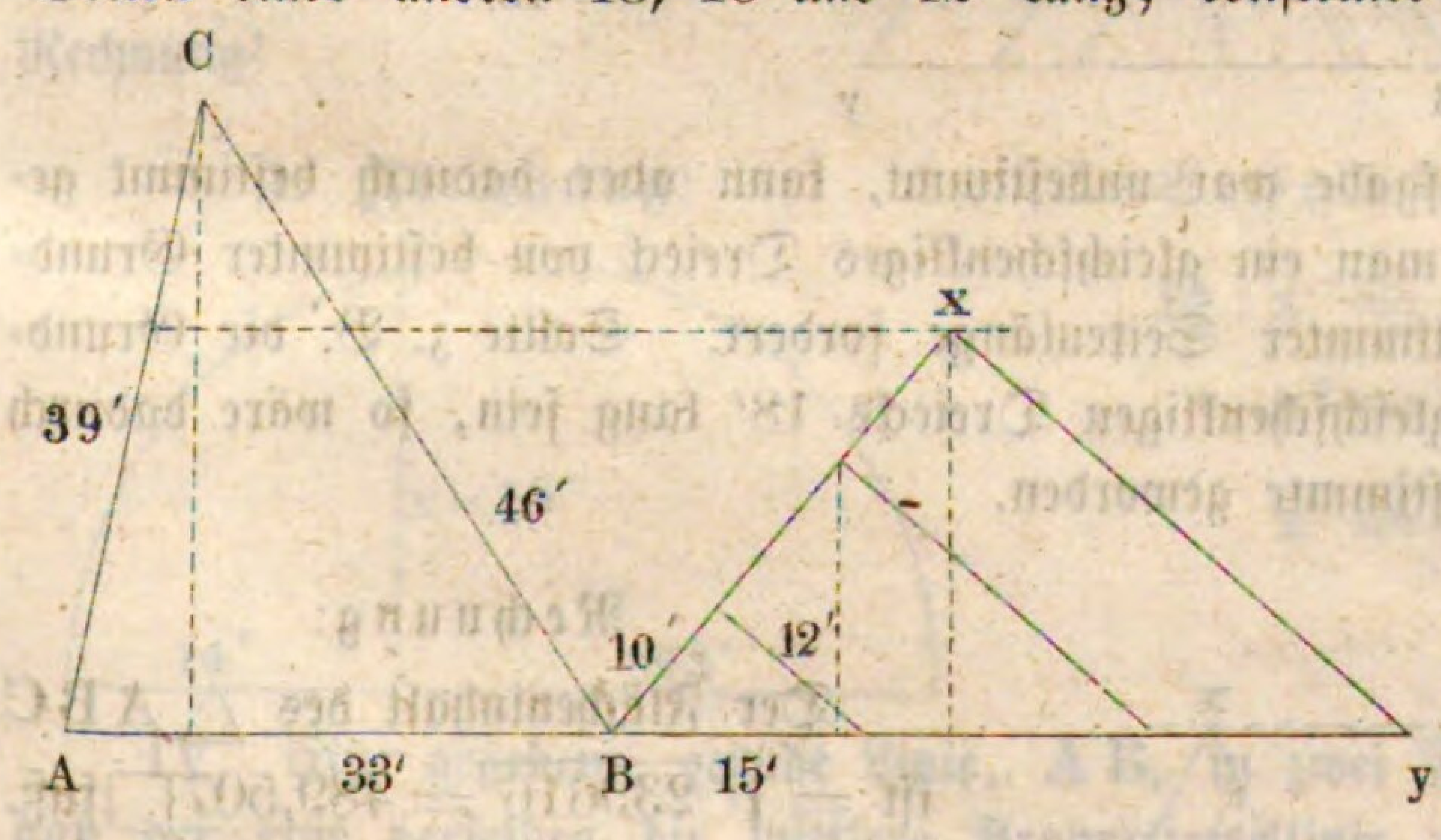
$$x^2 = \frac{abc}{d}.$$

Um hier x durch Construction zu finden, suche man zu d, a und b die vierte Proportionallinie, sie heiße m, so ist $x^2 = mc$; folglich verhält sich $m : x = x : c$, d. h., x ist alsdann die mittlere Proportionallinie zwischen m und c. Ganz ebenso findet sich $y^2 = \frac{ab}{c} . d$, woraus man y durch eine ähnliche Construction erhält. Durch x und y aber ist nur die Größe, nicht die Gestalt des Dreiecks bestimmt; diese würde sich finden, wenn man an x die Winkel an der Grundlinie des Dreiecks B D E trüge, wobei die Höhe = y werden müßte.

Hiernach ist es auch leicht, ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichseitiges oder gleichschenkeliges zu verwandeln.

Uebungsaufgaben:

1) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 33,39 und 46′ lang, die drei Seiten eines andern 15, 10 und 12′ lang; construire ein drittes Dreieck, welches dem erstern gleich, und dem letztern ähnlich ist, und beweise die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!



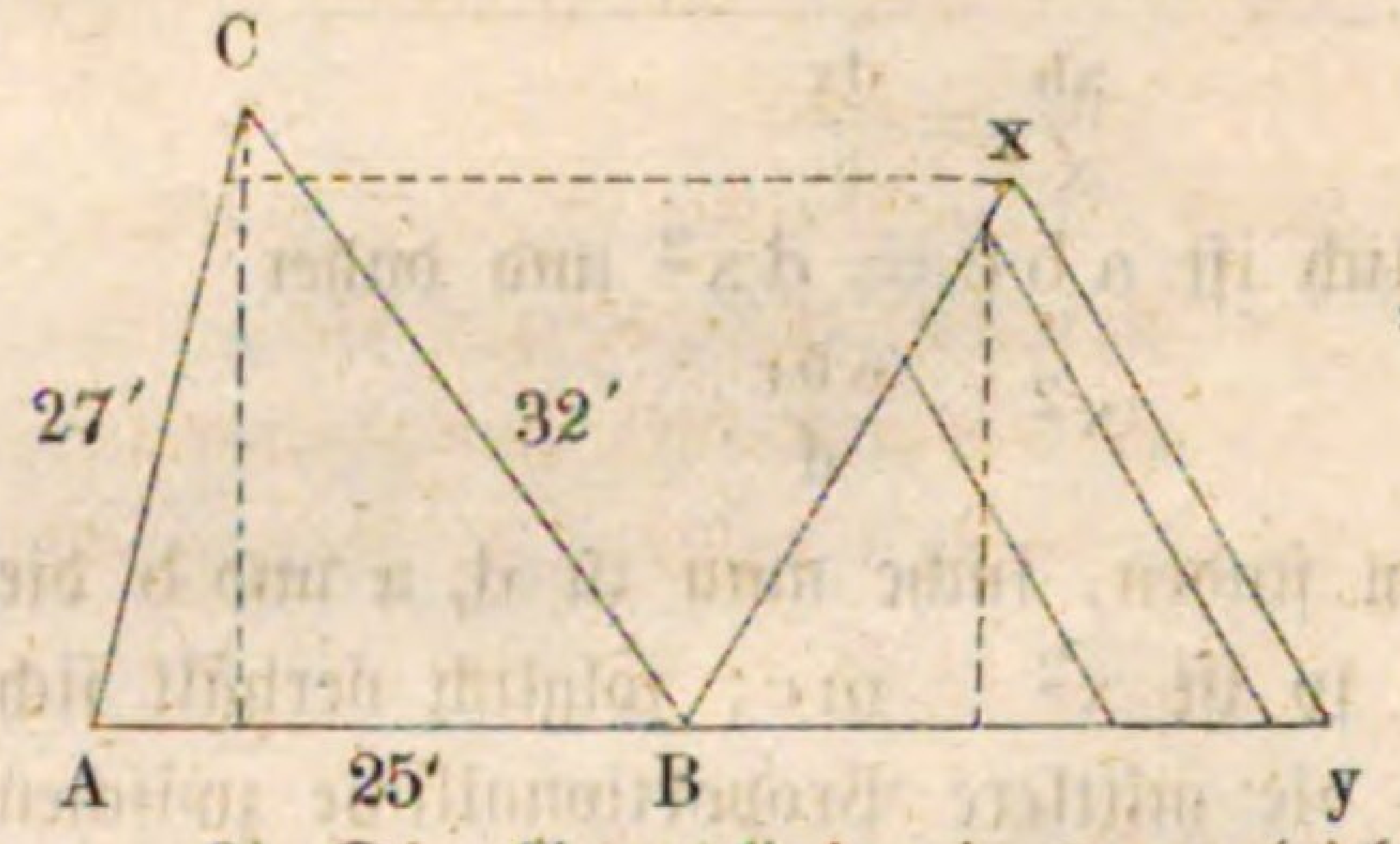
Rechnung:

Der Flächeninhalt des $\triangle$ A B C ist $= \sqrt{398840} = 631{,}51$ □ fuß.

Der Flächeninhalt des gesuchten $\triangle$ ist $= \frac{26 \times 48{,}6}{2} = 631{,}8$ □ fuß.

2) Die drei Seiten eines Dreiecks sind 25,27 und 32′ lang; construire ein gleichseitiges Dreieck, welches dem gegebenen an Flächeninhalt gleich ist, und prüfe die Richtigkeit der Zeichnung durch Rechnung!

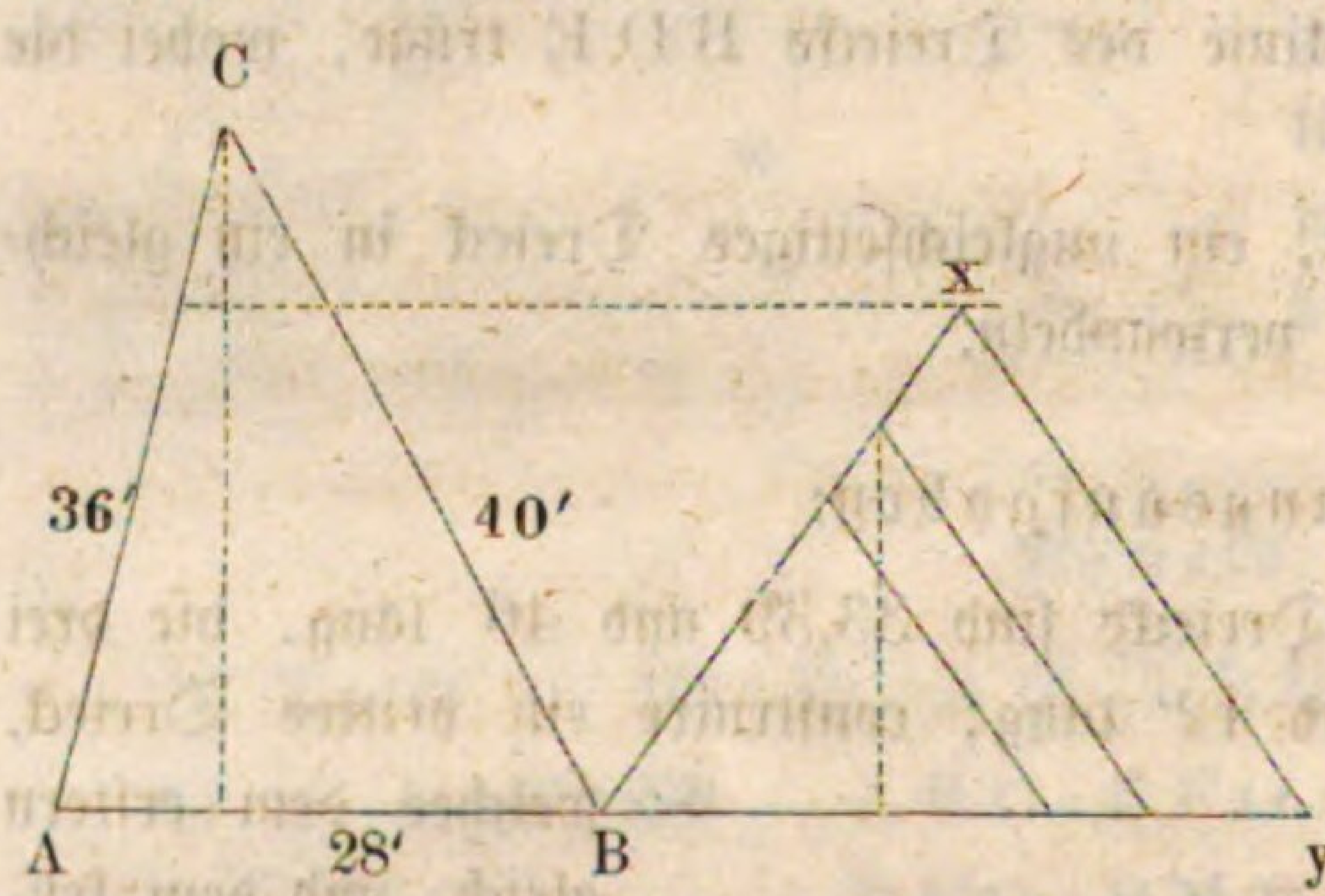
Rechnung:



Der Flächeninhalt des △ABC ist $= \sqrt{107100} = 327{,}566$ □fuß.

Der Flächeninhalt des △Bxy ist $= 27{,}7 \times 11{,}8 = 326{,}86$ □fuß.

3) Die Grundlinie eines ungleichseitigen Dreiecks mißt 28′, die beiden andern Seiten sind 36′ und 40′ lang; construire ein gleichschenkliges Dreieck, welches dem gegebenen Dreieck an Flächeninhalt gleich ist, und beweise die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!

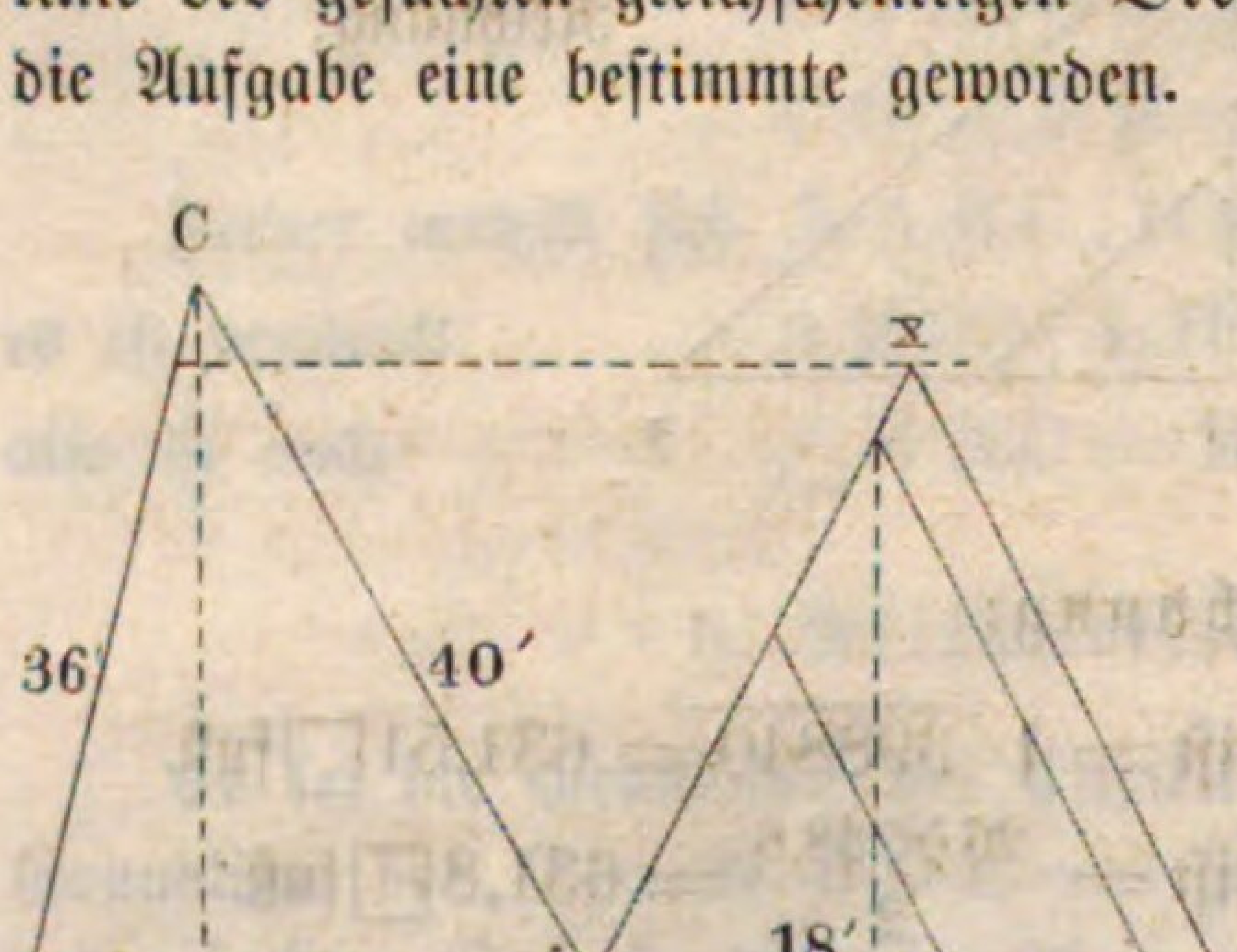


Rechnung:

Der Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks ABC ist $= \sqrt{239616} = 489{,}507$ □fuß.

Die Höhe des Dreiecks Bxy ist $= 27{,}2'$, also ist die ungleiche Seite $= \frac{489{,}507}{13{,}6} = 36'$.

Diese letzte Aufgabe war unbestimmt, kann aber dadurch bestimmt gemacht werden, daß man ein gleichschenkliges Dreieck von bestimmter Grundlinie, oder von bestimmter Seitenlänge fordert. Sollte z. B. die Grundlinie des gesuchten gleichschenkligen Dreiecks 18′ lang sein, so wäre dadurch die Aufgabe eine bestimmte geworden.



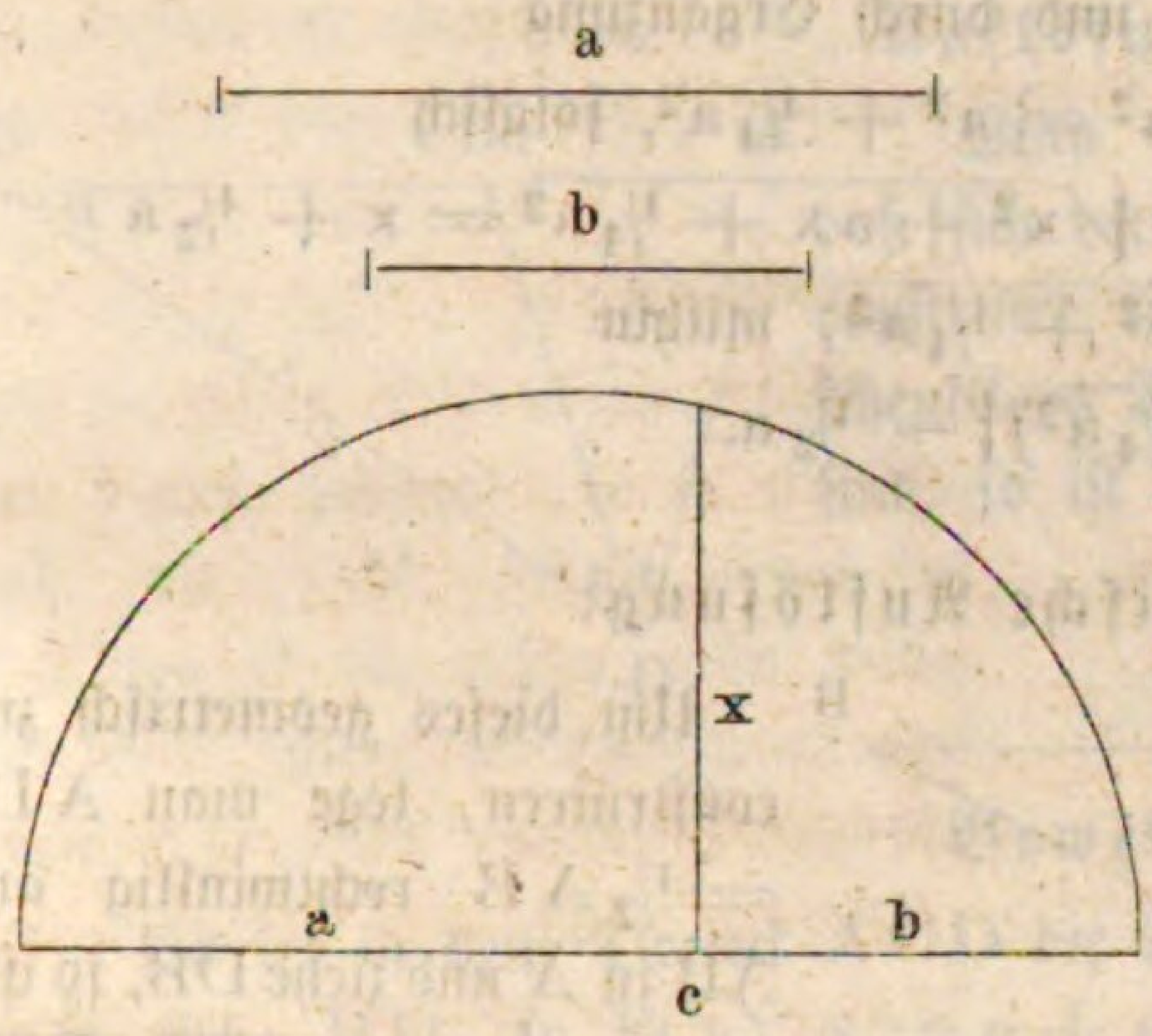
Rechnung:

Der Flächeninhalt des △ABC ist $= \sqrt{239616} = 489{,}507$ □fuß.

Der Flächeninhalt des gesuchten Dreiecks Bxy ist $= \sqrt{239616{,}4375} = 489{,}507$ □fuß.

III. Suche zu den beiden Linien a und b die mittlere Proportionallinie!

Auflösung:



Man trage die beiden gegebenen Linien a und b an einander, schlage über die Summe derselben einen Halbkreis und errichte in dem Punkte c der Zusammenlegung ein Perpendikel bis an die Peripherie des Halbkreises, so ist diese Senkrechte x, die gesuchte mittlere Proportionallinie.

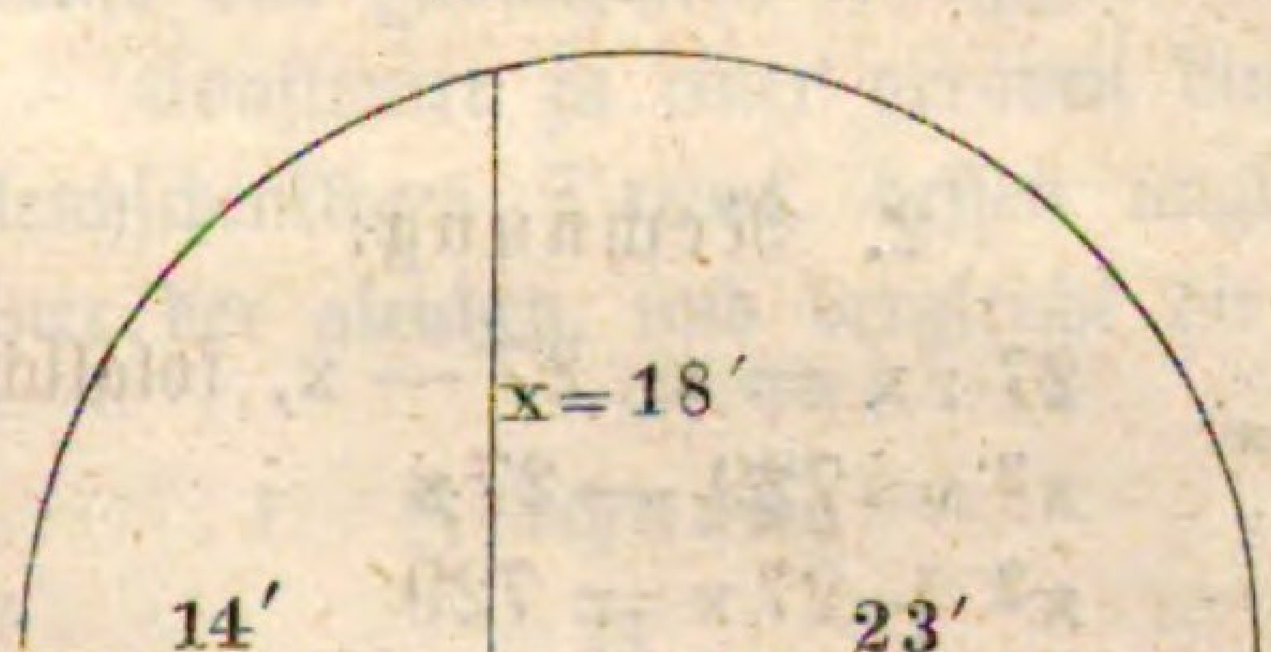
Beweis:

Die Richtigkeit der Construction folgt unmittelbar aus dem zweiten Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes, wo nachgewiesen wurde, daß das aus dem rechten Winkel auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden Segmenten der Hypotenuse sei.

Aufgabe:

Suche durch Construction zu zwei Linien von 14′ und 23′ lang die mittlere Proportionallinie und beweise die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!

1. Zeichnung:



2. Beweis durch Rechnung:

$$14 : x = x : 23$$
$$x^2 = 14 \times 23 = 322$$
$$x = \sqrt{322} = 17{,}94'.$$

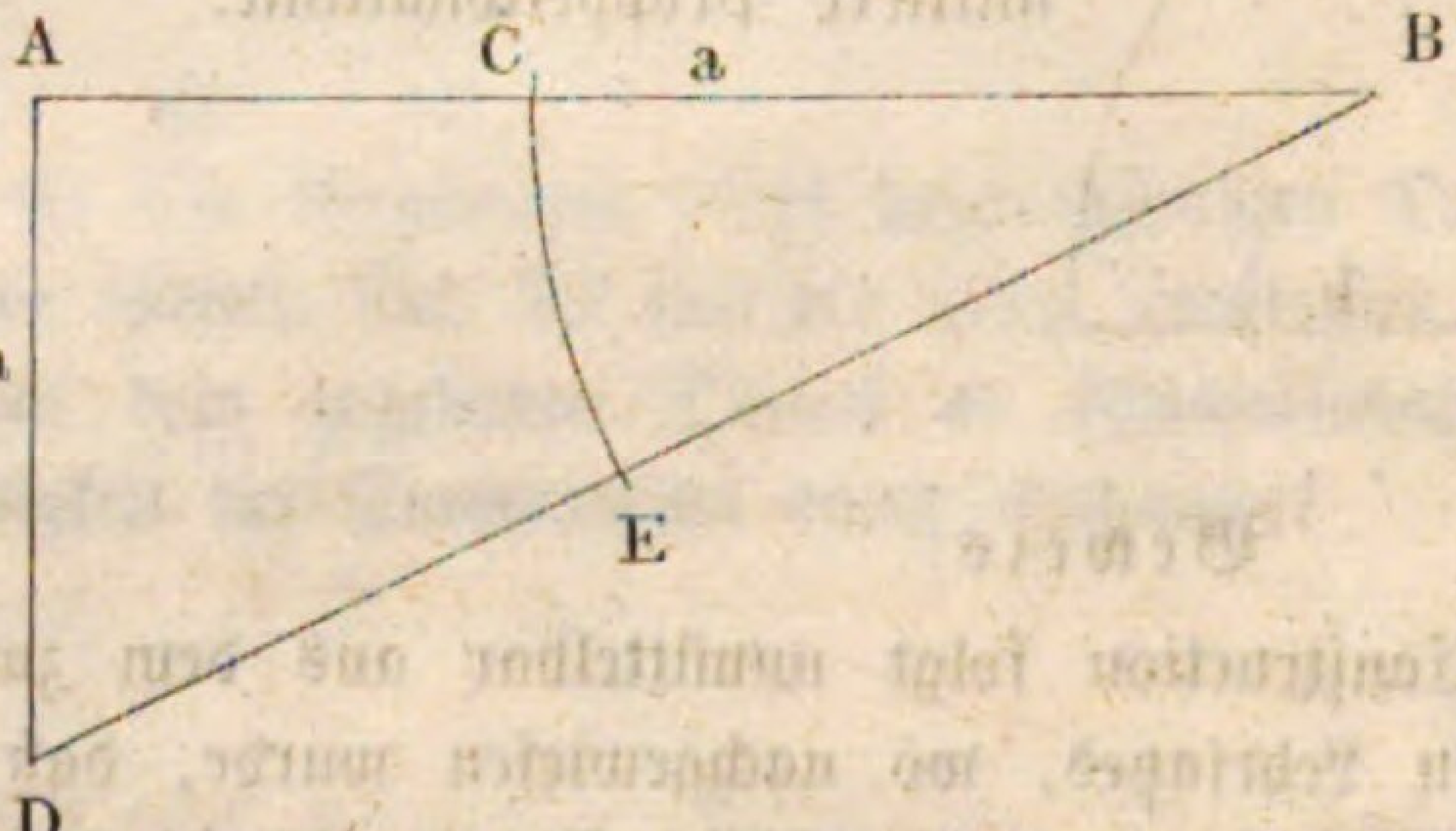
IV. Eine gegebene, gerade Linie, AB, in zwei Theile zu theilen, so daß der eine derselben die mittlere Proportionallinie zwischen dem andern und der ganzen Linie sei.

a. Arithmetische Auflösung:

Die gegebene Linie sei = a und der eine Theil = x, also der andere = a — x; so verhält sich

$$a : x = x : a - x; \text{ folglich ist}$$
$$x^2 = a^2 - ax, \text{ ferner}$$
$$x^2 + ax = a^2, \text{ und durch Ergänzung}$$
$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = a^2 + \tfrac{1}{4}a^2, \text{ folglich}$$
$$\sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2} = \sqrt{x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2} = x + \tfrac{1}{2}a$$
und demnach $x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2}$, mithin
$$x = [\sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}] - \tfrac{1}{2}a.$$

b. Geometrische Auflösung:

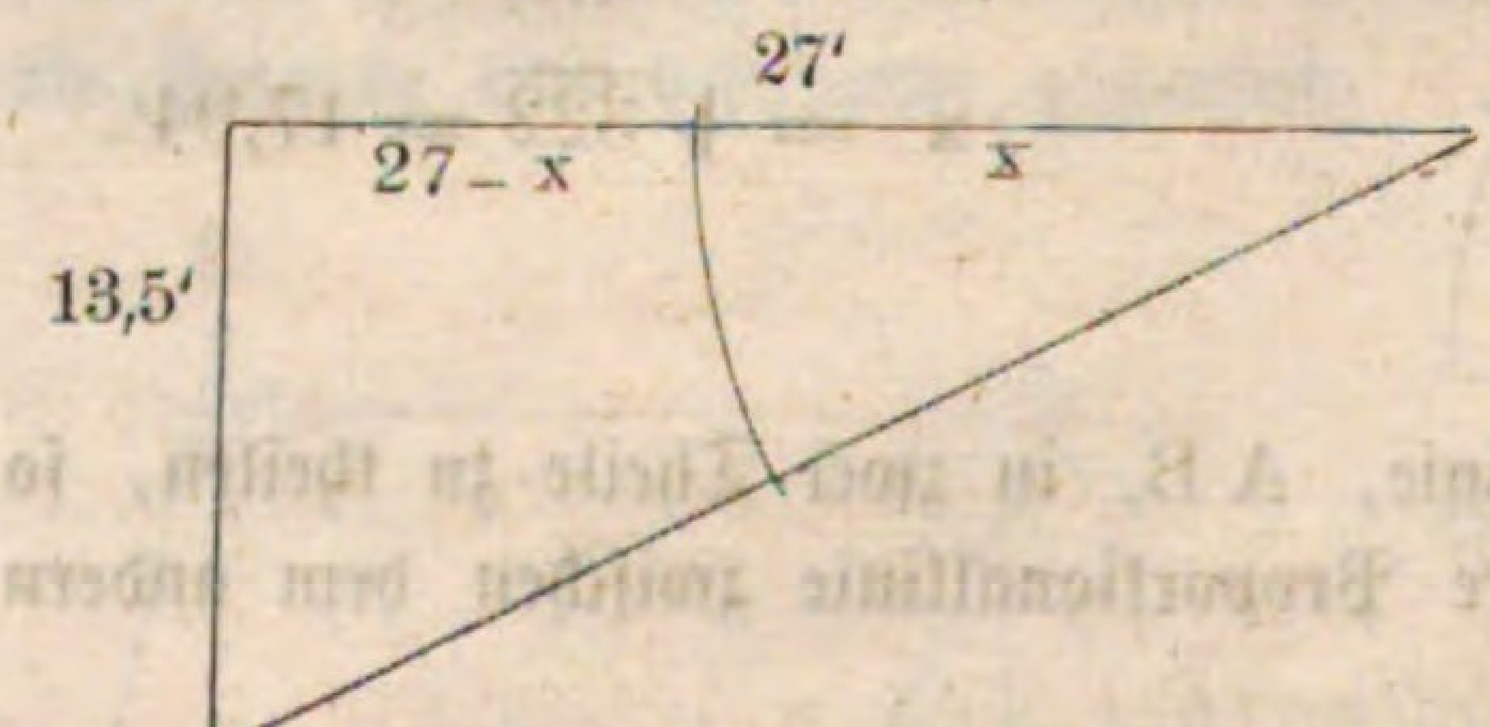


Um dieses geometrisch zu construiren, lege man AD $= \tfrac{1}{2}$ AB rechtwinklig an AB in A und ziehe DB, so ist diese Linie $= \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2}$. Man schneide also DE $= \tfrac{1}{2}a$ von ihr ab, so ist BE $= x$. Schlägt man daher aus B mit einer Eröffnung des Zirkels = BE einen Bogen nach AB in C, so ist AB dadurch auf die verlangte Art getheilt, und es verhält sich AC : CB = CB : AB.

Aufgabe:

Theile eine gegebene, gerade Linie von 27′ lang in zwei Theile, so daß der eine derselben die mittlere Proportionallinie zwischen dem andern und der ganzen Linie wird, und beweise die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!

1. Zeichnung:



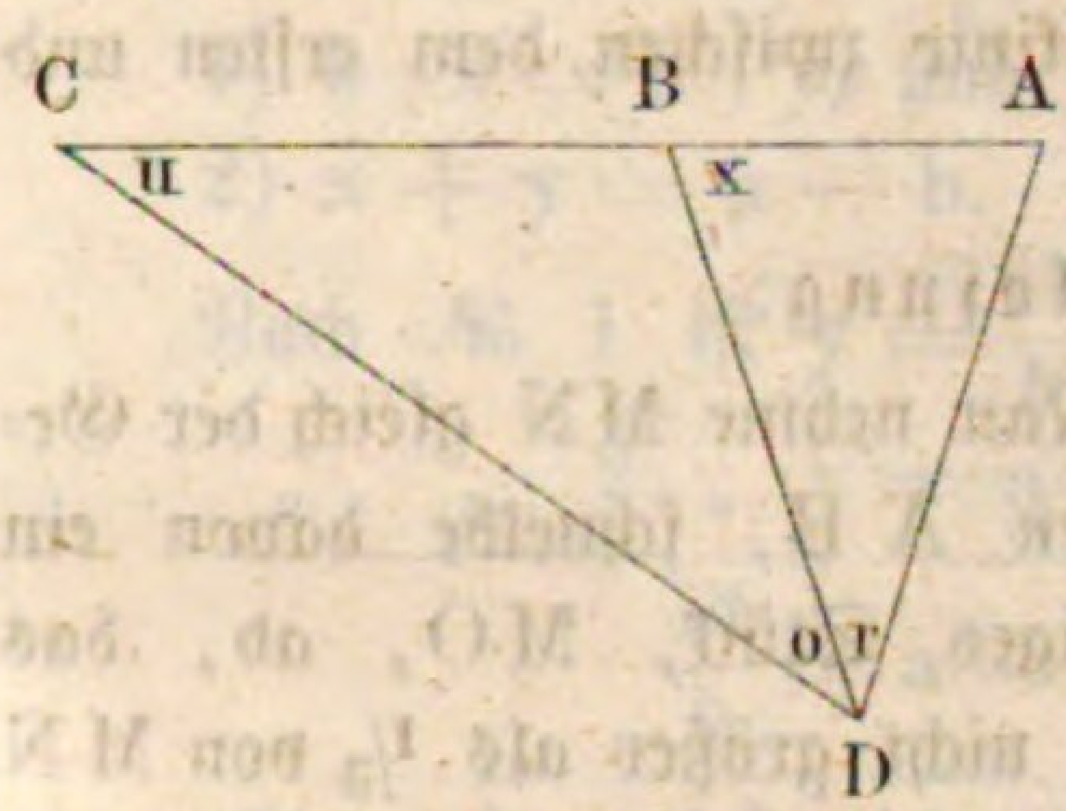
2. Rechnung:

$$27 : x = x : 27 - x, \text{ folglich}$$
$$x^2 = 729 - 27x$$
$$x^2 + 27x = 729$$
$$\sqrt{729 + 13{,}5^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + 27x + 13{,}5^2}$$
$$= x + 13{,}5$$

$$x + 13{,}5 = \sqrt{729 + 13{,}5^2}$$
$$x + 13{,}5 = \sqrt{911{,}25} = 30{,}186', \text{ also ist}$$
$$x = 30{,}186' - 13{,}5 = 16{,}686'.$$

V. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, dessen Winkel an der Spitze halb so groß als jeder an der Grundlinie sei.

Auflösung:



Man theile eine beliebige Linie A C so, daß sich verhält $AB : BC = BC : AC$, und construire über einer Linie $= BC$ ein gleichschenkliges Dreieck, dessen gleiche Seiten $= AC$ sind, so ist solches das verlangte Dreieck.

Beweis:

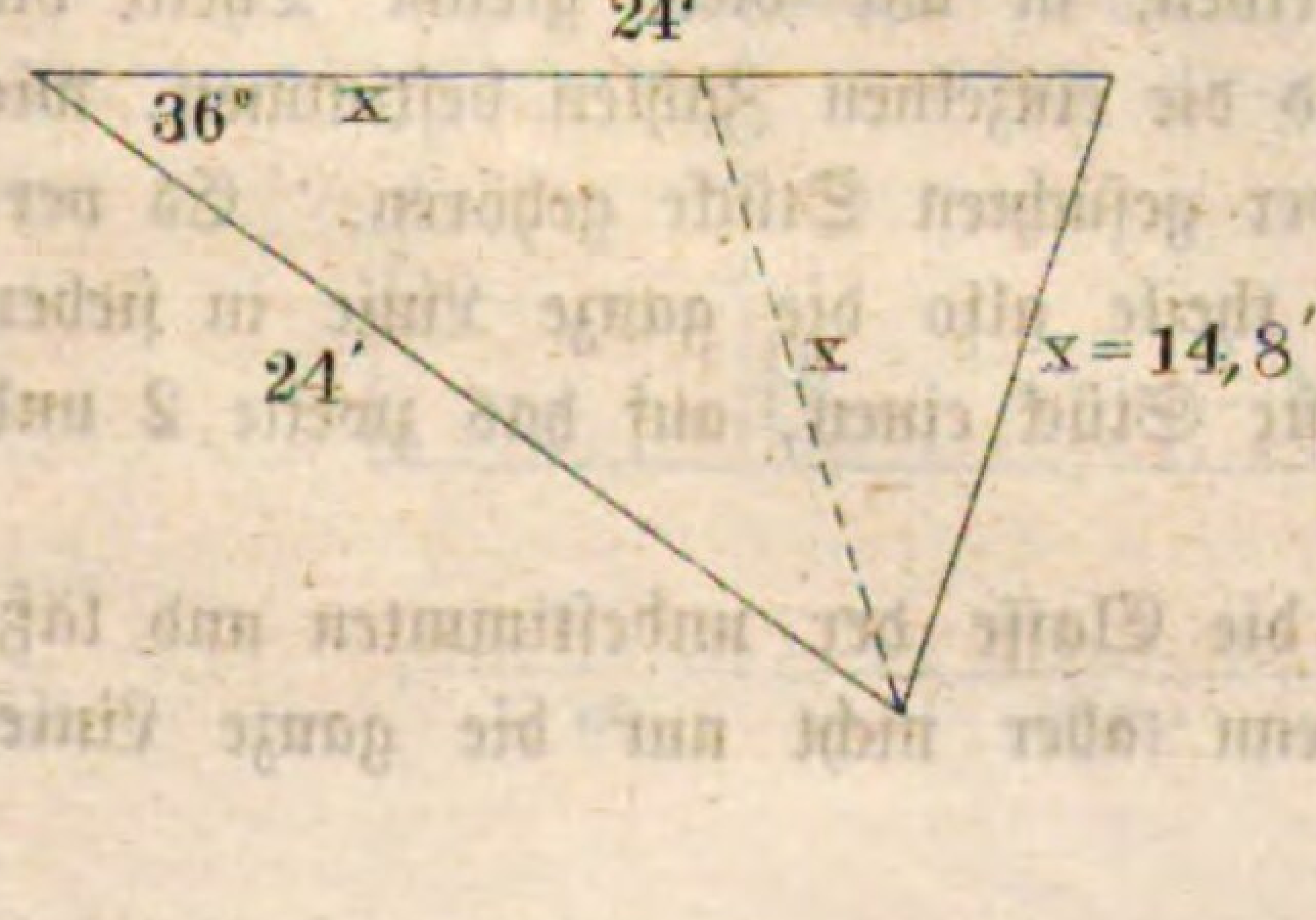
Es sei in dem Dreieck ACD die Seite $DC = AC$ und $AD = BC$; man ziehe BD, so ist $\sphericalangle x = o + u$. Ferner, wenn man einen Kreis um DCB beschriebe, so würde AD eine Tangente an demselben in D sein; folglich ist $\sphericalangle r = u$, also $\sphericalangle x = o + r = A$, folglich $BD = AD = BC$, also ist auch $\sphericalangle o = u$, mithin $\sphericalangle x = 2u$, und daher auch $A = 2u$; also ist ACD das verlangte Dreieck. Auch in dem Dreieck ABD ist A und $x = 2r$. Der Winkel u in der Spitze des Dreiecks ADC ist $\frac{2}{5} R = 36^0$.

Da der Centriwinkel eines regelmäßigen Zehnecks $= 36^0$ groß ist, so ist AD die Seite des Zehnecks, wenn AC der Halbmesser des Kreises ist, und es ergibt sich hieraus, wie ein solches Zehneck in einem jeden Kreise verzeichnet werden könne.

Aus dem regelmäßigen Zehneck kann leicht das regelmäßige Fünfeck, ebenso das Zwanzigeck, Vierzigeck u. s. w. construirt werden.

Construire zu einer geraden Linie von 24′ Länge als gleiche Seite ein gleichschenkliges Dreieck, dessen ungleicher Winkel halb so groß ist, als je einer der gleichen, und vergleiche die Zeichnung mit der Rechnung!

1. Zeichnung:



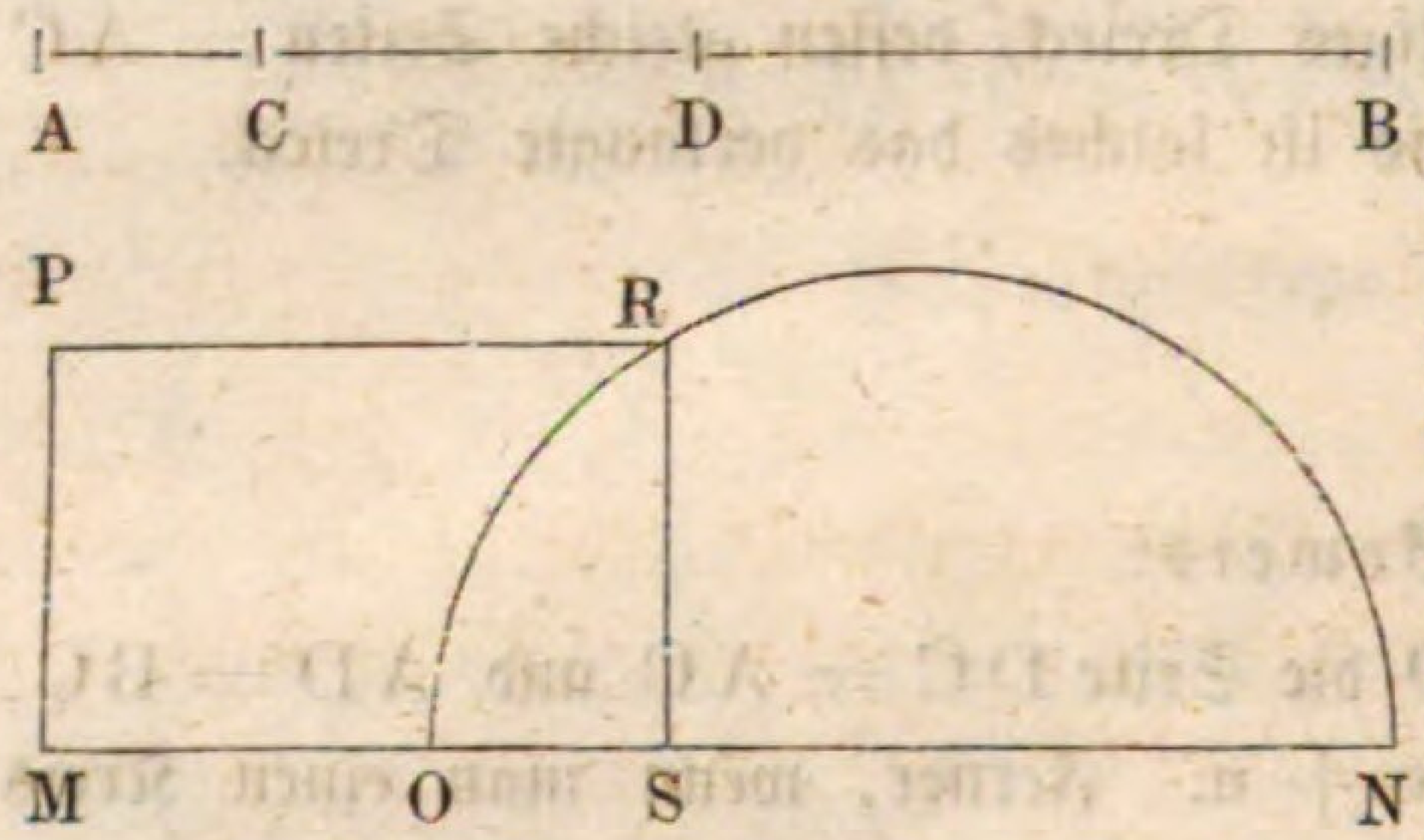
2. Rechnung:

$$24 : x = x : 24 - x$$
$$x^2 = 576 - 24x$$
$$x^2 + 24x = 576$$
$$x^2 + 24x + 144 = 720$$
$$\sqrt{x^2 + 24x + 144} = \sqrt{720}$$
$$x + 12 = 26{,}83$$
$$x = 26{,}83 - 12 = 14{,}83'.$$

Da nach der Messung $x = 14{,}8'$ ist, und dasselbe nach der Rechnung $14{,}83'$ sein muß, so beträgt der Fehler der Messung $= 0{,}03'$.

VI. Eine gegebene, gerade Linie, AB, in drei Theile zu theilen, so daß der zweite Theil die mittlere Proportionallinie zwischen dem ersten und dritten ist.

a. Geometrische Auflösung:



Man nehme MN gleich der gegebenen AB, schneide davon ein beliebiges Stück, MO, ab, das jedoch nicht größer als $\frac{1}{3}$ von MN sein darf, und beschreibe über den übrigen Theil der Linie ON einen Halbkreis. Alsdann errichte man MP = MO senkrecht auf MN, ziehe PR $\parallel$ MN, und RS senkrecht auf MN; so sind OS, RS und SN die drei gesuchten Theile. Man mache also AC = OS und CD = RS, so verhält sich: AC : CD = CD : DB.

Beweis:

Da RS = MP = MO ist, so ist OS + RS + SN = MN = AB, ferner, da nach der Construction AC = OS, CD = RS ist, so ist DB = SN. Nun verhält sich nach dem zweiten Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes OS : RS = RS : SN, also verhält sich

AC : CD = CD : DB.

Wird MO = $\frac{1}{3}$ MN genommen, so fällt R in die Mitte des Halbkreises; daher auch die andern beiden Theile = $\frac{1}{3}$ MN werden. Ist aber MN $>$ $\frac{1}{3}$ MN, so trifft die Parallele PR den Halbkreis nicht; mithin ist die Auflösung alsdann unmöglich.

b. Arithmetische Auflösung:

Man nehme drei beliebige Zahlen, die eine stetige geometrische Proportion bilden, so zeigt die Summe derselben, in wie viele gleiche Theile die ganze Linie getheilt werden müsse, und die einzelnen Zahlen bestimmen, wie viele von diesen Theilen zu jedem der gesuchten Stücke gehören. Es verhält sich z. B. $1 : 2 = 2 : 4$; man theile also die ganze Linie in sieben gleiche Theile, und nehme auf das erste Stück einen, auf das zweite 2 und auf das dritte 4 solcher Theile.

Diese Aufgabe gehört wieder in die Classe der unbestimmten und läßt daher unzählige Auflösungen zu; wenn aber nicht nur die ganze Linie,

sondern auch der erste Theil als gegeben angesehen wird, so wird die Aufgabe dadurch bestimmt.

Man setze die ganze Linie $= a$, den ersten Theil $= b$, den zweiten $= x$ und den dritten $= y$, so verhält sich:

1) $b : x = x : y$, und es ist

2) $x + y = a - b$.

Nach № 1 ist $y = \frac{x^2}{b}$

" " 2 " $y = a - b - x$, folglich

$$\frac{x^2}{b} = a - b - x;\ \text{mithin}$$

$x^2 = ab - b^2 - bx$; daher

$x^2 + bx = ab - b^2$. Diese Gleichung ergänzt, gibt:

$x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 = ab - b^2 + \frac{1}{4}b^2 = ab - \frac{3}{4}b^2$; folglich

$\sqrt{x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2} = \sqrt{ab - \frac{3}{4}b^2}$

$x + \frac{1}{2}b = \sqrt{(ab - \frac{3}{4}b^2)} = \sqrt{(a - \frac{3}{4}b)b}$

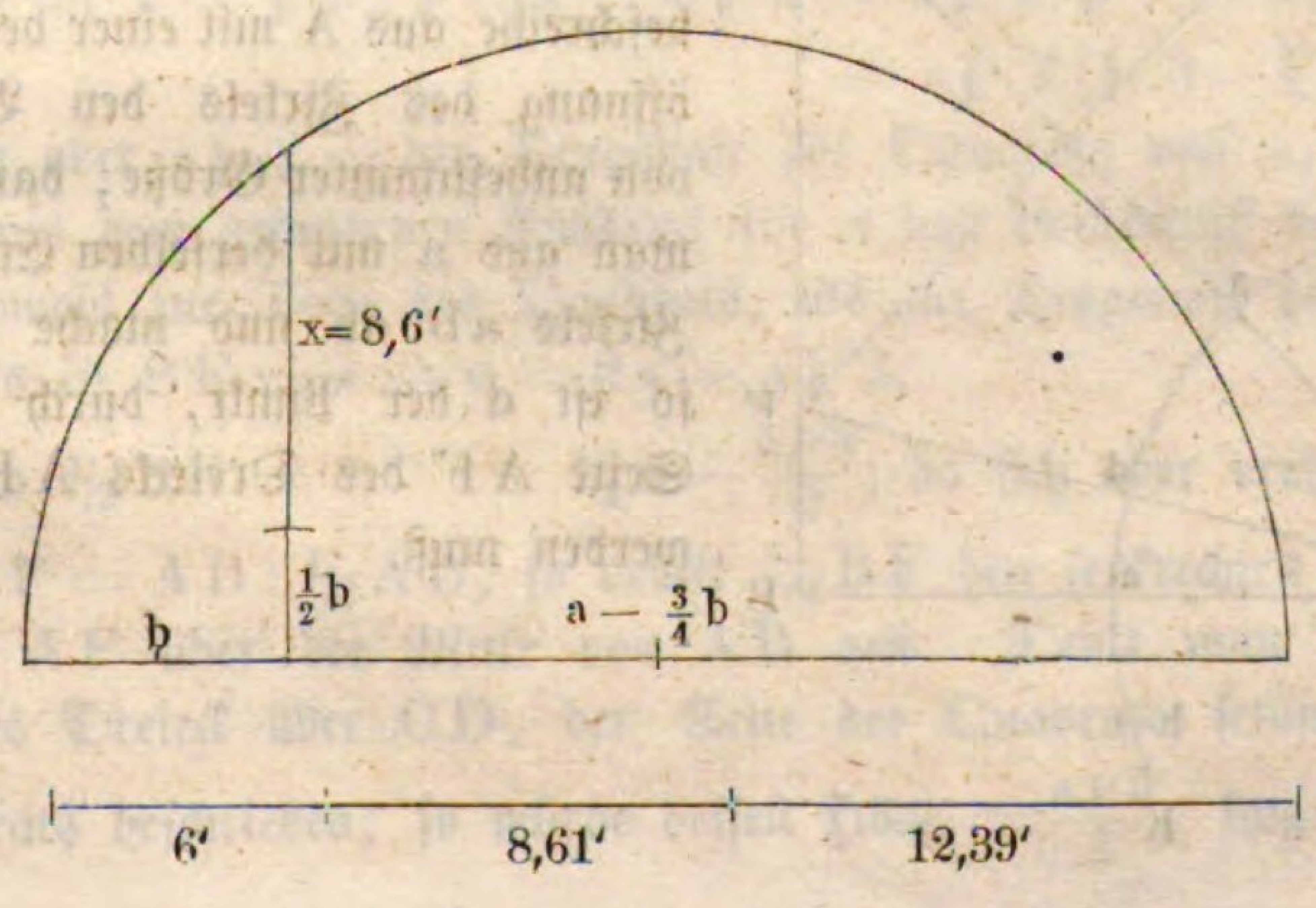
$x = [\sqrt{(a - \frac{3}{4}b)b}] - \frac{1}{2}b$.

Dieser Ausdruck läßt sich auch leicht construiren; man braucht nur zwischen $(a - \frac{3}{4}b)$ und b die mittlere Proportionallinie zu suchen und von dieser $\frac{1}{2}b$ abzuziehen, so erhält man x.

Aufgabe:

Theile eine gerade Linie von 27′ Länge so in drei Theile, daß der zweite Theil die mittlere Proportionallinie zwischen dem ersten Theil, welcher 6′ lang sein soll, und dem dritten ist, und beweise die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!

1. Zeichnung:



2. Probe durch Rechnung:

$$6 : x = x : 27 - (6 + x)$$
$$x^2 = 162 - 36 - 6x$$
$$x^2 + 6x = 126$$
$$\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{126 + 9}$$
$$x + 3 = \sqrt{135} = 11{,}61$$
$$x = 11{,}61 - 3 = 8{,}61'.$$

Oder es verhält sich

1) $6 : x = x : y$ und es ist

2) $x + y = 27 - 6 = 21$

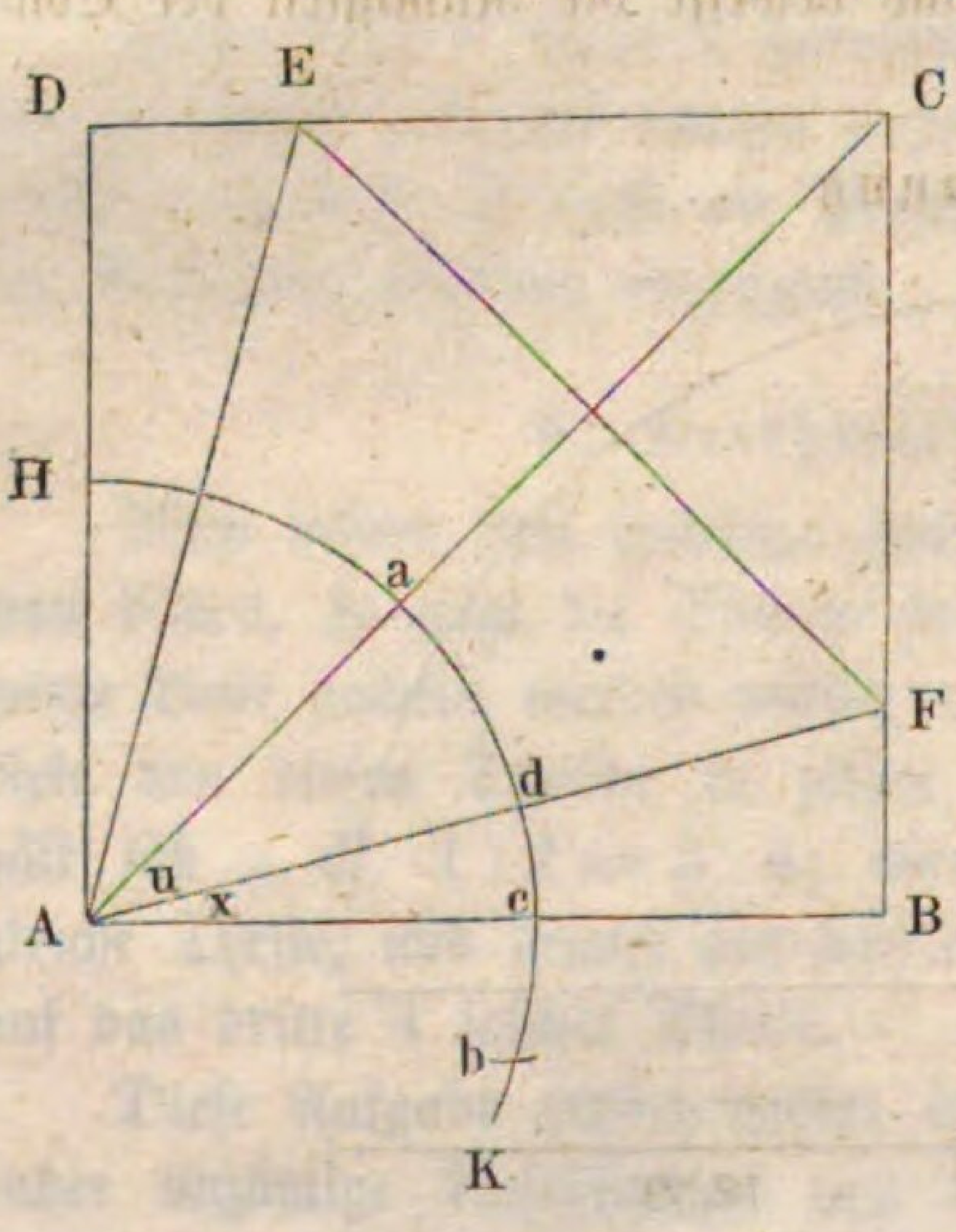
nach 1) ist $y = \frac{x^2}{6}$

" 2) " $y = 21 - x$, also

$$\frac{x^2}{6} = 21 - x$$
$$x^2 = 126 - 6x$$
$$x^2 + 6x + 9 = 135$$
$$\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{135}$$
$$x + 3 = 11{,}61, \text{ also } x = 11{,}61 - 3 = 8{,}61.$$

VII. In ein Quadrat ABCD ein gleichseitiges Dreieck AFE zu beschreiben, so daß die eine Spitze desselben in den einen Winkel des Quadrats, die andern beiden aber in die Seiten desselben fallen.

a. Geometrische Auflösung:



Man ziehe die Diagonale AC und beschreibe aus A mit einer beliebigen Eröffnung des Zirkels den Bogen HK von unbestimmter Größe; darauf schneide man aus a mit derselben Eröffnung des Zirkels ab ab und mache $cd = cb$; so ist d der Punkt, durch welchen die Seite AF des Dreiecks AFE gezogen werden muß.

Beweis:

Es ist klar, daß die Diagonale AC das Dreieck AFE und den Winkel EAF halbirt; folglich ist der Winkel $u = 30^0$ und $x = 15^0$; der Bogen ab aber, dessen Sehne dem Halbmesser gleich ist, beträgt 60^0, und da ac als das Maß eines halben rechten Winkels $= 45^0$ ist, so ist $cb = 15^0$. Wenn also $cd = cb$ gemacht wird, so ist auch $cd = 15^0$, also das Maß des Winkels, welchem x gleich sein soll, und daher d der Punkt, durch welchen AF gezogen werden muß.

b. Arithmetische Auflösung:

Man setze die Seite des Quadrats $= a$, die Seite des Dreiecks $= x$ und $CF = CE = y$, so ist:

$EF^2 = EC^2 + CF^2$, das ist $x^2 = 2y^2$

$AF^2 = AB^2 + BF^2$, das ist $x^2 = a^2 + (a - y)^2$;

folglich ist $2y^2 = a^2 + (a - y)^2$

$= a^2 + a^2 - 2ay + y^2$

also $y^2 + 2ay = 2a^2$

ergänzt: $y^2 + 2ay + a^2 = 3a^2$

mithin: $y + a = \sqrt{3a^2}$, und daher ist

$y = (\sqrt{3a^2}) - a.$

Es findet sich also y, wenn man von der Seite eines Quadrats, welches dreimal so groß als das gegebene ist, die Seite des gegebenen selbst abzieht. Durch y aber wird der Punkt F, folglich die Seite AF und dadurch das ganze Dreieck bestimmt.

Da $x^2 = 2y^2$, folglich $x = y\sqrt{2}$ ist, so verhält sich $1 : \sqrt{2} = y : x$, und daher ist x die Diagonale des Quadrats von y.

Ferner ist $x = \sqrt{2} . \sqrt{(3a^2)} . a \sqrt{2} = a\sqrt{2} . \sqrt{3} - a\sqrt{2}$

$= a\sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1).$

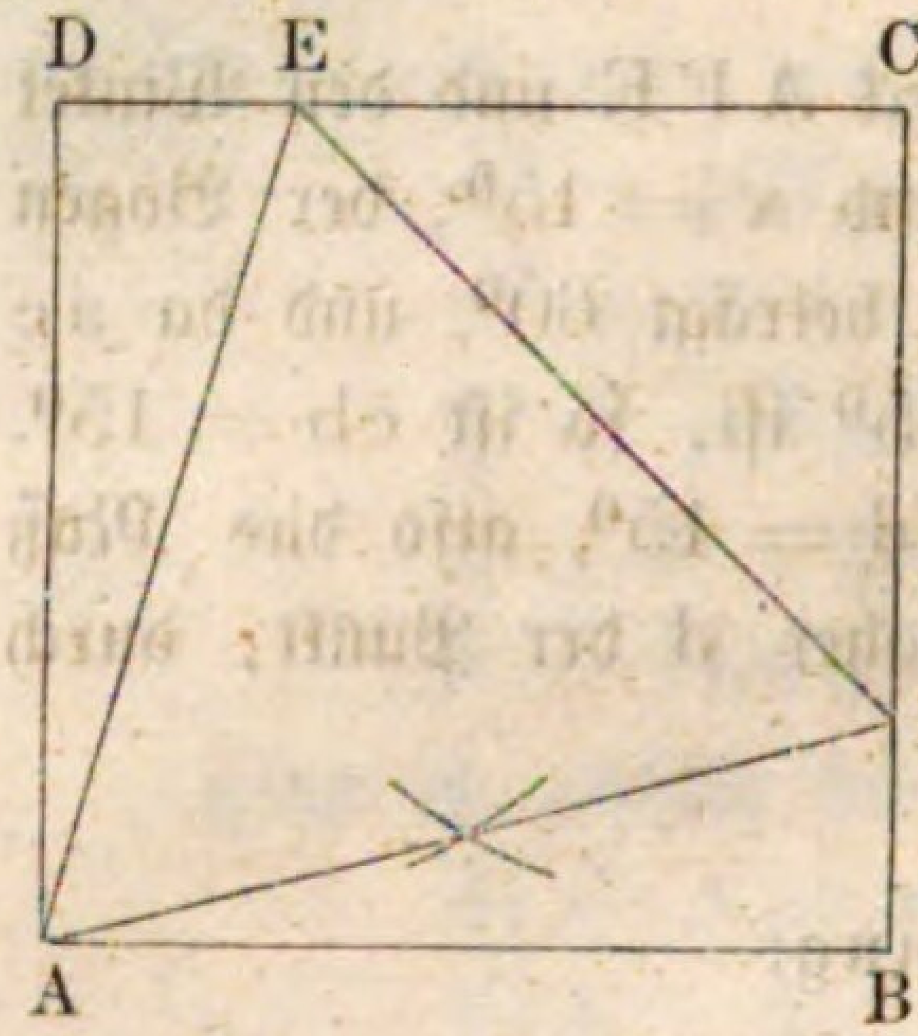
Es ist aber $a\sqrt{2}$ = der Diagonale des Quadrats von a, folglich ergiebt sich aus dem gefundenen Ausdruck für x das Verhältniß der Seite des Dreiecks sowohl zur Seite des Quadrats, als zur Diagonale desselben.

Es ist $BF = a - y = 2a - a\sqrt{3}$,

folglich $\frac{1}{2} BF = \frac{1}{2} a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$; da sich aber verhält:

$BF : \frac{1}{2} BF = AB : \frac{1}{2} AB$, so drückt $\frac{1}{2} BF$ den senkrechten Abstand der Mitte von AF über der Mitte von AB aus. Denkt man sich nun ein gleichseitiges Dreieck über CD, der Seite des Quadrats selbst, innerhalb des Quadrats beschrieben; so würde dessen Höhe $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$, folglich der Ab-

stand seiner Spitze von der zunächst liegenden Seite des Quadrats, nämlich



von $AB = a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} BF$ sein; und da die Spitze eines solchen Dreiecks auch senkrecht über die Mitte von AB zu liegen kommt, so muß sie auch in die Mitte der Linie AF fallen. Man kann daher die Lage der Seite AF sogleich finden, wenn man über CD ein gleichseitiges Dreieck innerhalb des Quadrats beschreibt und durch dessen Spitze die Linie AF zieht.

Es ist dieses Dreieck das **größte** unter allen gleichseitigen Dreiecken, die in das Quadrat verzeichnet werden können, so wie dasjenige das **kleinste**, dessen Seiten den Seiten des Quadrats selbst gleich sind. Bei dem letztern liegt die Spitze in der Mitte einer Seite des Quadrats, und die ihr gegenüberstehende Seite geht der Seite des Quadrats parallel.

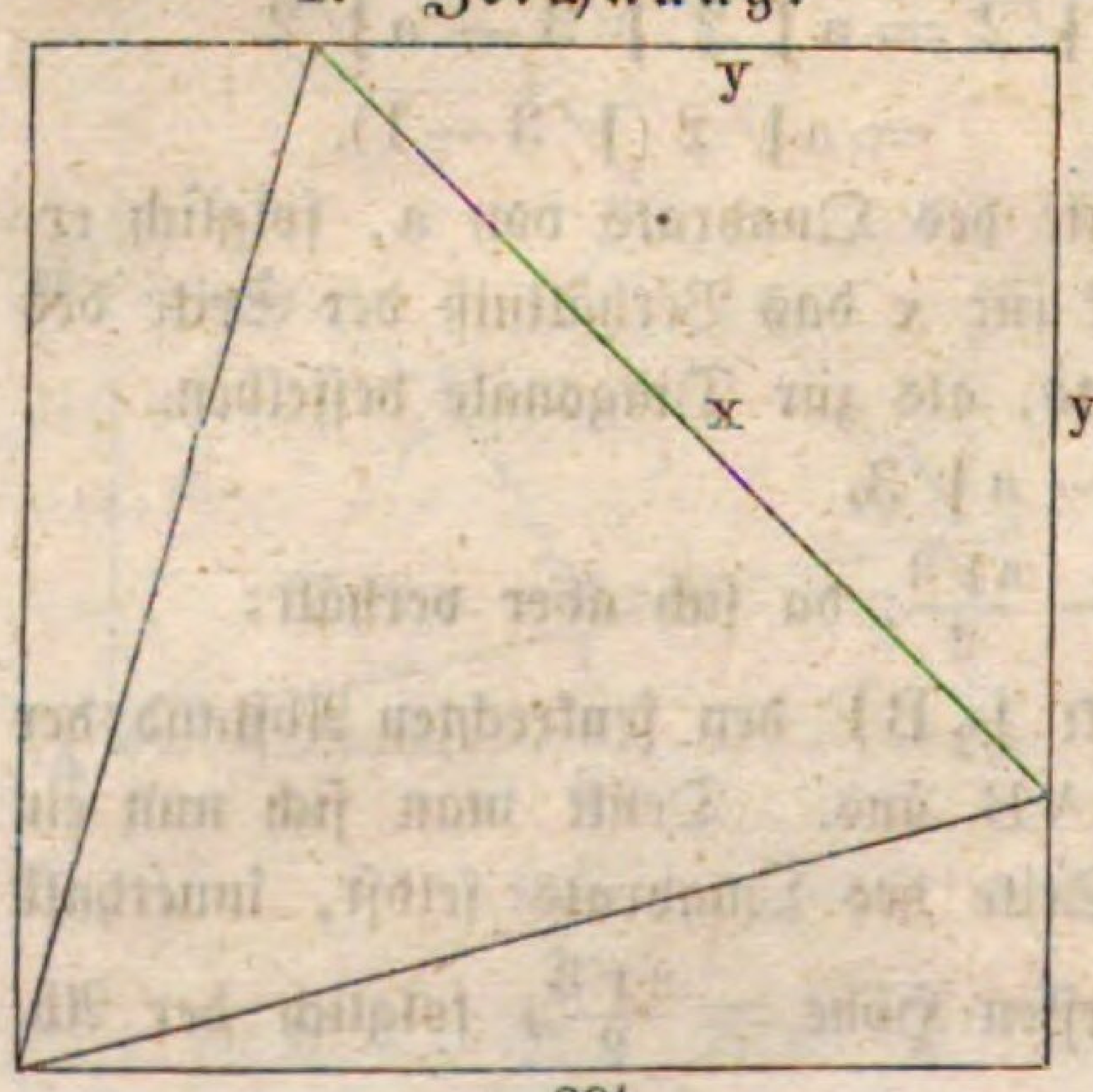
Der Inhalt des kleinsten gleichseitigen Dreiecks ist $= \frac{\sqrt{3}}{4} . a^2 = 0{,}433 . a^2$, der des größten ist $= [(2\sqrt{3}) - 3] a^2 = 0{,}464 a^2$.

Das größte Dreieck im Quadrat überhaupt ist dasjenige, dessen Grundlinie sowohl als Höhe der Seite des Quadrats gleich ist; der Inhalt desselben ist $= \frac{1}{2} a^2$.

Aufgaben:

1) Beschreibe in ein Quadrat von 39′ Seitenlänge ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Spitze in den einen Winkel und dessen beide andere Spitzen in zwei Seiten des Quadrats fallen, und bestimme sodann durch Rechnung die Seitenlänge und den Flächeninhalt des Dreiecks!

1. **Zeichnung:**



2. **Rechnung:**

$y = \sqrt{3a^2} - a$

$= \sqrt{4563} = 67{,}548' - 39' = 28{,}548'$

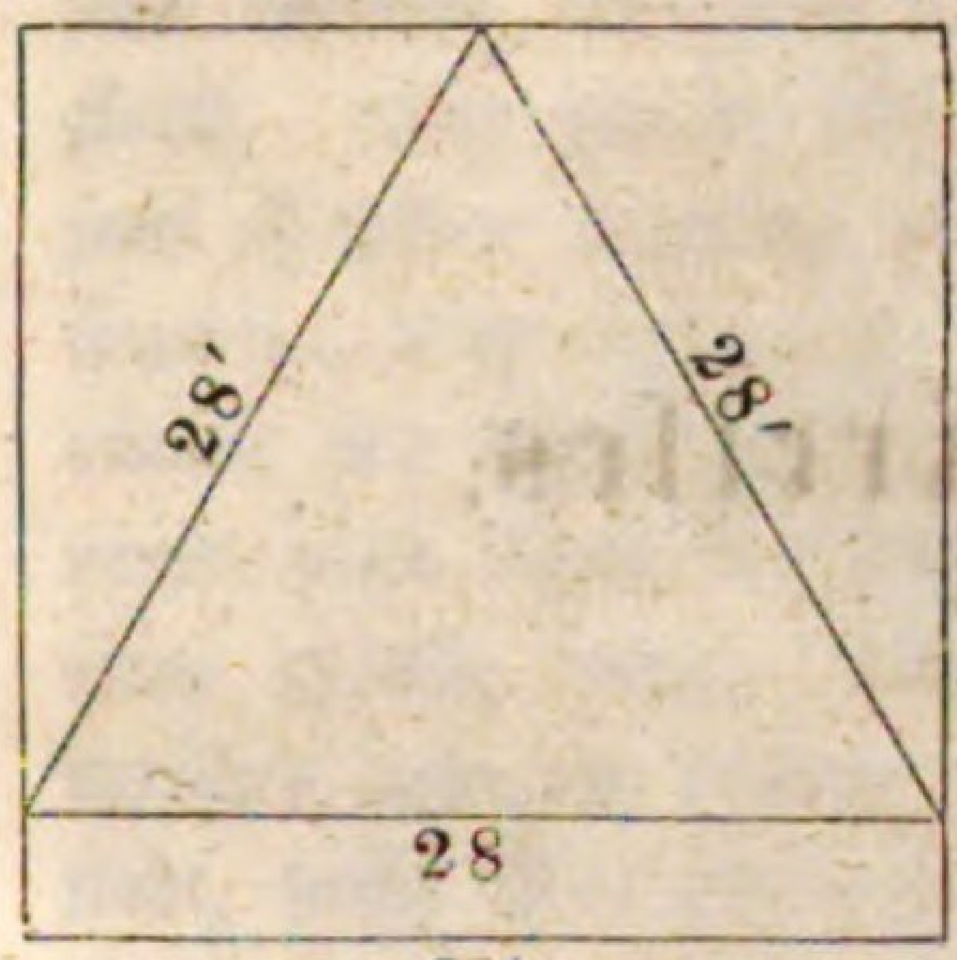
$x = y\sqrt{2} = 1{,}414 \times 28{,}548' = 40{,}367'$

Flächeninhalt des Dreiecks nach der Formel $\sqrt{s.(s-a(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{497818{,}6923} = 705{,}562 \square$ fuß, was gleich sein soll $0{,}464 \times 39^2$

$= 0{,}464 \times 1521 = 705{,}744 \square$ fuß.

2) Zeichne in ein Quadrat von 28′ Seitenlänge das kleinste gleichseitige Dreieck und berechne den Flächeninhalt desselben!



Rechnung:

Flächeninhalt des Dreiecks

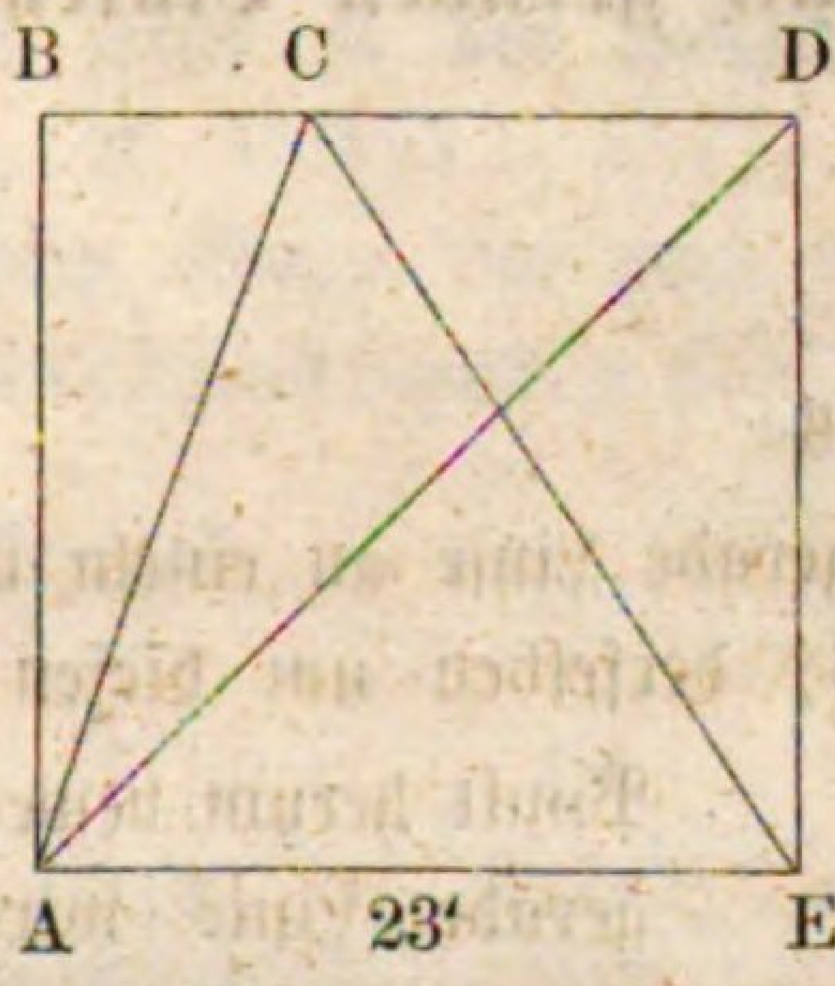
$= \sqrt{(42.14.14.14)} = \sqrt{115248}$

$\sqrt{115248} = 339{,}482$ □fuß,

welches gleich sein soll $28^2 \times 0{,}433$

$= 339{,}472$ □fuß.

3) Beschreibe in ein Quadrat von 23′ Seitenlänge zwei möglichst größte Dreiecke!



Dreieck A D E = A C E.

II. Theil.

Die Theorie des Kreises.

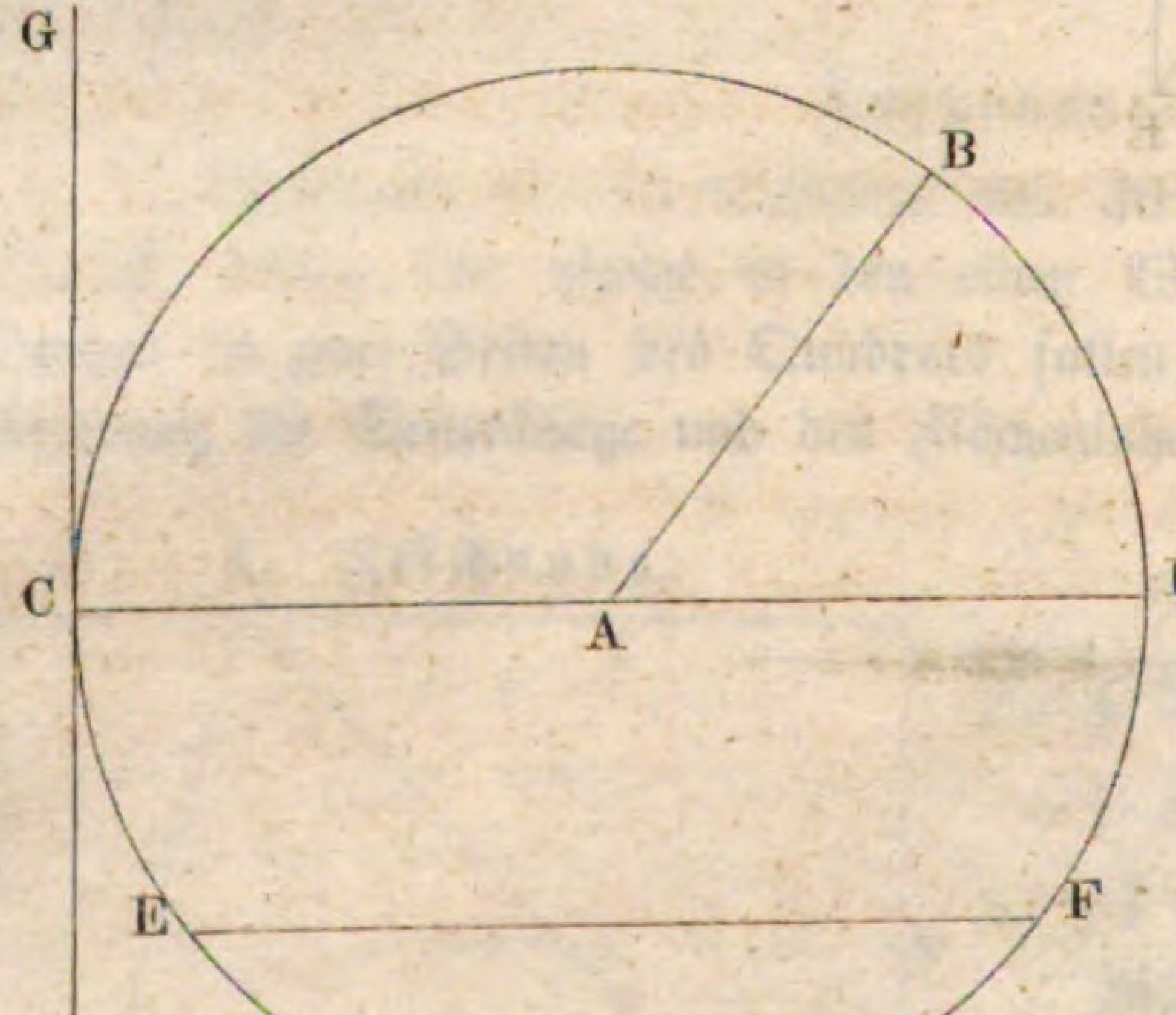
I. Abschnitt.

Der Kreis in Verbindung mit geraden Linien.

§. 1.

Einleitung.

Ein Kreis entsteht, wenn man eine gerade Linie an einem Endpunkte, A, festhält und den andern Endpunkt, B, derselben um diesen ruhenden Punkt herum bewegt. Diese gerade Linie wird Halbmesser oder Radius, der ruhende Punkt Mittelpunkt oder Centrum und die durch den bewegten Punkt beschriebene, krumme Linie, BCEIFD, Umfang oder Peripherie des Kreises genannt.



Ein Kreis oder Zirkel ist also eine in sich selbst geschlossene, krumme Linie, in welcher alle Punkte von dem Mittelpunkte gleich weit abstehen. Aus dieser geometrischen Erklärung des Kreises folgt, daß die Größe seines Umfangs blos von der Größe seines Halbmessers abhängt, und daß alle Radien in einem Kreise gleich lang sind. Eine gerade Linie, welche die Peripherie des Kreises in zwei Punkten berührt und durch den Mittelpunkt

des Kreises geht, heißt Durchmesser oder Diameter, z. B. CD. Alle Durchmesser eines Kreises sind gleich lang; denn jeder Diameter ist gleich zwei Radien, und sind die Hälften sich gleich, so sind auch die Ganzen sich gleich. Eine gerade Linie, z. B. EF, welche den Umfang des Kreises in zwei Punkten berührt, aber nicht durch das Centrum des Kreises geht, wird Sehne oder Chorde genannt. Ein Stück des Kreisumfanges, welches immer als durch eine Sehne abgeschnitten und begrenzt gedacht werden kann, nennt man einen Kreisbogen, z. B. BC, CE, EF, FD und DB. Eine gerade Linie, welche die Peripherie des Kreises in einem Punkte, C, berührt und in diesem Berührungspunkte senkrecht auf dem Radius AC steht, heißt Berührungslinie oder Tangente, z. B. GH. Der Theil eines Kreises, welcher durch eine Sehne, EF, und einen Bogen, EJF, oder den Bogen ECBDF begrenzt wird, heißt ein Kreisabschnitt oder Segment; ist die begrenzende Sehne Durchmesser eines Kreises, z. B. CD, so theilt sie den ganzen Kreis in zwei gleiche Segmente oder Halbkreise, z. B. CBD = CJD. Das Stück eines Kreises endlich, welches durch einen Bogen und zwei Radien begrenzt ist, z. B. ABC und ABD wird Kreisausschnitt oder Sector genannt.

§. 2.

Lehrsätze.

I. Kreise von gleichen Halbmessern oder Durchmessern sind gleich, und gleiche Kreise haben gleiche Halbmesser oder Durchmesser.

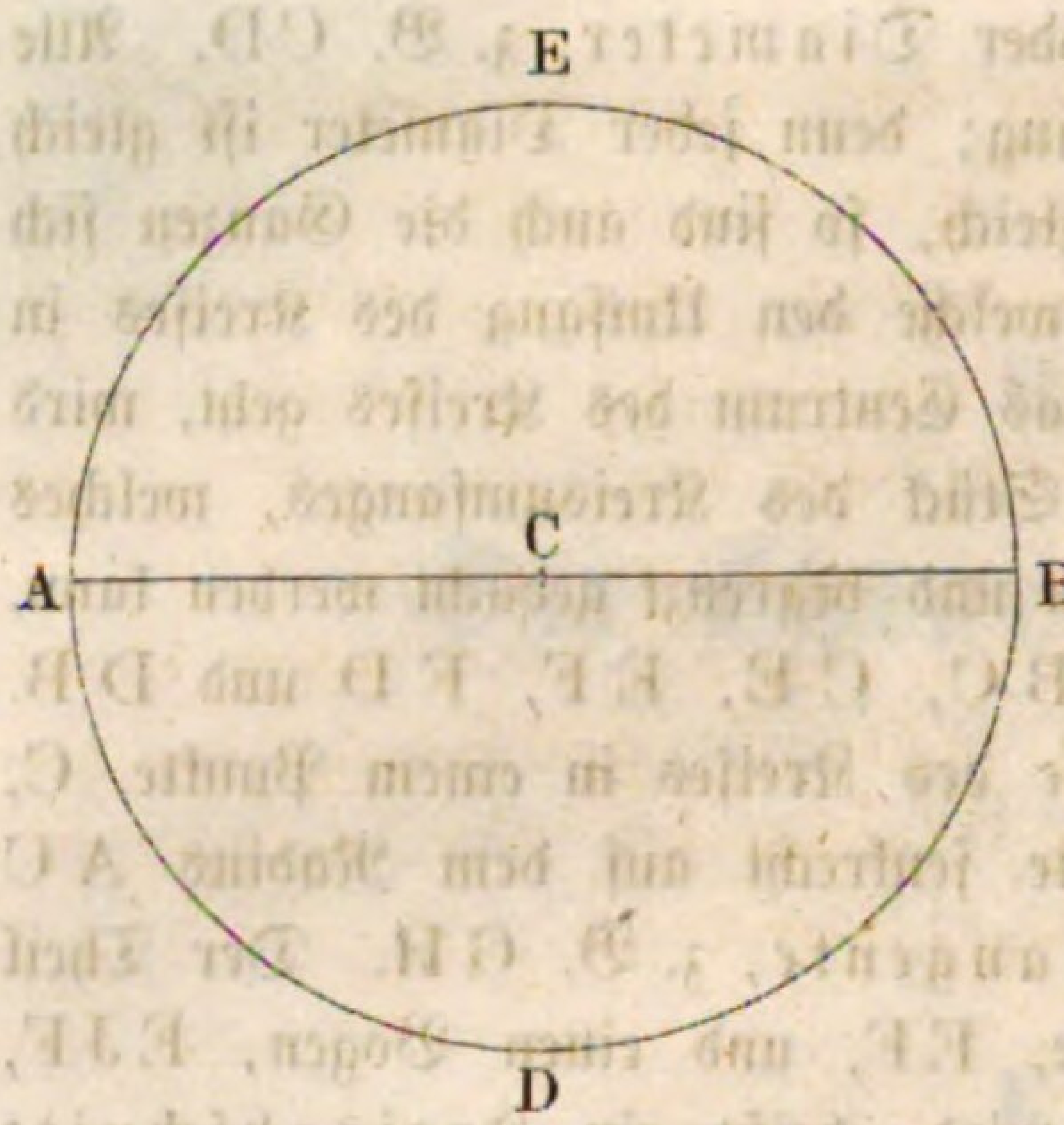
Beweis:

Ein Kreis entsteht durch Umdrehung des Radius um seinen einen ruhenden Endpunkt; während dieser Umdrehung bleibt die Länge der geraden Linie in allen Momenten unverändert; folglich ist sie fortwährend sich selbst gleich. Von der Größe des Radius hängt aber die Größe des Kreises ab; sind also die Halb- oder Durchmesser gleich, so müssen auch die durch sie bestimmten Kreise gleich sein, und umgekehrt gleiche Kreise gleiche Halb- oder Durchmesser haben, und hieraus folgt wieder, daß gleiche Kreise congruent sind.

II. Der Durchmesser theilt den Kreis in zwei congruente Theile oder Halbkreise.

Beweis:

Man denke sich den einen Theil, ADB, des Kreises um C so auf den andern, AEB, gelegt, daß der Durchmesser in unverrückter Lage bleibt,

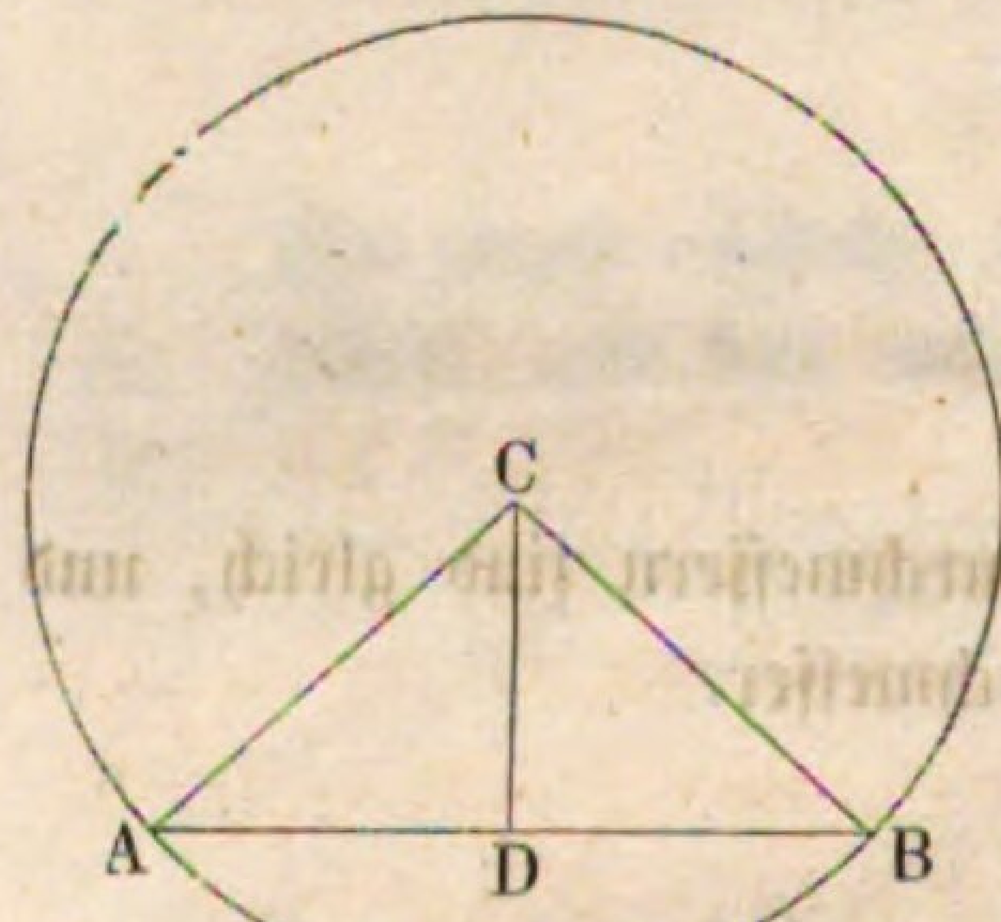


alsdann müssen auch alle Punkte des Bogens A D B in die entsprechenden Punkte des Bogens A E B fallen; denn alle Radien eines Kreises sind gleich lang, und mithin liegen alle Punkte der Peripherie des Kreises gleich weit vom Mittelpunkte C entfernt.

Jede Sehne theilt den Kreis in zwei ungleiche Kreisabschnitte, von denen derjenige, in welchem der Mittelpunkt liegt, der größere, der andere der kleinere ist.

III. Eine Sehne hat nur zwei Punkte mit dem Umkreise gemein und liegt ganz innerhalb des Kreises.

Beweis:



Von einem Punkte, C, können nach einer geraden Linie, A B, nur je zwei gleiche, gerade Linien gezogen werden, welche in gleichem Abstande zu beiden Seiten des von diesem Punkte C auf die gerade Linie A B gefällten Perpendikels C D liegen; folglich kann die Sehne A B die Peripherie des Kreises um C nur in den beiden Punkten A und B treffen; denn sollten sie innerhalb des Kreises fallen, so müßten die Radien A C und B C verkürzt, und sollten sie außerhalb fallen, verlängert werden, was beides unmöglich ist, da die Radien eines Kreises stets bestimmt und gleich lang sind.

IV. Wenn man aus dem Mittelpunkte eines Kreises ein Perpendikel auf die Sehne desselben fällt, so wird diese dadurch halbirt. Beweis: (siehe die vorige Figur.)

Es sei C der Mittelpunkt eines Kreises und C D senkrecht auf A B. Man ziehe C A und C B, so ist A B C ein gleichschenkliges Dreieck und daher A B durch C D halbirt; denn ein Perpendikel aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie gezogen, halbirt nicht nur die Grundlinie, sondern auch den ihr gegenüberstehenden Winkel und das ganze Dreieck. Hieraus folgt:

1) Eine gerade Linie, aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf die Mitte der Sehne gezogen, steht senkrecht auf ihr.

2) Ein Perpendikel, durch die Mitte einer Sehne gezogen, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

3) Zwei Perpendikel, durch die Mitte zweier Sehnen gezogen, treffen, wenn sie einander schneiden, im Mittelpunkte des Kreises zusammen.

4) Der Mittelpunkt eines Kreises kann daher durch zwei solche Perpendikel gefunden werden.

5) Zwei Sehnen, wenn nicht beide durch den Mittelpunkt gehen, können einander nicht gegenseitig halbiren, weil sonst eine gerade Linie, aus dem Mittelpunkte des Kreises nach dem Durchschnittspunkte der Sehnen gezogen, auf beiden zugleich senkrecht stehen müßte, was unmöglich ist.

§. 3.

Aufgaben.

I. Durch drei Punkte, A, B, C, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu ziehen.

Auflösung:



Man ziehe AB und BC, und durch die Mitte einer jeden dieser geraden Linien ein Perpendikel, EF und GH, der Punkt D, in welchem diese einander schneiden, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Beweis:

AB und BC können als Sehnen des Kreises betrachtet werden; schneiden also die Perpendikel GH und EF einander, so ist ihr Durchschnittspunkt der Mittelpunkt des Kreises; denn zwei Perpendikel, durch die Mitte zweier Sehnen gezogen, treffen, wenn sie einander schneiden, im Mittelpunkte des Kreises zusammen. Die Perpendikel aber müssen einander auf der Seite von D schneiden; denn man ziehe KL, so ist $\sphericalangle EKL + GLK > 2R$, folglich divergiren die Senkrechten, EF und GH, auf dieser Seite, und convergiren mithin auf der andern.

Zieht man durch die Mitte einer geraden Linie, A B, ein Perpendikel, EF, so kann jeder Punkt des Perpendikels der Mittelpunkt eines Kreises werden, in welchem A B eine Sehne ausmacht. Dasselbe gilt von allen Punkten des Perpendikels G H in Bezug auf die Linie M C. Schneiden beide Perpendikel einander in D, so ist D sowohl der Mittelpunkt eines Kreises, der durch die Punkte A und B, als auch eines Kreises, der durch die Punkte M und C geht; aber diese Kreise sind verschieden, wenn D B und D M ungleich sind; daher kann man nicht durch jede vier Punkte einen Kreis legen. Sind aber die Radien D B und D M einander gleich, so lassen sich die vier Punkte A, B, M, C, in die Peripherie des Kreises legen.



Diese Aufgabe macht eigentlich einen besondern Fall einer andern, viel allgemeinern und schwerern Aufgabe, des berühmten Apollonianischen Problems aus, welches seinen Namen vom Apollonius aus Perga hat, der mit Recht mit Pythagoras, Euklides, Archimedes und Diophantes zu den Begründern der mathematischen Wissenschaften gerechnet wird. Er lebte um 240 vor Christo und studirte die Mathematik zu Alexandria unter den Schülern des Euklides. Von seinen vielen mathematischen Schriften, die sich nur in Bruchstücken erhalten haben, ist das Buch „Von den Kegelschnitten" das berühmteste.

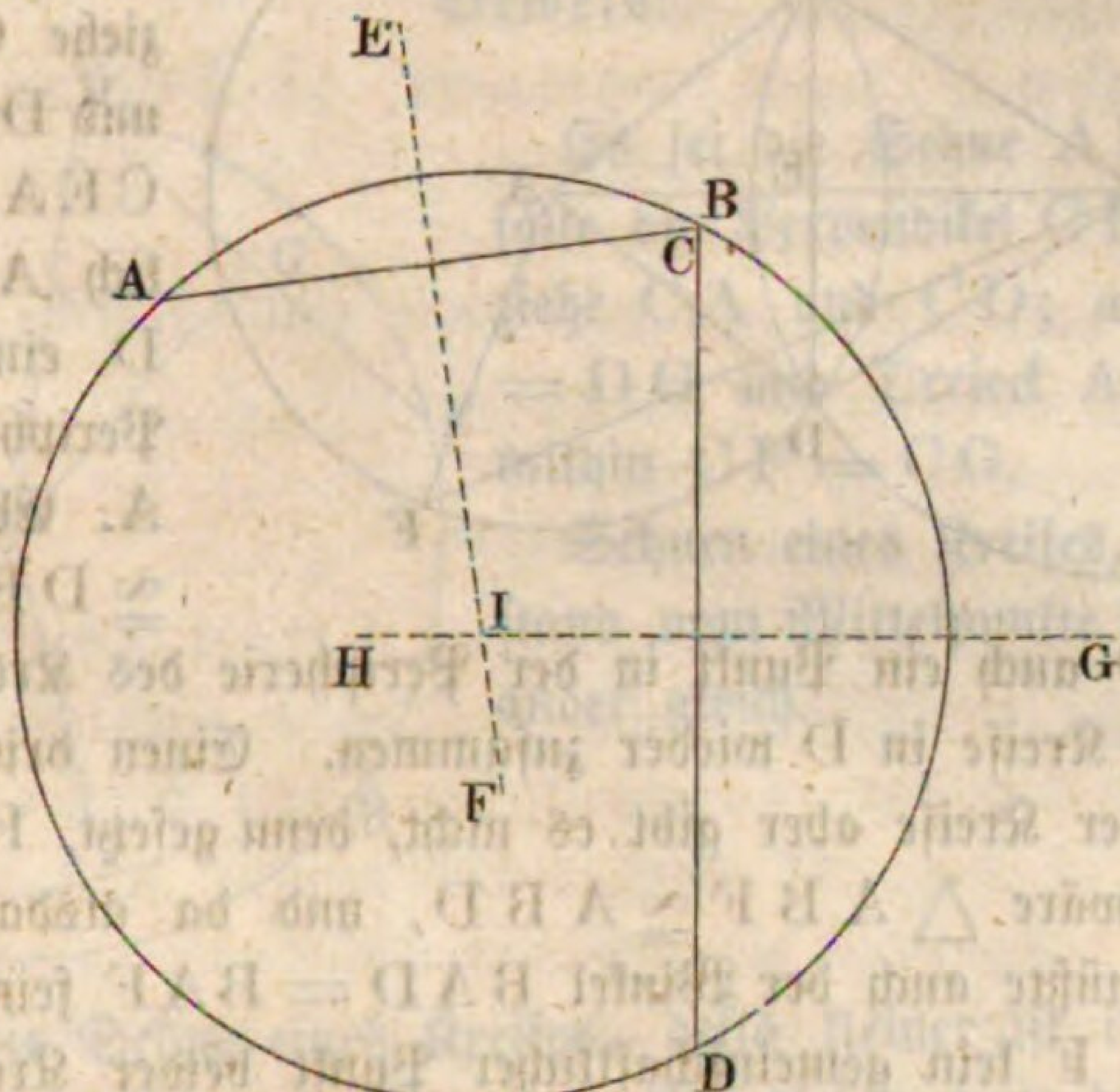
Das Apollonianische Problem, wovon unsere Aufgabe nur ein specieller Fall ist, läßt sich auf folgende Art ausdrücken: Wenn von Punkten, geraden Linien, oder Kreisen je drei Stücke in einer Ebene gegeben sind, einen Kreis zu ziehen, der durch die Punkte, wenn welche gegeben sind, hindurch gehe und die gegebenen Linien oder Kreise berühre.

II. Den unbekannten Mittelpunkt eines Kreises zu finden.

Auflösung:

Man ziehe in dem Kreise zwei Sehnen, A B und C D, halbire dieselben und verlängere die Halbirungslinien, E F und G H, so weit,

daß sie sich schneiden, so ist der Durchschnittspunkt I das gesuchte Centrum des Kreises.



Beweis:

Zwei Perpendikel, durch die Mitte zweier Sehnen gezogen, treffen, wenn sie einander schneiden, im Mittelpunkte des Kreises zusammen.

Nach der Lösung dieser beiden Aufgaben fügen wir noch folgende drei Sätze hinzu:



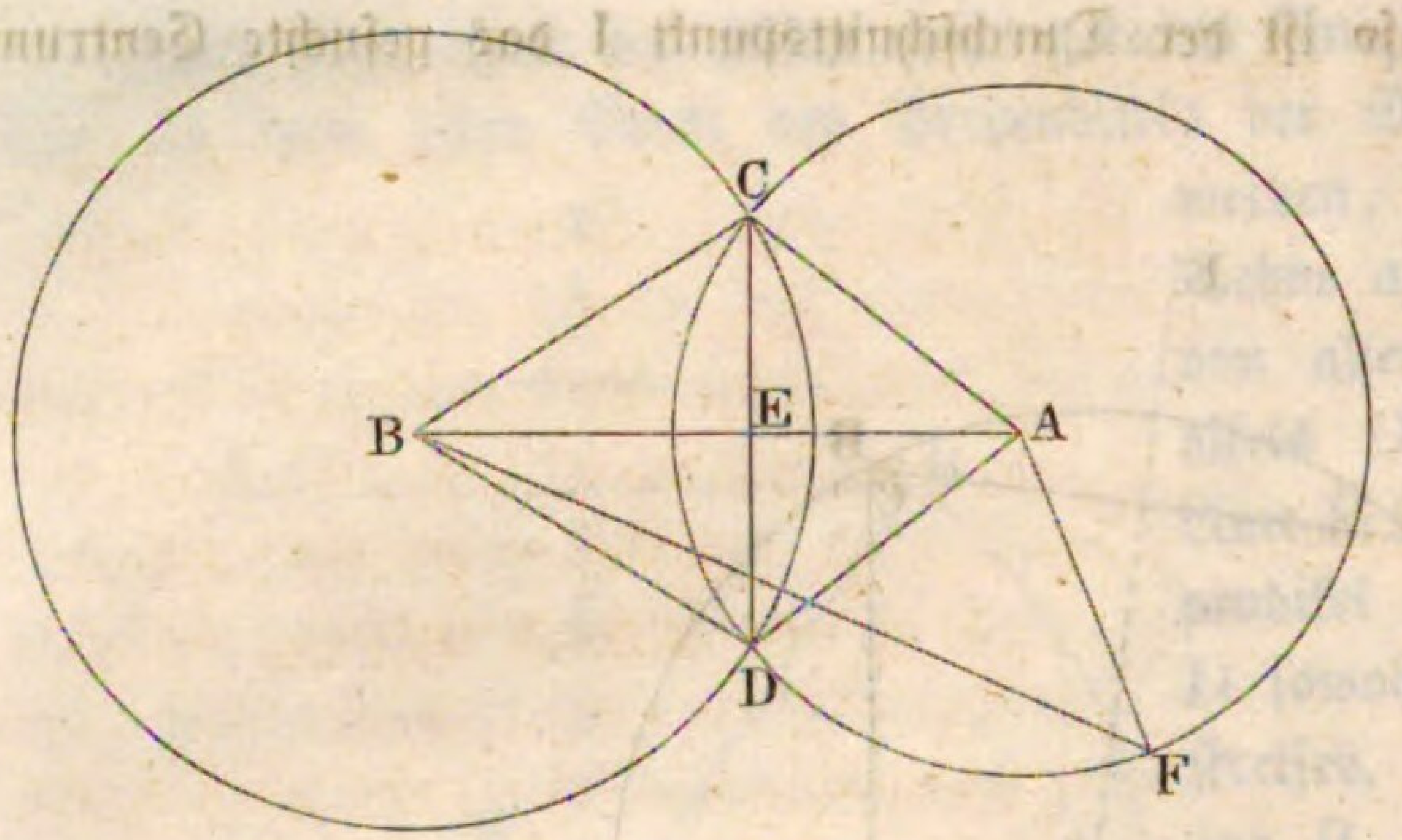
1) Drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen einen Kreis.

2) Die Perpendikel auf den Seiten eines Triangels, in deren Mitte, haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, welcher der Mittelpunkt des durch die Winkelspitzen des Triangels gehenden Kreises ist, z. B. (siehe nebenstehende Figur).

3) Zwei Kreise, die einander schneiden, schneiden sich nur in zwei Punkten.

Beweis:

Es sei der eine Kreis um A, der andere um B beschrieben und sie mögen einander in C schneiden. Man ziehe durch A und B eine gerade Linie, AB, und fälle darauf aus C ein Perpendikel, CE, verlängere dieses so, daß



ED = CE werde, so ist D der zweite Durchschnittspunkt; denn man ziehe CA, CB, DA und DB, so ist Dreieck CEA ≌ DEA; folglich AC = AD, also D ein Punkt in der Peripherie des Kreises um A. Ebenso ist △ CEB ≌ DEB; folglich CB = DB, also D auch ein Punkt in der Peripherie des Kreises um B; mithin treffen beide Kreise in D wieder zusammen. Einen dritten gemeinschaftlichen Punkt beider Kreise aber gibt es nicht, denn gesetzt, F sollte ein solcher Punkt sein, so wäre △ ABF ≌ ABD, und da alsdann BD = BF sein müßte, so müßte auch der Winkel BAD = BAF sein, was unmöglich ist; mithin kann F kein gemeinschaftlicher Punkt beider Kreise sein.

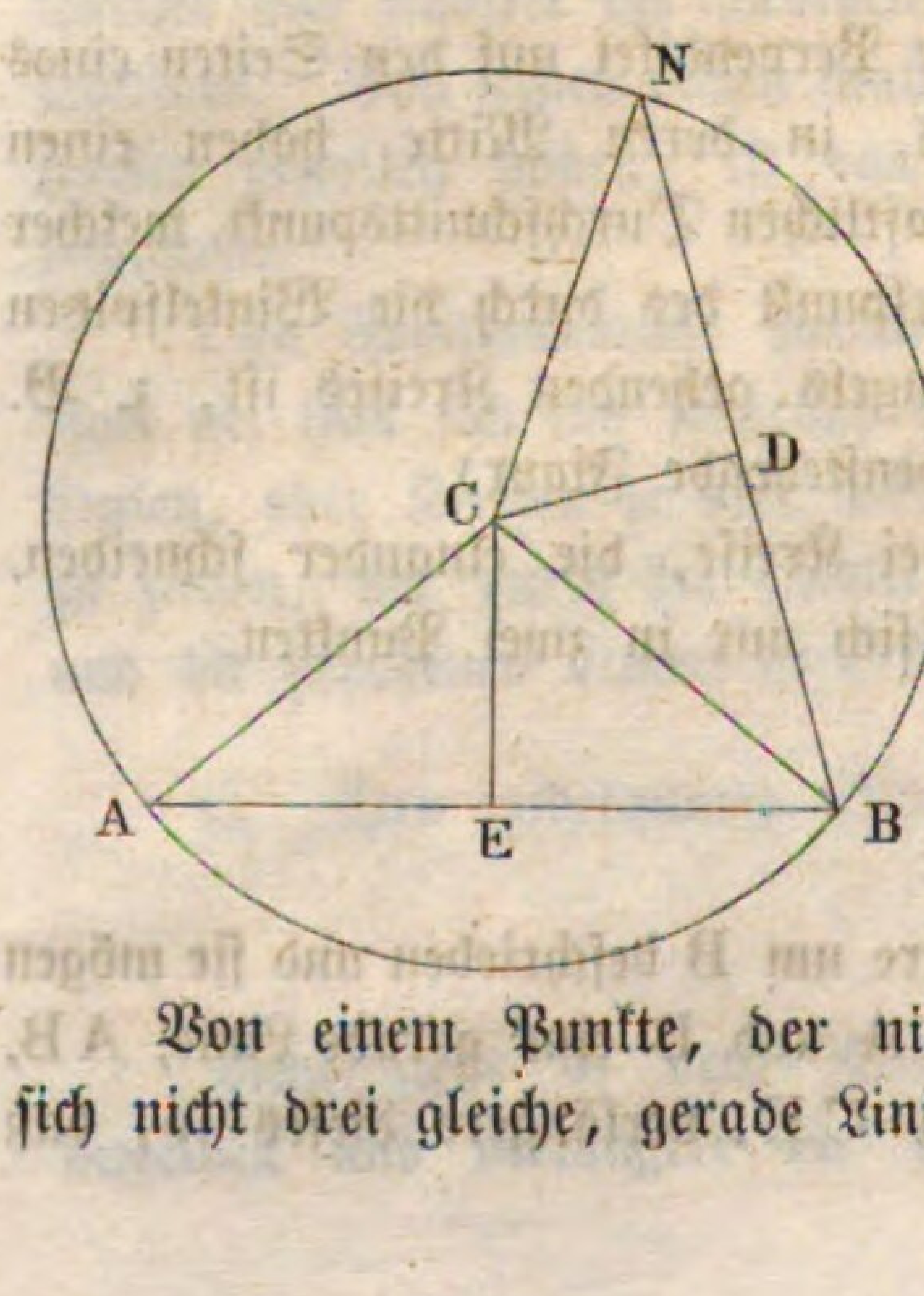
Die gerade Linie AB, die durch beider Kreise Mittelpunkt geht, steht auf der gemeinschaftlichen Sehne CD senkrecht und halbirt dieselbe.

§. 4.

Lehrsätze.

I. Ein Punkt innerhalb eines Kreises, von welchem drei gleiche, gerade Linien an den Umkreis gehen, ist des Kreises Mittelpunkt.

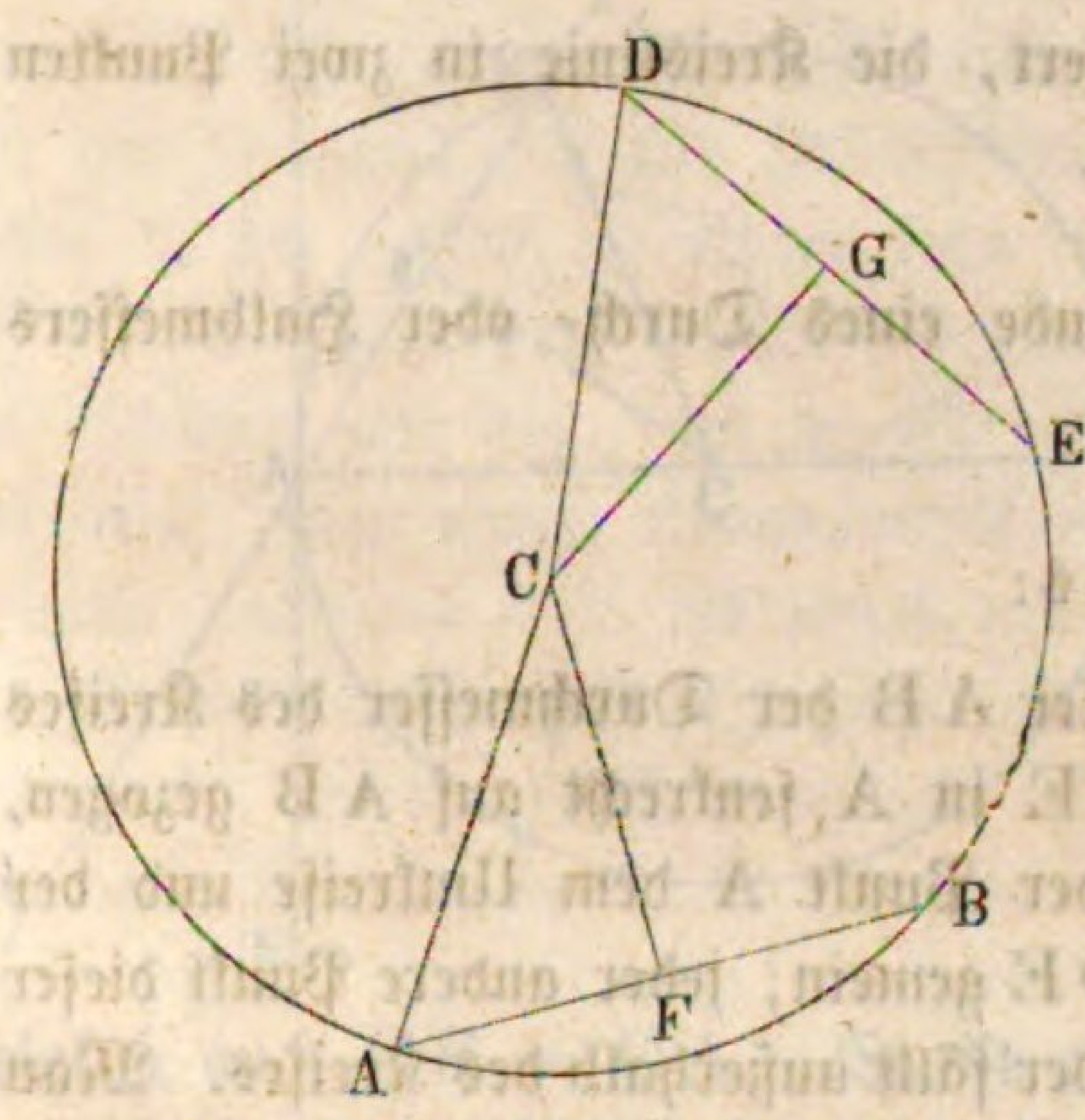
Beweis:



Vom Punkte C gehen drei gleiche, gerade Linien, CA, CB, CN, an den Umkreis; man ziehe von C nach der Mitte der Sehnen AB und BN die geraden Linien CE und CD, so sind die entstandenen Dreiecke wegen Gleichheit aller Seiten congruent, und die beiden Perpendikel, CE und CD, gehen durch den Mittelpunkt; mithin ist C das Centrum des Kreises ABN.

Von einem Punkte, der nicht der Mittelpunkt des Kreises ist, lassen sich nicht drei gleiche, gerade Linien an den Kreis ziehen.

II. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkte.



Beweis:

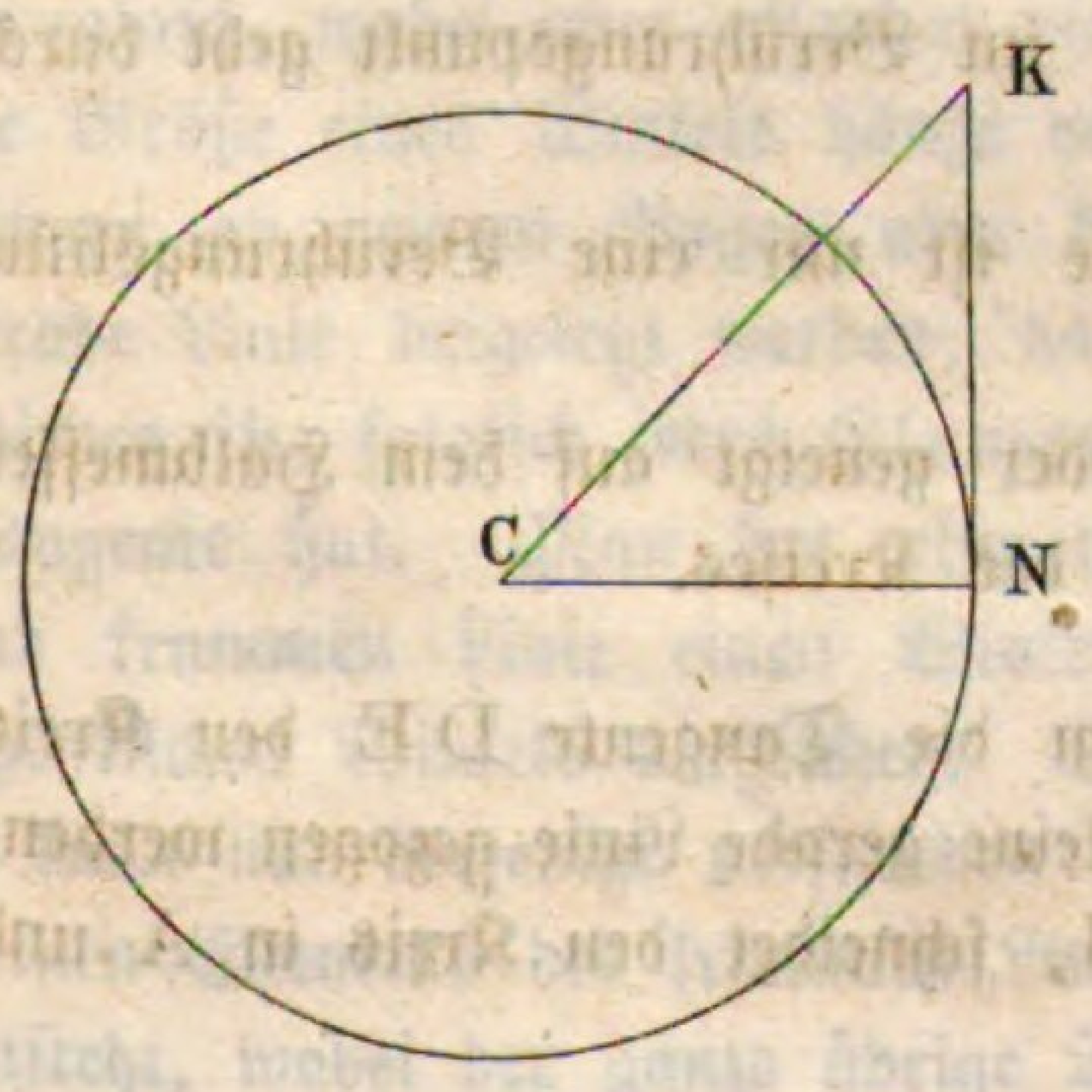
Es sei die Sehne AB = DE; man fälle die Perpendikel CF und CG und ziehe CA und CD; alsdann ist AF = DG und Dreieck ACF ≅ DCG; mithin CF = CG.

Sehnen eines Kreises, die gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, sind einander gleich.

Je größer die Sehne eines Kreises, desto kleiner ist ihr Abstand vom Mittelpunkte, und je kleiner jene, desto größer dieser; denn da $AF^2 = AC^2 - CF^2$ ist, so wird AF^2 und folglich auch AF desto größer oder kleiner, je kleiner oder größer CF^2 und daher auch CF ist.

Umgekehrt, je kleiner der Abstand der Sehne eines Kreises vom Mittelpunkte ist, desto größer ist die Sehne, und je größer jener, desto kleiner diese; mithin ist der Durchmesser die größte Sehne seines Kreises, weil sein Abstand vom Centrum gleich Null ist. Die Größe der Sehnen nimmt aber nicht in demselben Verhältniß zu oder ab, wie ihr Abstand vom Mittelpunkte ab- oder zunimmt.

III. Das Perpendikel auf einem Halbmesser, in dessen Endpunkte errichtet, hat nur diesen Punkt mit dem Umkreise gemein und liegt ganz außerhalb des Kreises.



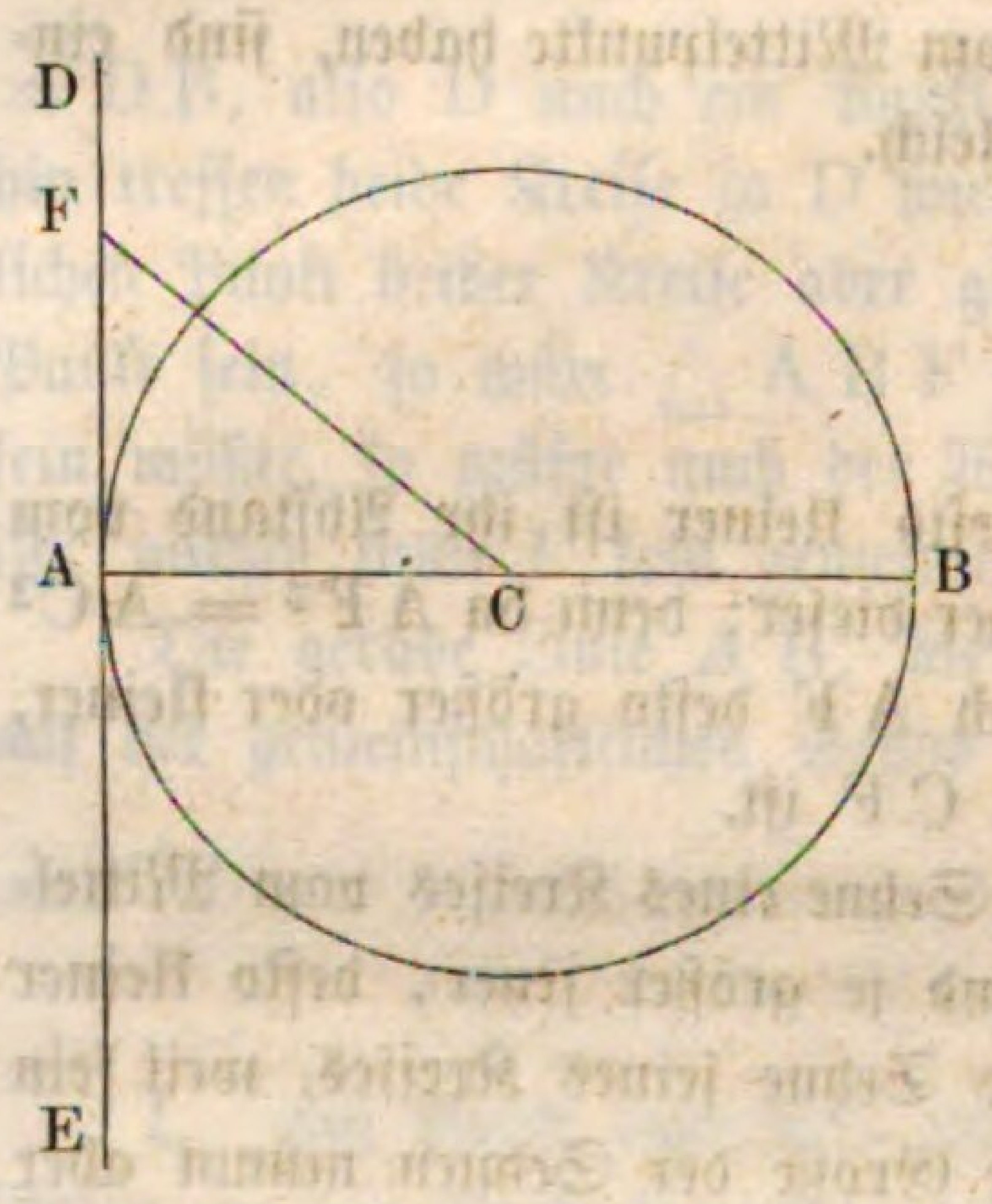
Beweis:

Jeder Punkt, außer N, des Perpendikels NK auf CN liegt außerhalb des Kreises um C; denn in jedem Dreieck hat der größere Winkel auch die größere Gegenseite. Die größte Seite des Dreiecks CNK ist aber die Hypotenuse CK, welche immer länger als eine Kathete ist; steht also NK in N senkrecht, so muß sie in ihrer Verlängerung mit der Peripherie des Kreises divergiren und kann mithin keinen zweiten Punkt mit ihr gemein haben.

Berührungslinie oder Tangente des Kreises heißt demnach jede gerade Linie, welche bei beliebiger Verlängerung mit dessen Umfange nur einen Punkt, den Berührungspunkt, gemein hat.

Jede gerade Linie, welche, verlängert, die Kreislinie in zwei Punkten schneidet, heißt eine Secante des Kreises.

IV. Ein Perpendikel, auf das Ende eines Durch- oder Halbmessers errichtet, ist eine Tangente am Kreise.



Beweis:

Es sei A B der Durchmesser des Kreises und D E in A senkrecht auf A B gezogen, so ist der Punkt A dem Umkreise und der Linie D E gemein; jeder andere Punkt dieser Linie aber fällt außerhalb des Kreises. Man nehme z. B. den Punkt F und ziehe aus dem Mittelpunkte die Linie C F, so ist C A F ein rechtwinkliges Dreieck und C F die Hypotenuse; folglich ist C F größer als C A, mithin C F größer als ein Halbmesser. Da nun C im Mittelpunkte liegt, so fällt F außerhalb des Kreises. Auf ähnliche Weise zeigt sich, daß jeder andere Punkt der Linie D E außerhalb des Kreises fällt, den Punkt A ausgenommen; mithin ist D E eine Tangente. Hieraus folgt:

1) Die Tangente steht im Berührungspunkte auf dem Halbmesser perpendikular.

2) Die gerade Linie vom Mittelpunkte nach dem Berührungspunkte ist ein Perpendikel auf der Berührungslinie des Kreises.

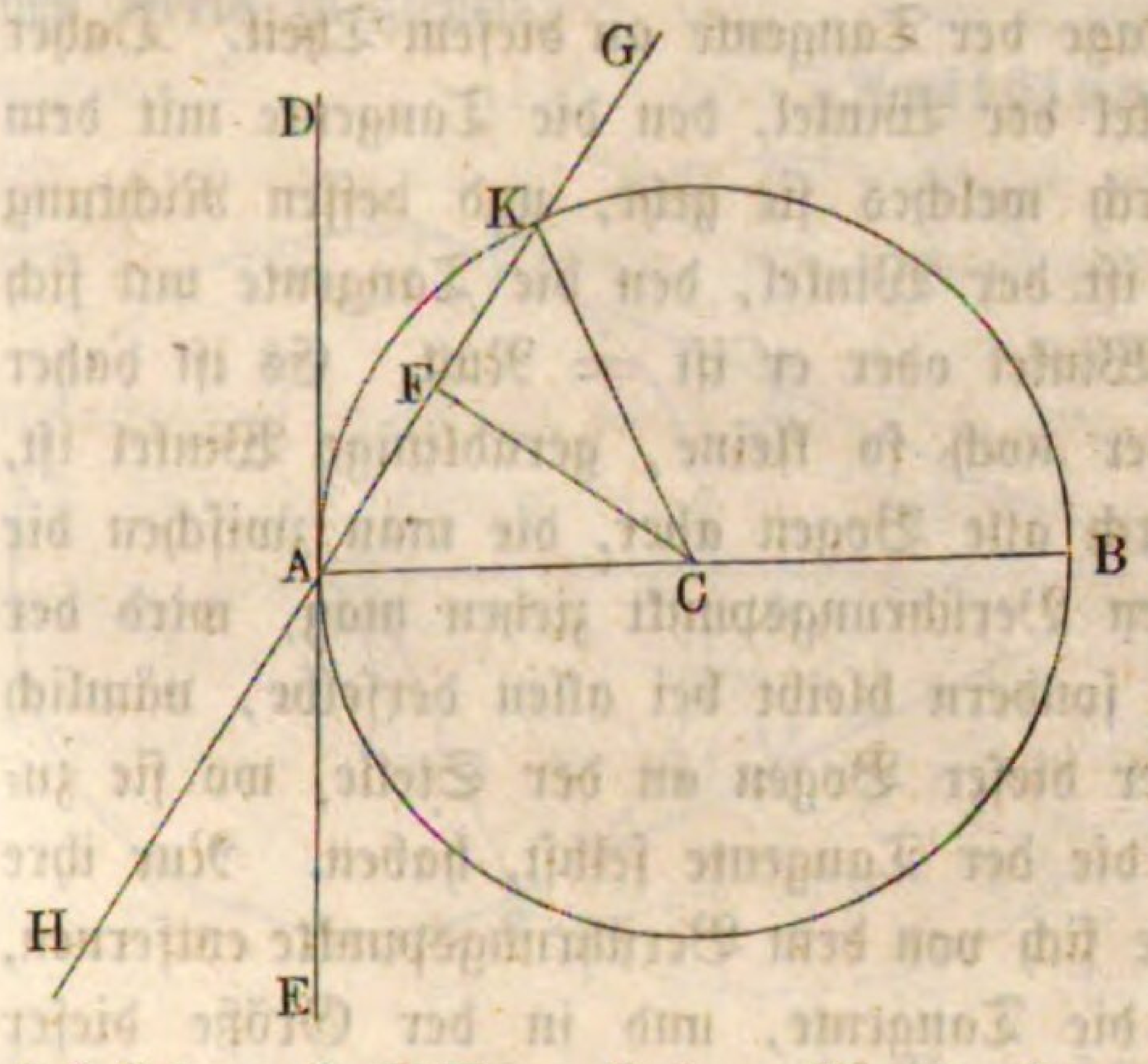
3) Das Perpendikel auf der Tangente im Berührungspunkt geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

4) Durch jeden Punkt der Kreislinie ist nur eine Berührungslinie möglich.

5) Jede gerade Linie, welche schief oder geneigt auf dem Halbmesser in dessen Endpunkte steht, ist eine Secante des Kreises.

V. Durch den Punkt A, in welchem die Tangente D E den Kreis berührt, kann zwischen ihr und dem Kreise keine gerade Linie gezogen werden; sondern jede andere gerade Linie, wie G H, schneidet den Kreis in A und noch in einem zweiten Punkte, in K.

Beweis:



Da der Halbmesser CA auf DE senkrecht ist, so kann er nicht auch auf GH senkrecht sein. Es sei also CF senkrecht auf GH, alsdann ist CA als Hypotenuse größer als die Kathete CF, folglich CF kleiner als ein Halbmesser. Da nun C im Mittelpunkte liegt, so muß F innerhalb des Kreises liegen, mithin hat die Linie GH den Kreis in A geschnitten. Ferner sei KF = AF, und man ziehe CK, alsdann ist △ CFA ≅ CFK, folglich auch CK = CA. Es ist aber CA ein Halbmesser, folglich ist es auch CK, und mithin liegt der Punkt K in der Peripherie des Kreises; hier trifft also die Linie GH die Peripherie zum zweiten Male. Jede andere gerade Linie, die von C nach einem Punkte zwischen K und G gezogen wird, ist größer als CK; folglich fällt KG außerhalb des Kreises; mithin ist der Kreis in K durch GH geschnitten.

Die Tangente AD und der daran liegende Bogen AK scheinen einen Winkel zu bilden, und wirklich hat man ihn den Berührungswinkel genannt. Da nun zwischen der Tangente und dem Bogen keine gerade Linie durch A gelegt werden kann, so muß der Berührungswinkel kleiner als jeder noch so kleine, geradlinige Winkel sein. Dieses scheint um so mehr abgeschmackt, da, wie sich später zeigen wird, zwischen die Tangente und den Bogen noch unzählige andere Bogen gezogen werden können, es also scheint, als ob der Berührungswinkel sich noch in unzählige andere Berührungswinkel zertheilen läßt. Dieser Gegenstand hat daher mannichfaltige Streitigkeiten veranlaßt, wobei aber offenbar ein Mißverständniß zum Grunde liegt; denn die Größe eines Winkels hängt von der Neigung eines Schenkels gegen den andern ab; einem Bogen aber kann überhaupt keine Neigung gegen eine gerade Linie beigelegt werden, da die Richtung seiner Theile unendlich verschieden ist, folglich jedes Element desselben eine andere Neigung gegen die Tangente hat. Man hat also mit Unrecht die Verbindung einer geraden und krummen Linie einen Winkel genannt und sie mit der Größe eines eigentlichen Winkels verglichen. Soll dabei von einem Winkel die Rede sein, so kann nur derjenige verstanden werden, der aus der Neigung des unendlich kleinen Elements der krummen Linie, welches mit der geraden zusammentrifft, entsteht, wobei der ganze übrige Theil der krummen Linie nicht in Betracht

kommt. Die Richtung eines unendlich kleinen Theils einer krummen Linie aber erkennen wir eben aus der Lage der Tangente an diesem Theil. Daher ist der sogenannte Berührungswinkel der Winkel, den die Tangente mit dem Elemente des Bogens macht, durch welches sie geht, und dessen Richtung durch sie bestimmt wird, d. h. es ist der Winkel, den die Tangente mit sich selbst macht; es ist also gar kein Winkel oder er ist = Null. Es ist daher natürlich, daß er kleiner als jeder noch so kleine, geradlinige Winkel ist, welcher größer als Null ist. Durch alle Bogen aber, die man zwischen die Tangente und den Kreis durch den Berührungspunkt ziehen mag, wird der Berührungswinkel nicht zertheilt, sondern bleibt bei allen derselbe, nämlich = Null, indem die Elemente aller dieser Bogen an der Stelle, wo sie zusammentreffen, einerlei Richtung, die der Tangente selbst, haben. Nur ihre andern Elemente haben, so wie sie sich von dem Berührungspunkte entfernen, eine verschiedene Neigung gegen die Tangente, und in der Größe dieser Neigung kann allerdings eine unendliche Verschiedenheit Statt haben, weshalb an dieselbe Tangente eine unendliche Menge von Bogen gezogen werden können. Hieraus folgt:

1) An einem Punkte, A, der Peripherie ist nur eine einzige Tangente möglich.

2) Eine gerade Linie kann einen Kreis nur in zwei Punkten schneiden.

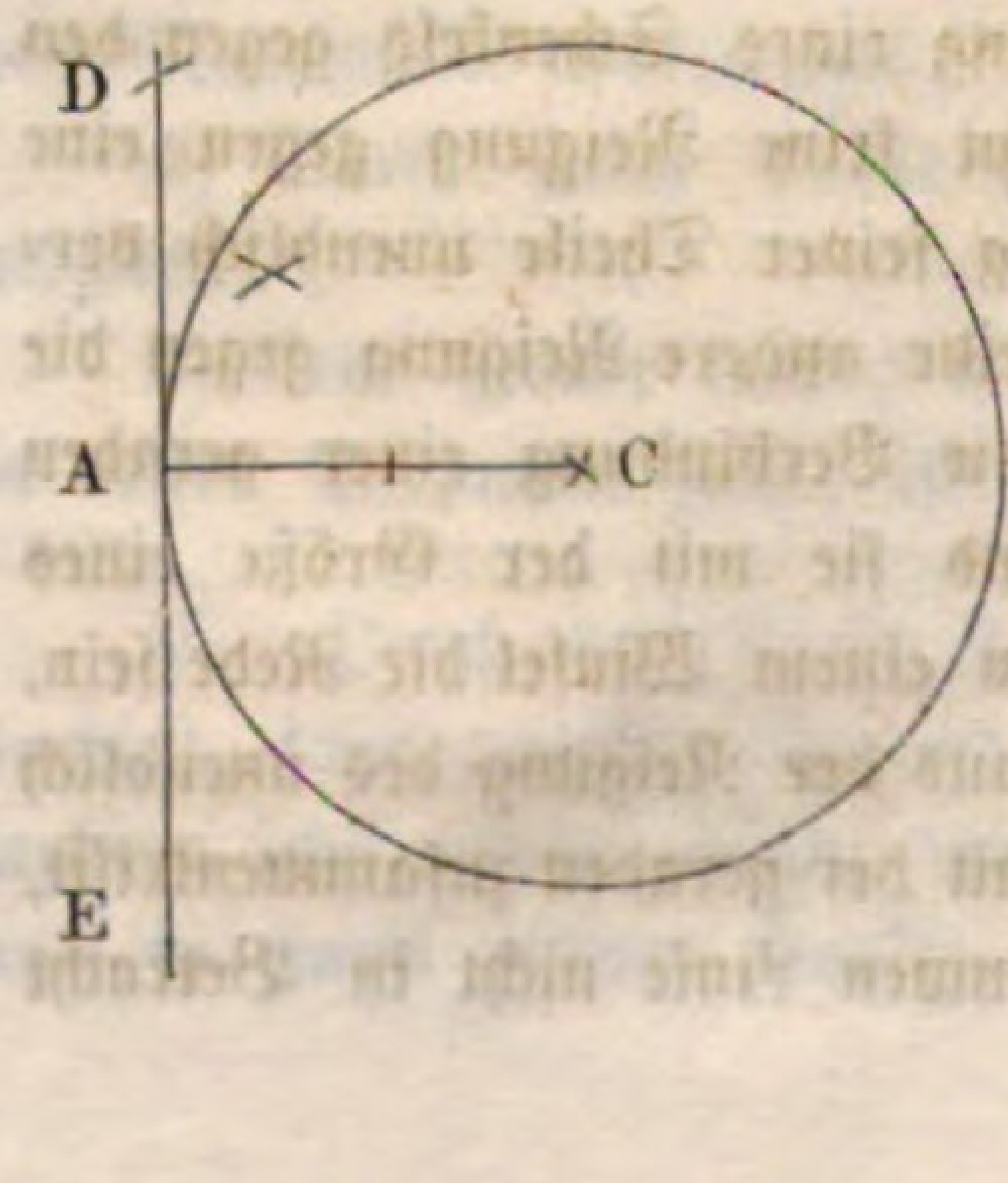
3) So wie der Halbmesser auf der Tangente im Berührungspunkte senkrecht steht, so kann er auch auf dem Element des Bogens, dessen Richtung durch die Tangente bestimmt ist, als senkrecht stehend angesehen werden.

§. 5.

Aufgaben.

I. An einen gegebenen Punkt A eines Kreises eine Tangente zu ziehen.

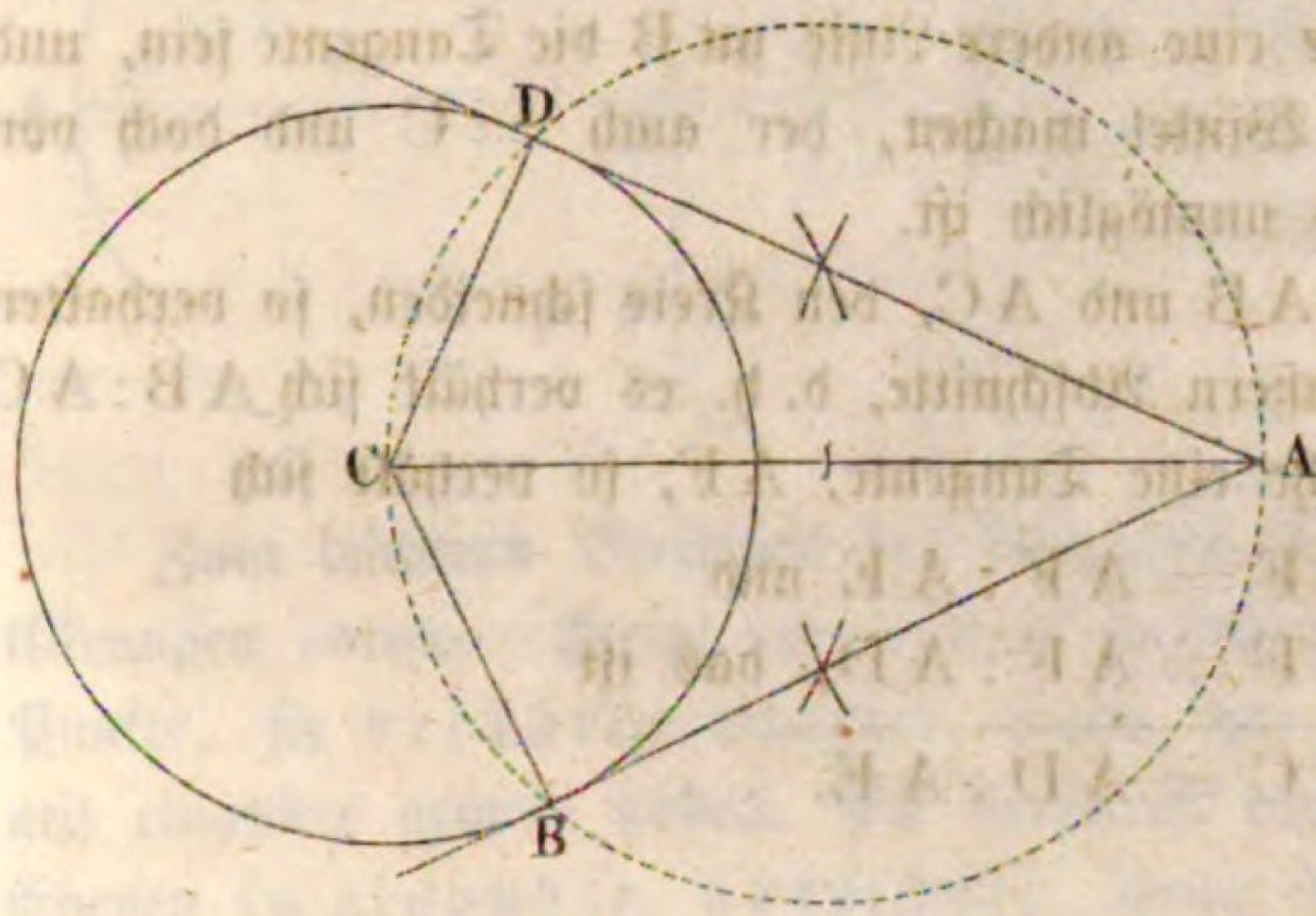
Auflösung:



Man ziehe den Halbmesser CA und errichte in A ein Perpendikel DE auf demselben, so ist dieses die verlangte Tangente; denn ein Perpendikel, auf das Ende eines Durchmessers errichtet, ist eine Tangente am Kreise.

II. Von einem Punkte, A, außerhalb des Kreises eine Tangente an den Kreis zu ziehen.

Auflösung:



Man ziehe von A nach dem Mittelpunkte eine gerade Linie AC, um dieselbe beschreibe man einen Kreis, ABCD, und durch die Punkte B und D, in welchen beide Kreise einander schneiden, ziehe man AD und AB, so sind diese die gesuchten Tangenten.

Beweis:

Man ziehe die Sehnen CD und CB, so ist der Winkel ABC = ADC, folglich AB senkrecht auf CB, AD senkrecht auf CD und CD und CB sind Halbmesser des Kreises, also AB und AD Tangenten am Kreise.

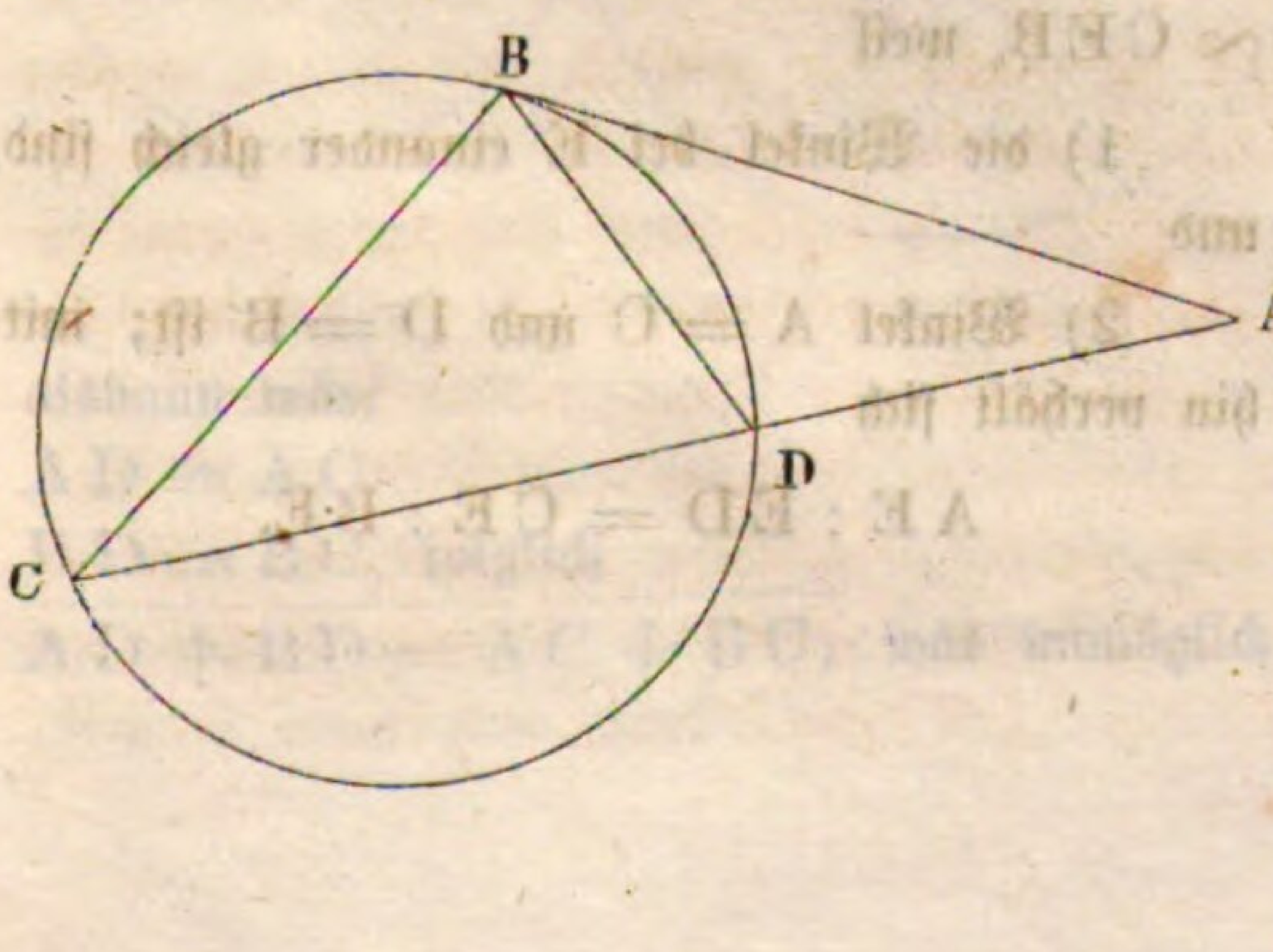
Das Dreieck ABC ist ≅ ADC und daher AB = AD; ebenso ist ∢ BAC = DAC; es sind also von einem Punkte, A, außerhalb des Kreises zwei Tangenten an dem Kreise möglich, welche beide einander gleich sind; und der Winkel, den sie einschließen, wird durch die gerade Linie nach dem Mittelpunkte halbirt.

§. 6.

Lehrsätze:

I. Wenn von einem Punkte, A, außerhalb des Kreises zwei gerade Linien AB und AC, nach dem Kreise gehen, von welchen die erstere ihn berührt, die letztere ihn schneidet; so ist die Tangente AB die mittlere Proportionallinie zwischen der andern Linie AC und ihrem äußern Abschnitt AD.

Beweis:



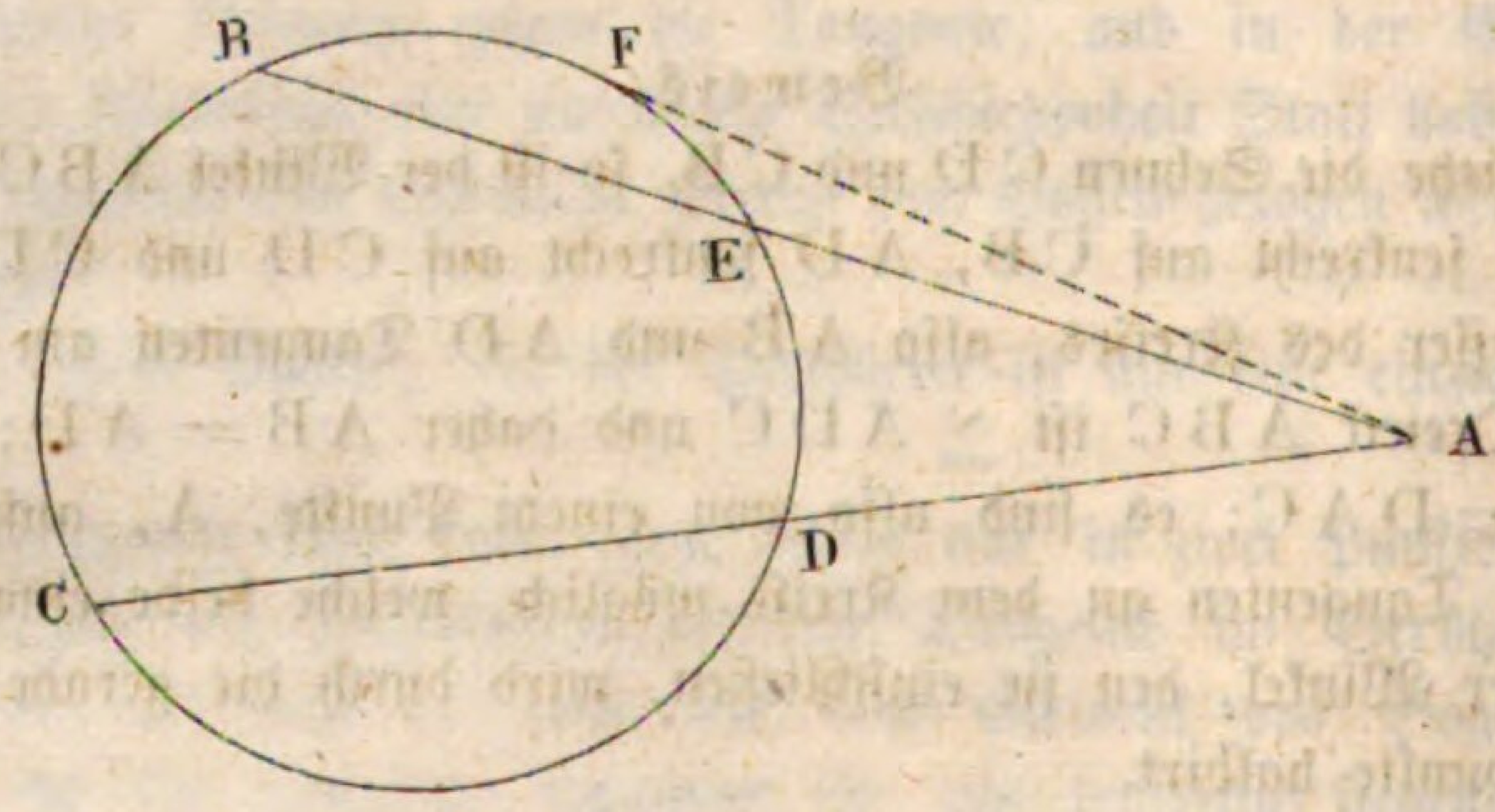
Man ziehe BC und BD, so ist das △ ABC ∼ ABD, weil der Winkel A beiden Dreiecken gemein und Winkel C = ABD ist, was im folgenden Abschnitt bewiesen werden soll; folglich verhält sich AC : AB = AB : AD.

Wenn sich umgekehrt verhält: A C : A B = A B : A D, so ist A B eine Tangente; denn es ist alsdann nach dem II. Satze von der Aehnlichkeit der Dreiecke Dreieck A B C ∾ A B D, mithin der Winkel A B D = C. Wäre nun A B keine Tangente, so müßte eine andere Linie an B die Tangente sein, und diese müßte mit B D einen Winkel machen, der auch = C und doch von A B D verschieden wäre, was unmöglich ist.

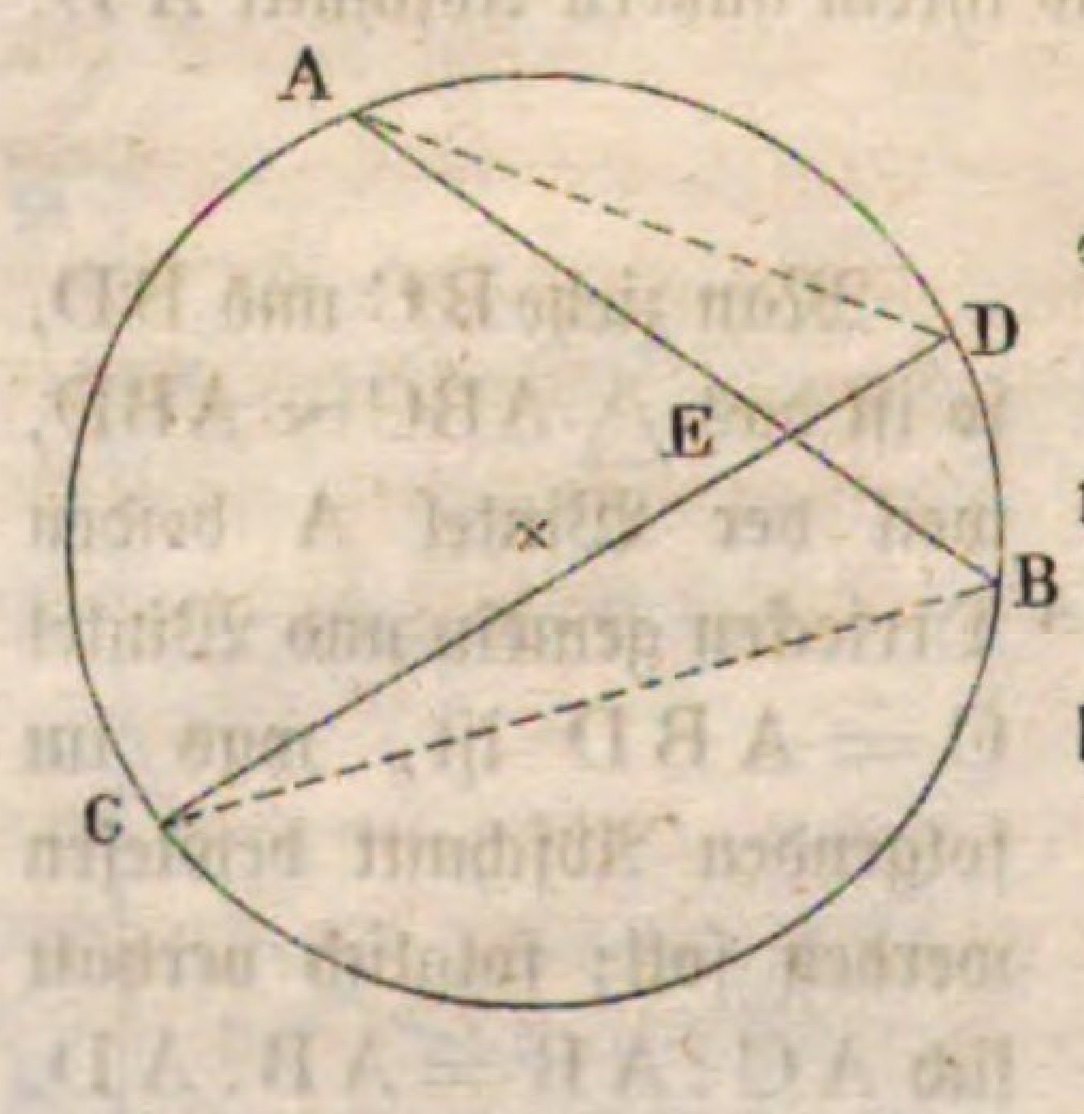
Wenn aber beide Linien A B und A C, den Kreis schneiden, so verhalten sie sich umgekehrt, wie ihre äußern Abschnitte, d. h. es verhält sich A B : A C = A D : A E; denn man ziehe eine Tangente, A F, so verhält sich

A B : A F = A F : A E und
A C : A F = A F : A D, das ist

A B : A C = A D : A E.



II. Wenn zwei Sehnen, A B und C D, einander in E schneiden, so stehen die abgeschnittenen Theile im umgekehrten Verhältniß, d. h. es verhält sich A E : E D = E C : E B.



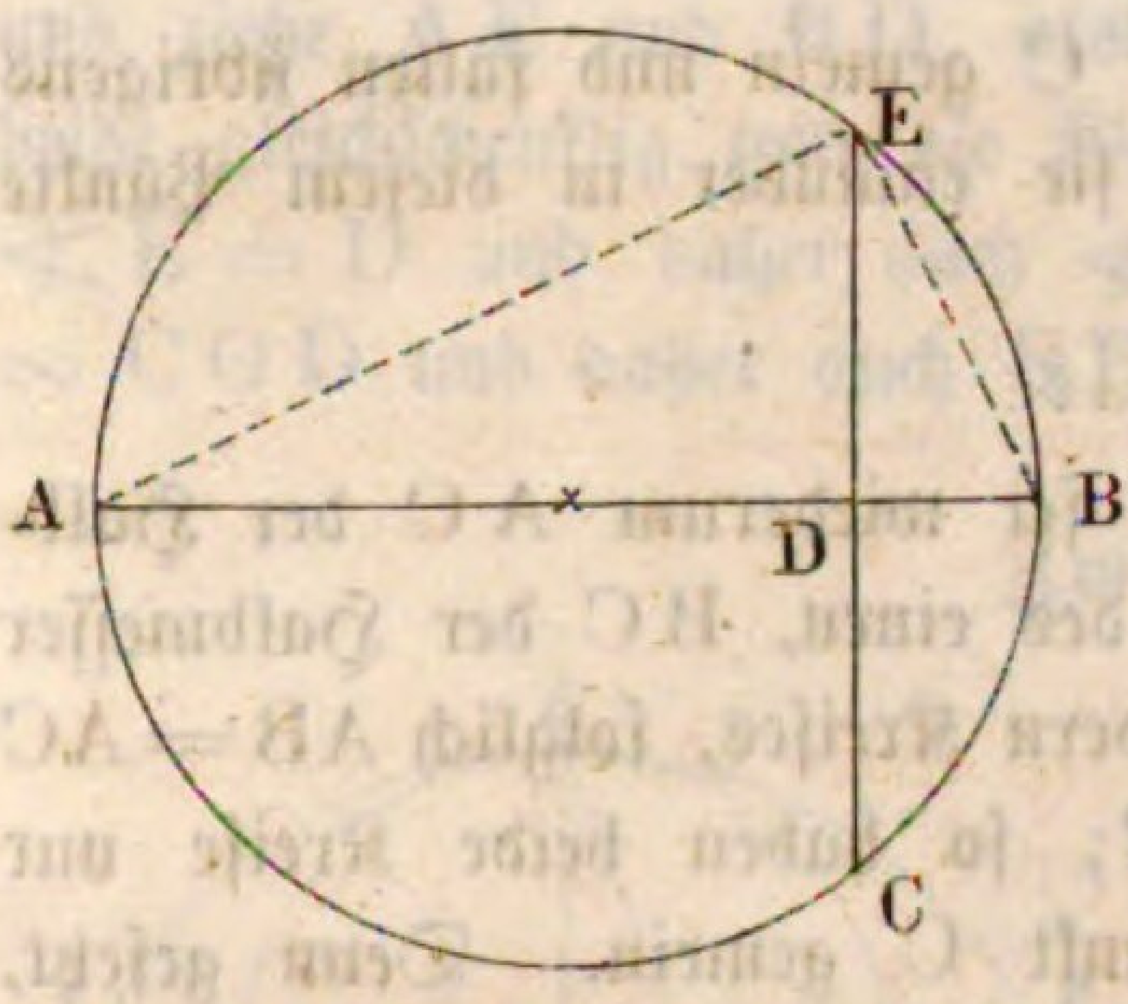
Beweis:

Man ziehe A D und C B, so ist △ A E D ∾ C E B, weil

1) die Winkel bei E einander gleich sind, und

2) Winkel A = C und D = B ist; mithin verhält sich

A E : E D = C E : B E.



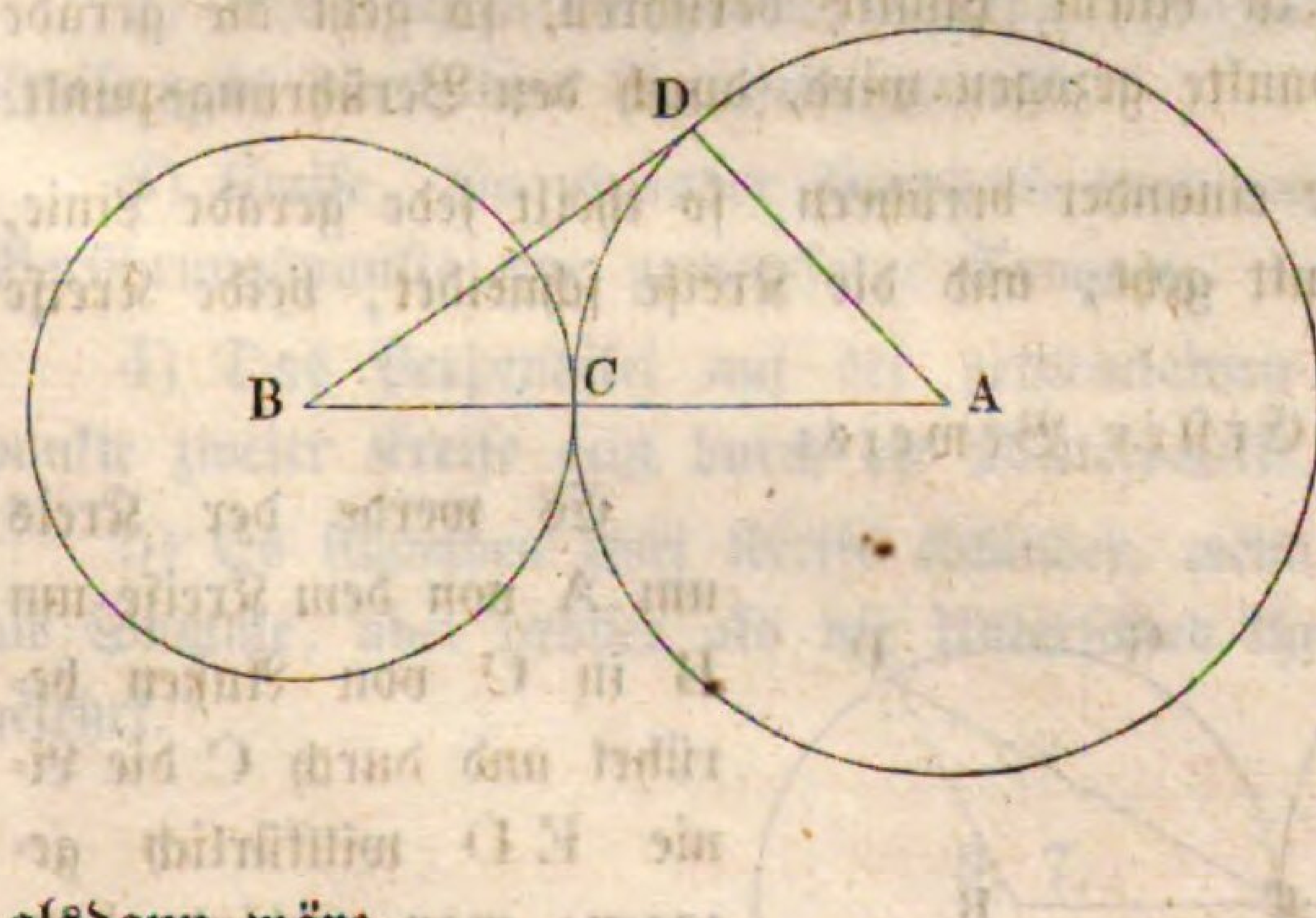
Wird die eine Sehne halbirt, so ist ihre Hälfte die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden Theilen der andern Sehne. Es ist z. B. E D die Hälfte der Sehne EC, und es verhält sich:

$$AD : ED = ED : DB.$$

Zum leichtern Verstehen der folgenden Lehrsätze schicken wir einige Erklärungen voraus: Kreise schneiden einander, wenn ihre Peripherien zwei Punkte, sie berühren einander, wenn ihre Peripherien nur einen Punkt mit einander gemein haben. Sie berühren einander innerhalb, wenn ihre Ebenen in einander, außerhalb, wenn ihre Ebenen neben einander liegen. Kreise sind concentrisch, wenn sie einerlei Mittelpunkt, und verschiedene Halbmesser haben, excentrisch, wenn sie verschiedene Mittelpunkte haben. Die gerade Linie, welche die Mittelpunkte excentrischer Kreise verbindet, heißt die Mittelpunktlinie oder Centrallinie.

III. Wenn die Mittelpunkte zweier Kreise um die Summe ihrer Halbmesser von einander abstehen, so berühren die Kreise einander von Außen, und wenn sie um die Differenz ihrer Halbmesser von einander abstehen, so berührt der eine Kreis den andern von Innen.

Erster Beweis:



Der eine Kreis sei um A mit dem Halbmesser AC, der andere um B mit dem Halbmesser BC beschrieben, so haben beide Kreise den Punkt C mit einander gemein und keinen weiter. Denn, gesetzt, es sollte D ein zweiter solcher Punkt sein, so ziehe man AD und BD;

alsdann wäre

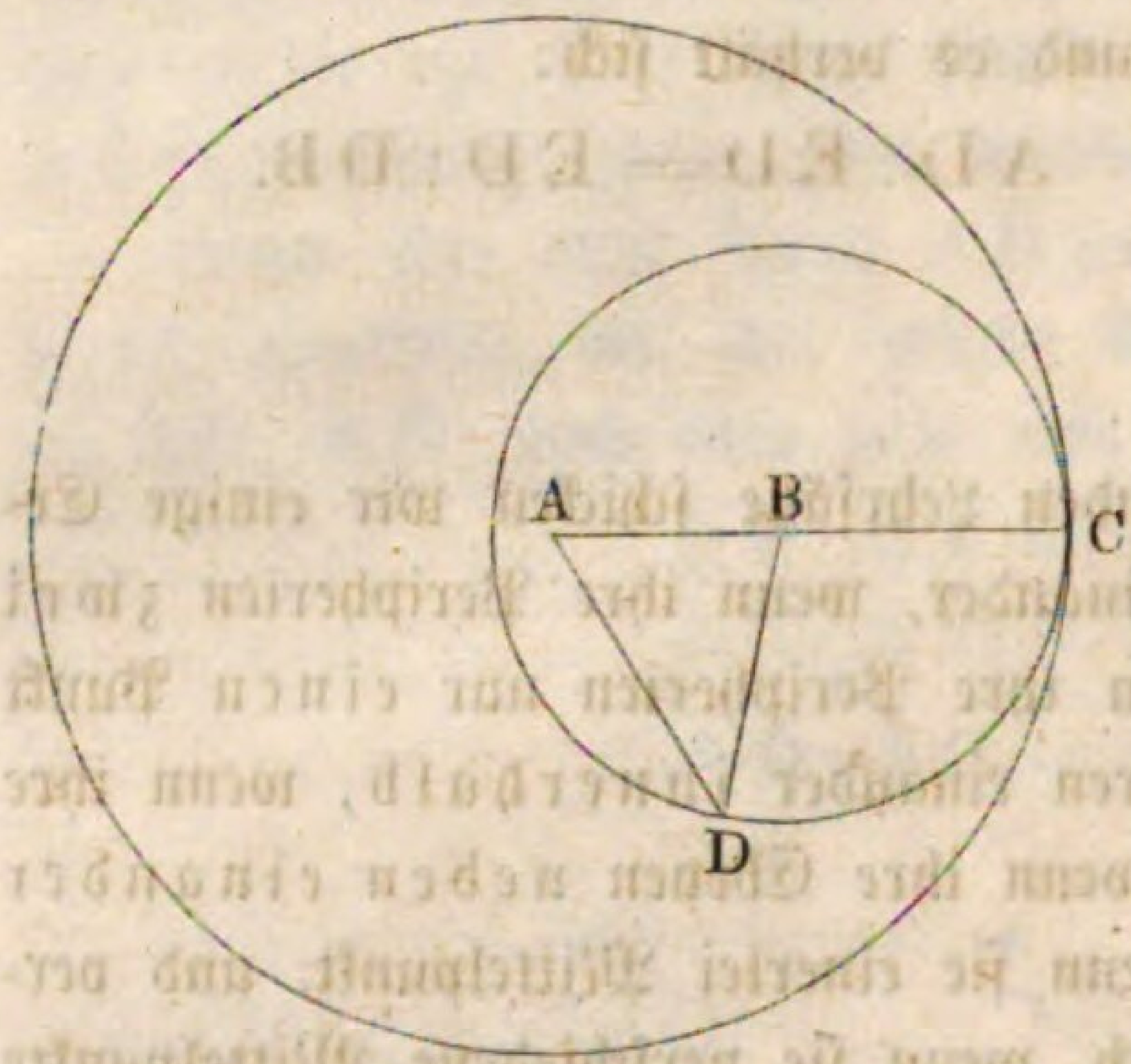
$AD = AC$

$BD = BC$, folglich

$AD + BD = AC + BC$, was unmöglich ist.

Beide Kreise haben also nur den Punkt C gemein und fallen übrigens ganz außerhalb einander; mithin berühren sie einander in diesem Punkte von Außen.

Zweiter Beweis:



Es sei wiederum AC der Halbmesser des einen, BC der Halbmesser des andern Kreises, folglich AB = AC — BC; so haben beide Kreise nur den Punkt C gemein. Denn gesetzt, es sollte D noch ein gemeinschaftlicher Punkt sein, so ziehe man AD und BD; alsdann wäre

$$AD = AC$$
$$BD = BC, \text{ folglich}$$
$$AD + BD = AC + BC, \text{ mithin}$$
$$AD = AC, \text{ was unmöglich ist.}$$

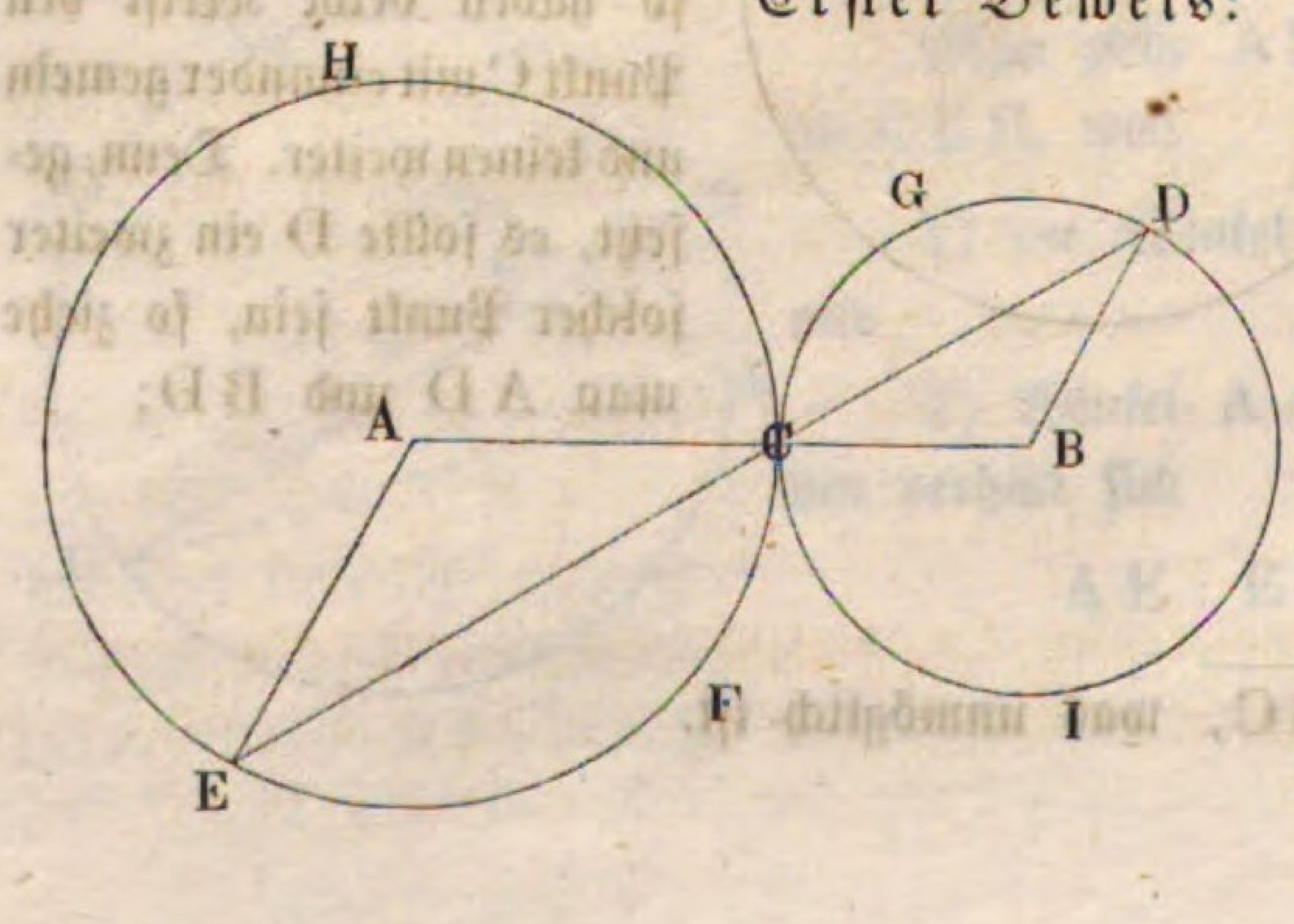
Beide Kreise haben also nur den Punkt C gemein, und der eine fällt ganz innerhalb des andern, also berührt er diesen von Innen.

Wenn man in der Linie AC, die man über A hin verlängern kann, noch andere Mittelpunkte annimmt und um dieselben mit einer Eröffnung des Zirkels, die bis C geht, Kreise beschreibt, so berühren alle diese einander in C. Es können daher unzählige Kreise einander in demselben Punkte berühren. Ein Perpendikel durch C auf AC ist alsdann die gemeinschaftliche Tangente aller.

Wenn Kreise einander in einem Punkte berühren, so geht die gerade Linie, die durch ihre Mittelpunkte gezogen wird, durch den Berührungspunkt.

IV. Wenn zwei Kreise einander berühren, so theilt jede gerade Linie, die durch den Berührungspunkt geht, und die Kreise schneidet, beide Kreise in ähnliche Bogen.

Erster Beweis:



Es werde der Kreis um A von dem Kreise um B in C von Außen berührt und durch C die Linie ED willkürlich gezogen; man verbinde darauf beide Mittelpunkte durch eine gerade Linie, AB, die nach dem vorhergehenden Satze auch durch C geht,

und ziehe A E und B D, alsdann ist das Dreieck A E C ∾ B C D, weil beide gleichschenklig und die Winkel bei C einander gleich sind, folglich auch ∢ E = D und daher auch ∢ A = B ist; mithin ist der Bogen E F C ∾ C G D und daher auch E H C ∾ C I D.

Zweiter Beweis:



Es werde der Kreis um A von dem Kreise um B in C von Innen berührt und durch C die Linie C E willkürlich gezogen, die den einen innern Kreis in D schneidet; man ziehe darauf durch A und B die Linie A C, ebenso B D und A E; alsdann ist Dreieck A E C ∾ B D C, weil beide gleichschenklig sind und den Winkel C gemein haben, mithin auch D = E und daher auch A = B, folglich ist auch der Bogen E F C ∾ D G C und daher auch E H C ∾ D I C.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt:

C E : C D = A C : B C, d. h., die Sehnen zweier Kreise, die ähnlichen Bogen zugehören, verhalten sich wie die Halbmesser der Kreise.

Aus den beiden letzten Lehrsätzen folgt:

1) Kreise, die einander schneiden oder berühren, haben nicht einerlei Mittelpunkt.

2) Die Centrallinie zweier, einander innerhalb oder außerhalb berührender Kreise geht durch den Berührungspunkt.

3) Kreise, die einander innerhalb oder außerhalb berühren, haben im Berührungspunkte eine gemeinsame Tangente.

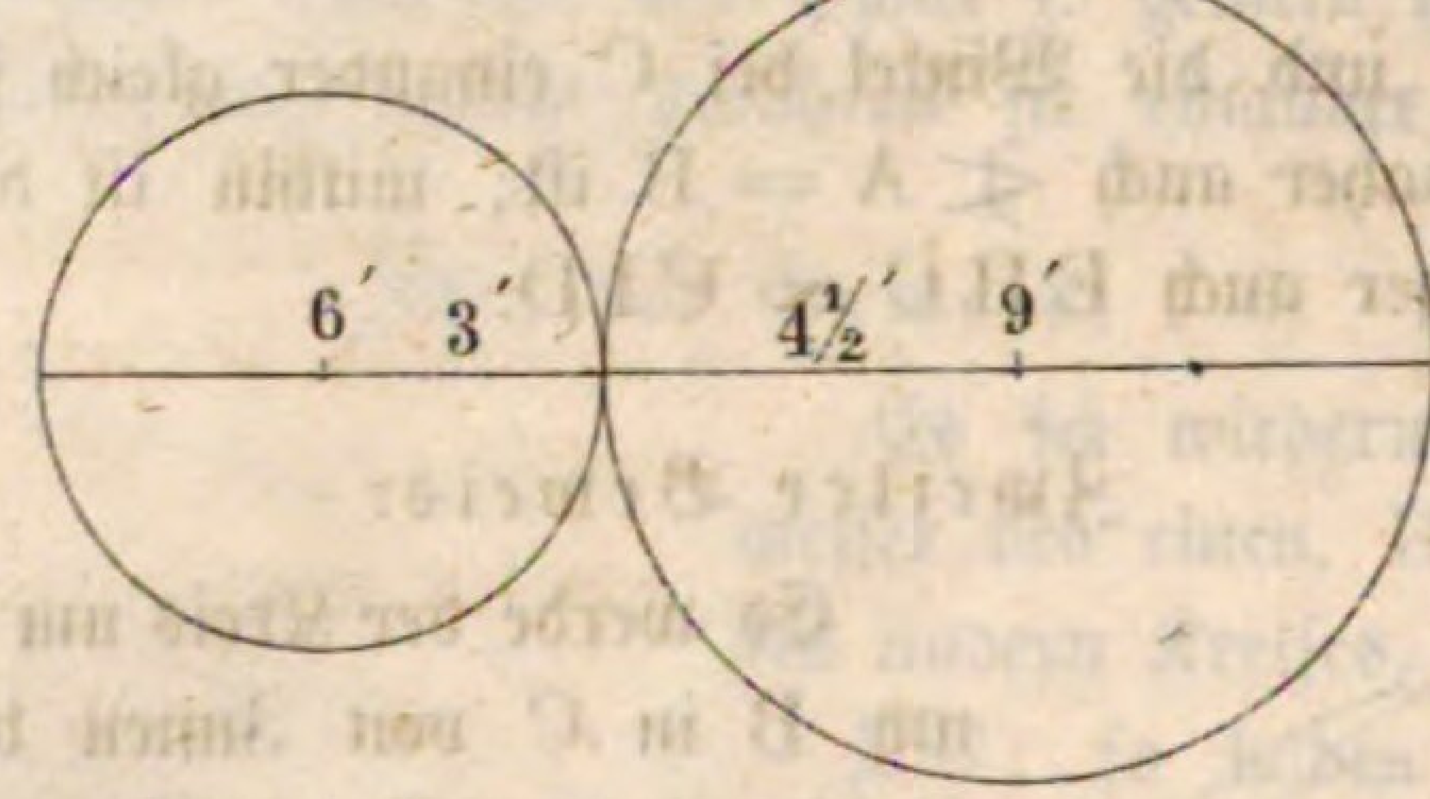
4) Das Perpendikel auf der gemeinsamen Tangente im Berührungspunkte zweier Kreise geht durch die Mittelpunkte.

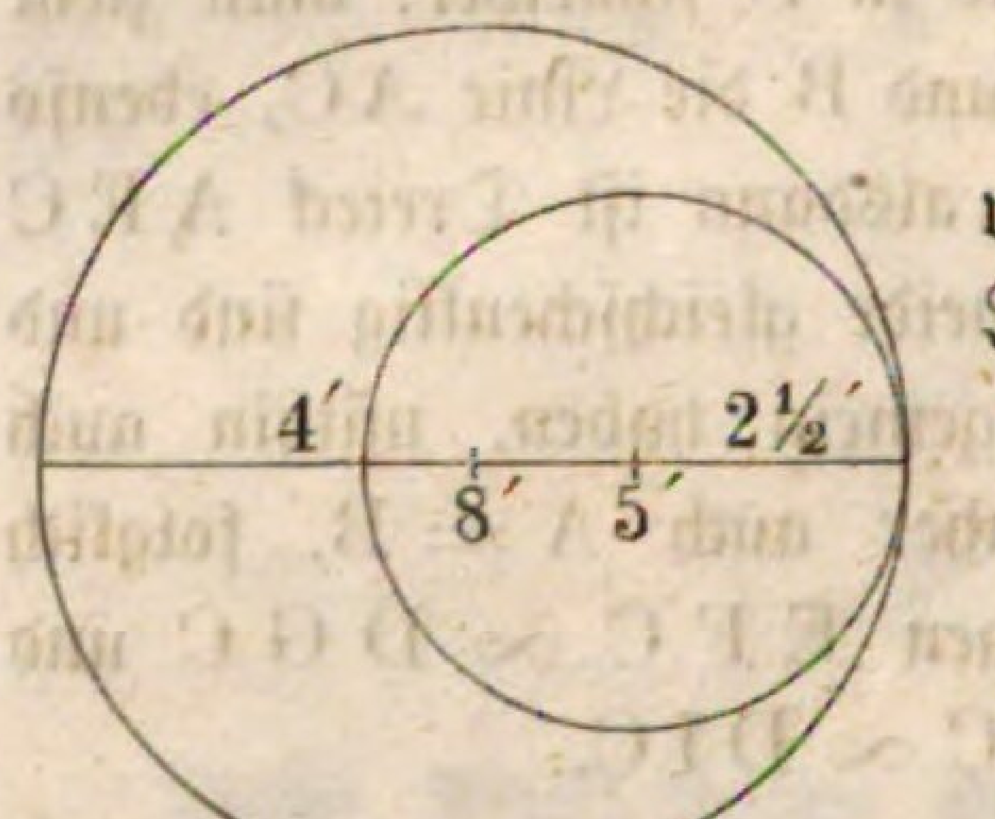
5) Es schneiden zwei Kreise einander, wenn ihre Centrallinie kleiner als die Summe, aber größer als der Unterschied ihrer Halbmesser ist, und umgekehrt.

§. 7.

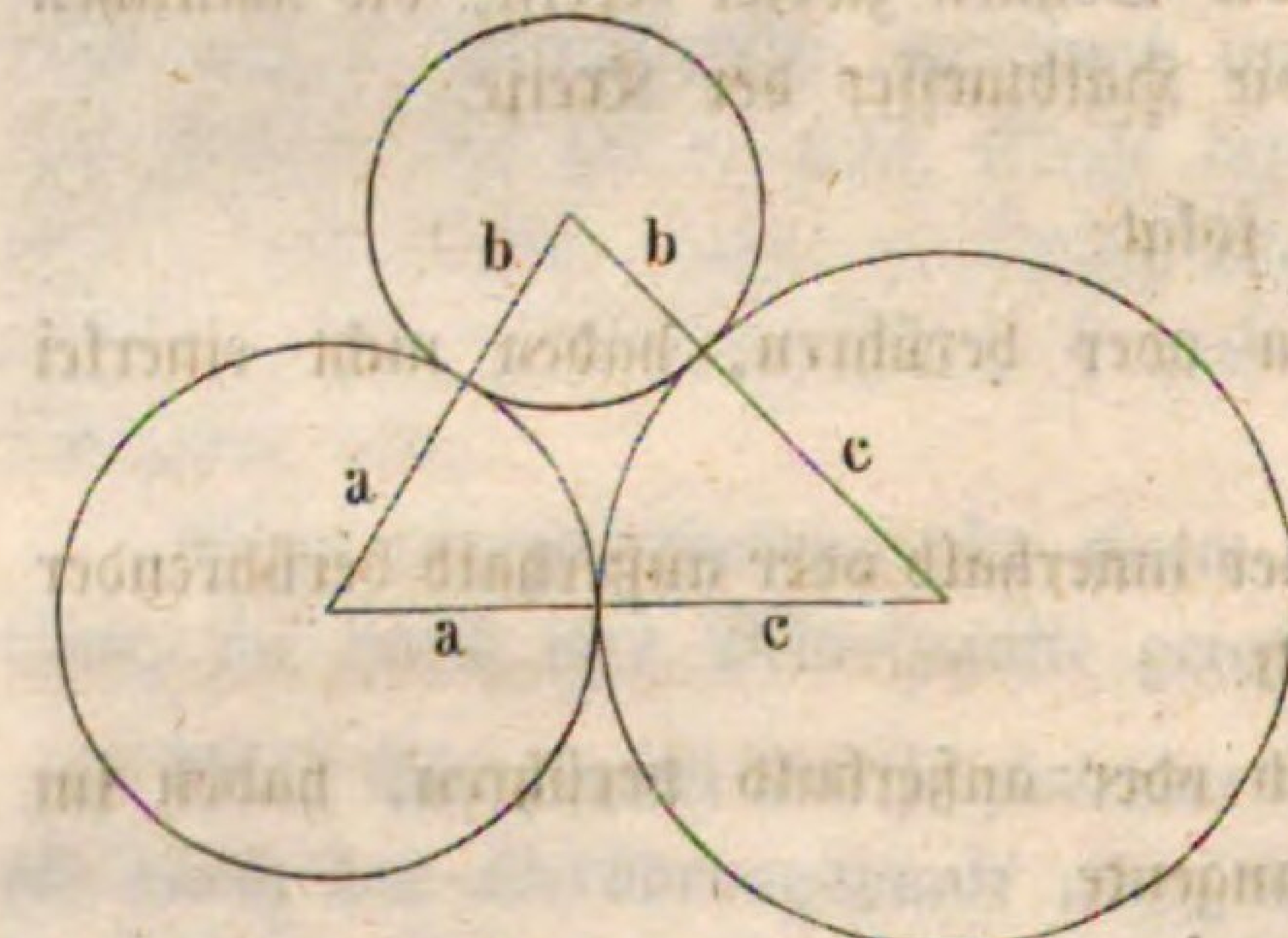
Aufgaben.

I. Lege zwei Kreise, welche einen Durchmesser von 6′ und 9′ haben, so hin, daß sie einander von Außen berühren!

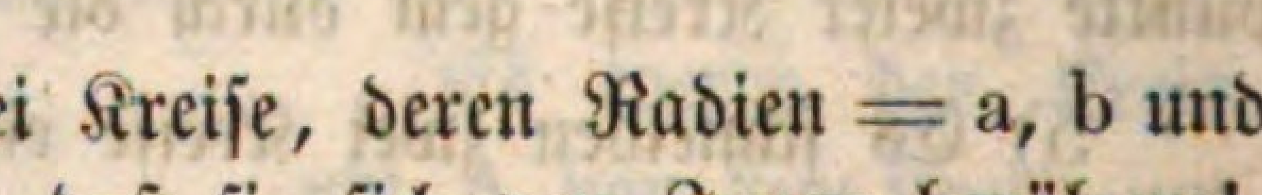


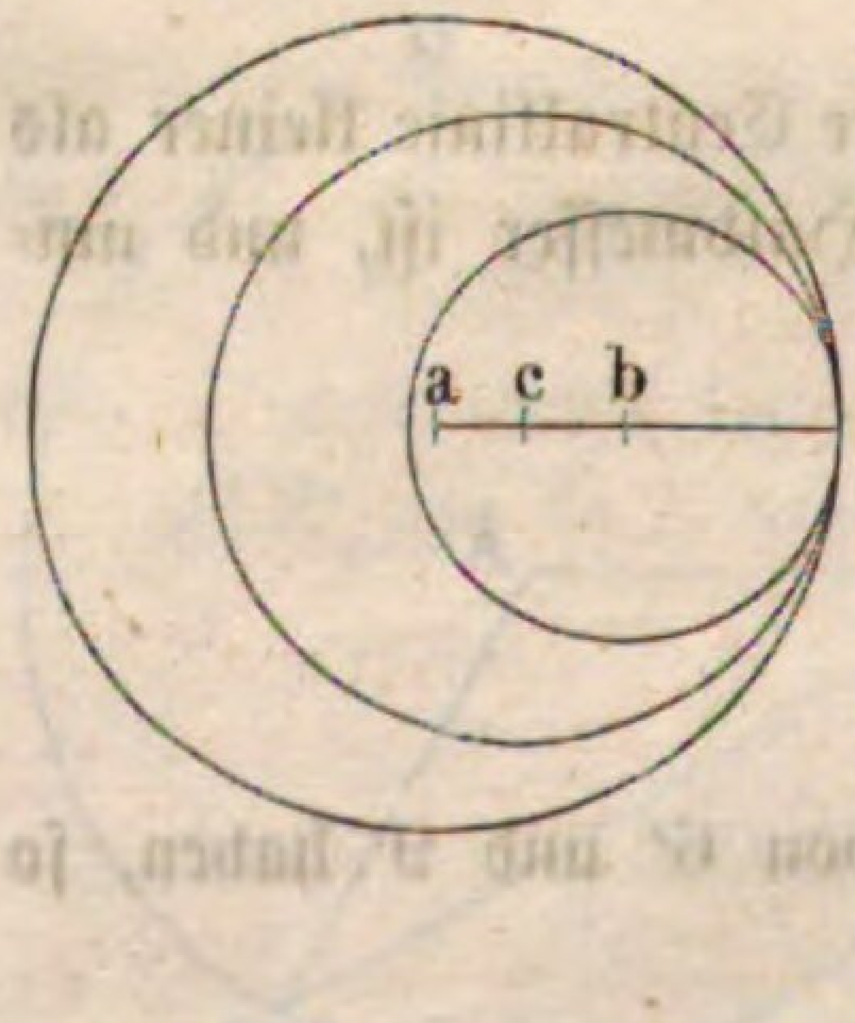


II. Lege zwei Kreise, welche einen Durchmesser von 5 und 8′ haben, so hin, daß sie sich von Innen berühren!



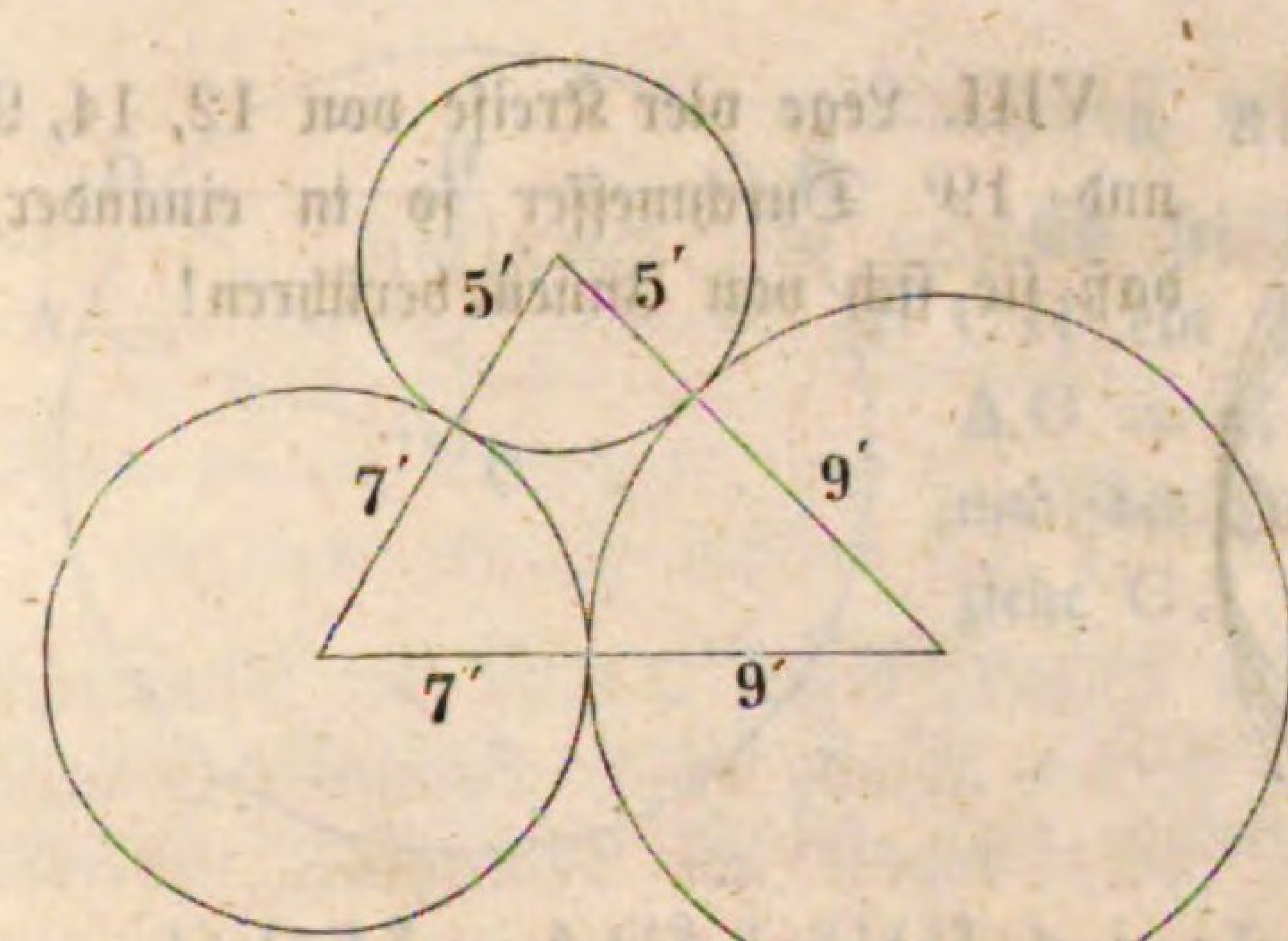
III. Lege drei Kreise, welche Radien = a, b und c haben, so neben einander, daß sie sich von Außen berühren!



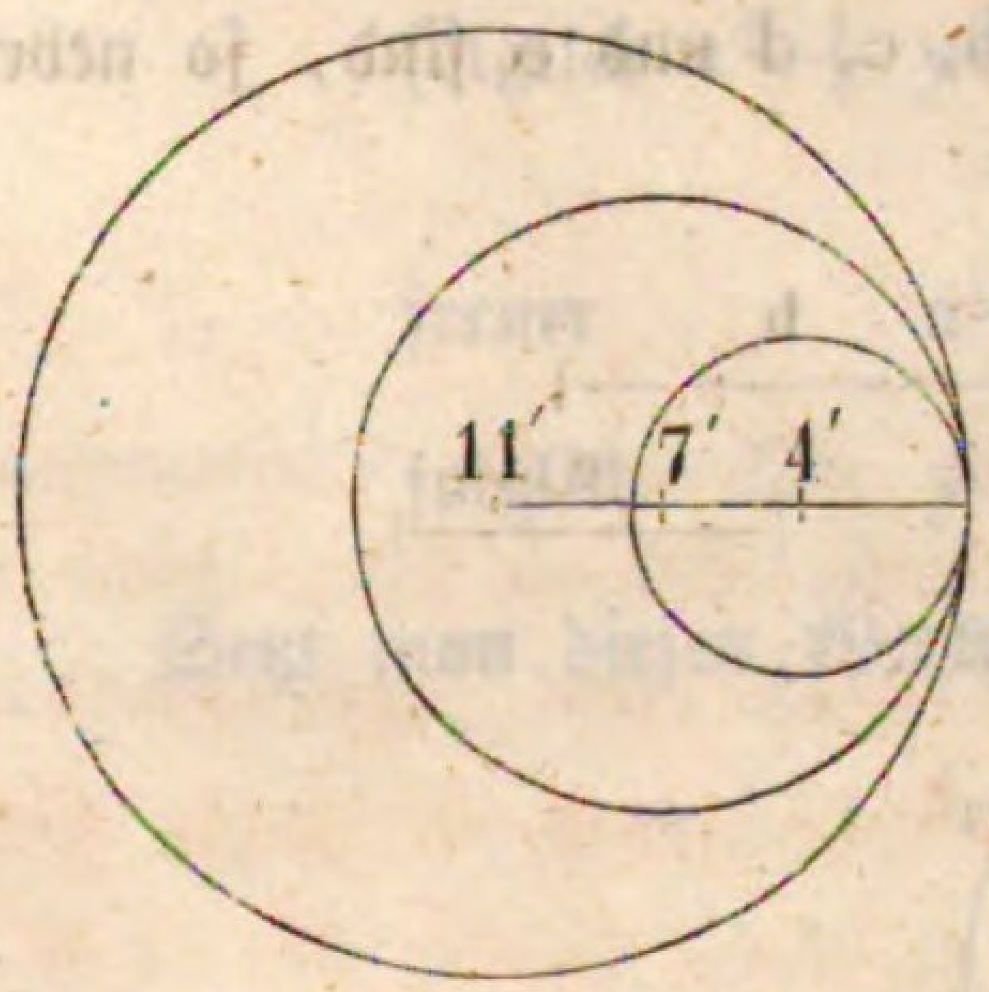


IV. Lege drei Kreise, deren Radien = a, b und c sind, so hin, daß sie sich von Innen berühren!

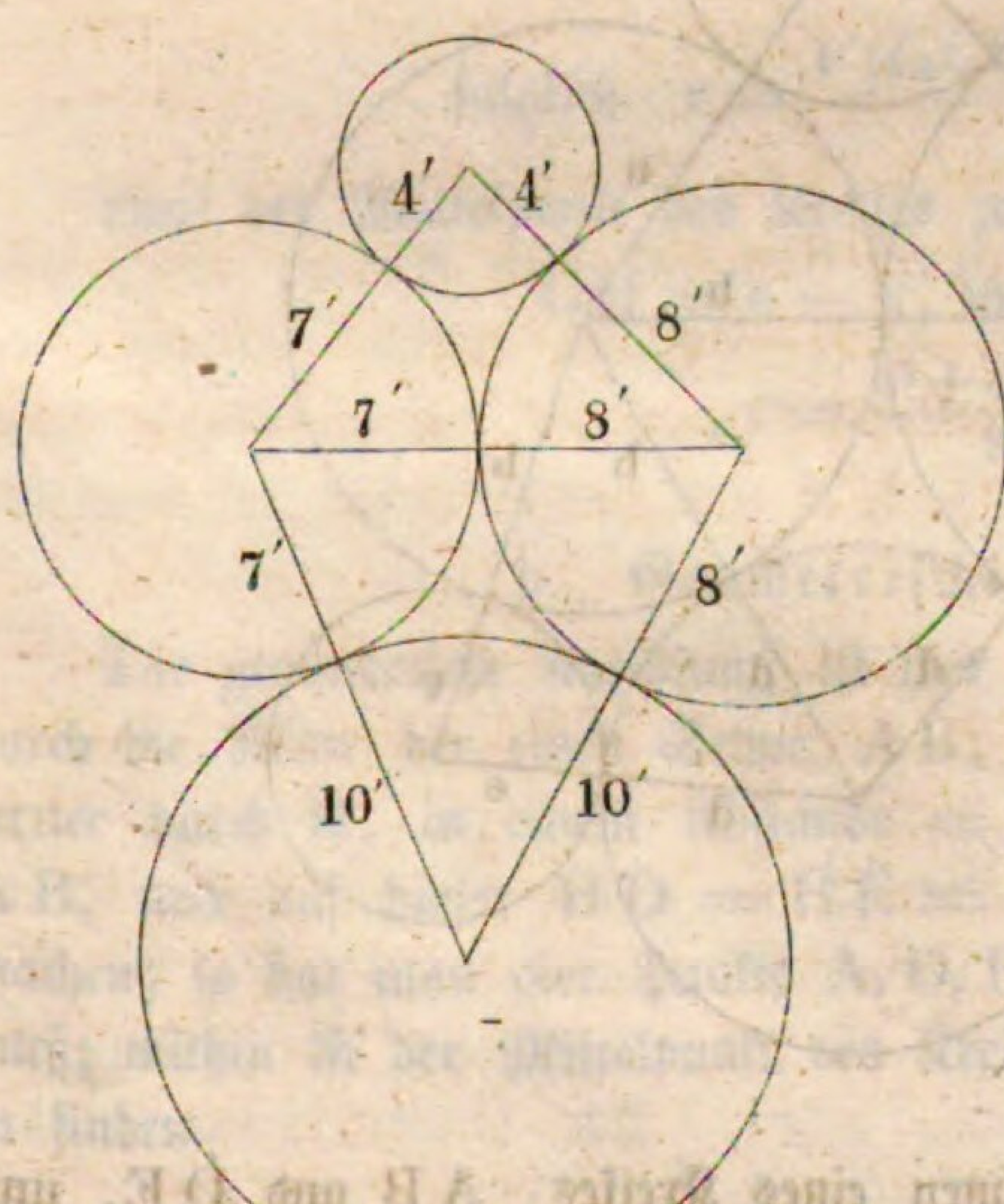




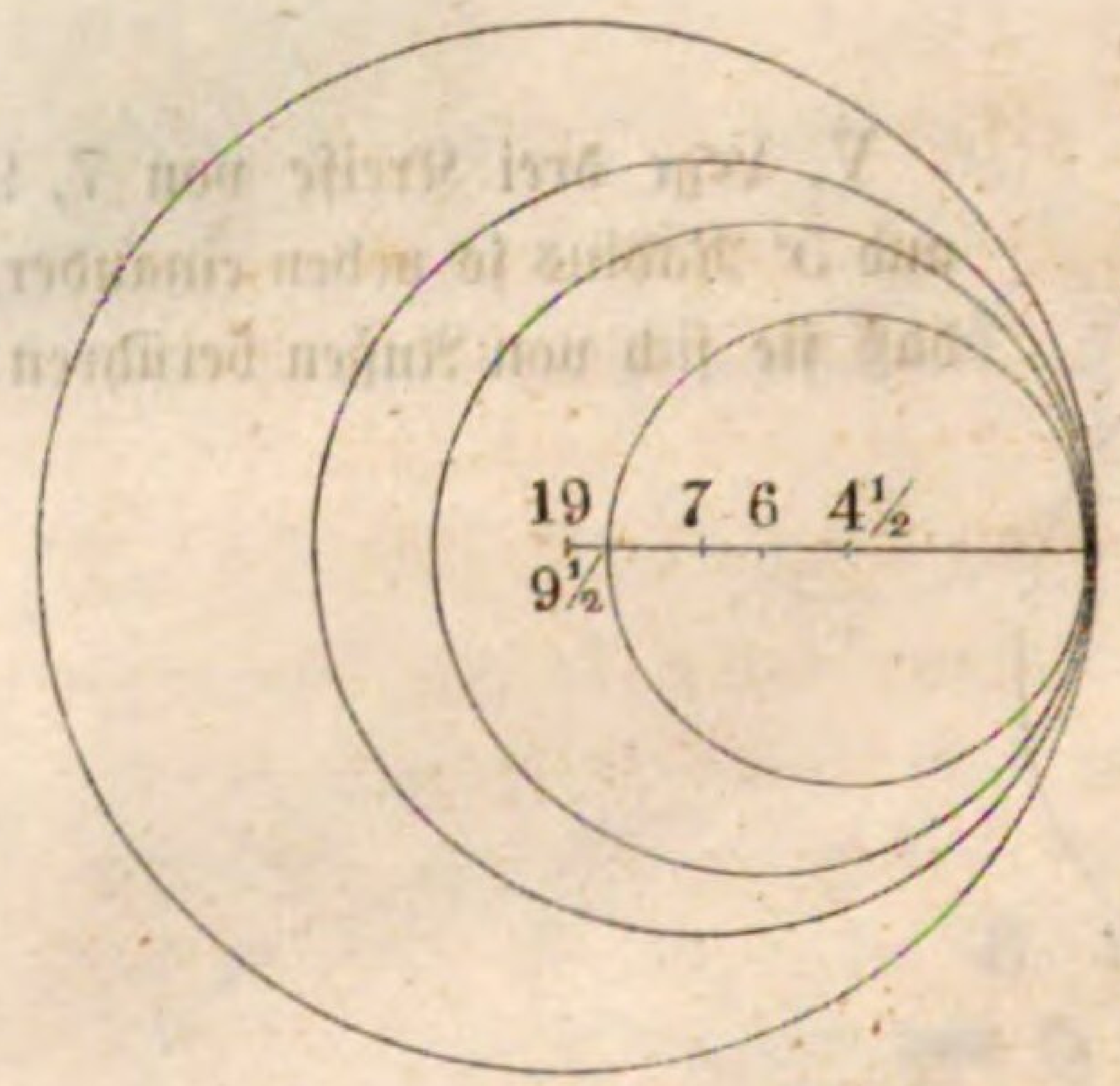
V. Lege drei Kreise von 7, 9 und 5′ Radius so neben einander, daß sie sich von Außen berühren!



VI. Lege drei Kreise, deren Radien 11, 7 und 4′ lang sind, so an einander, daß sie sich von Innen berühren!

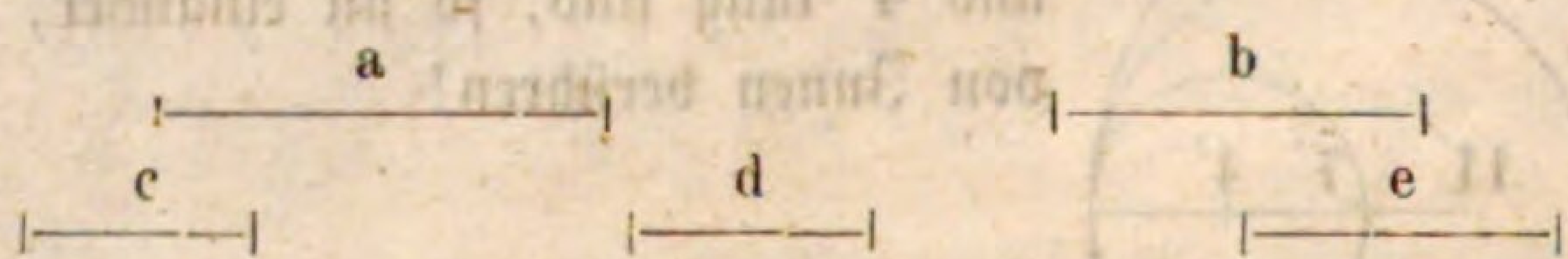


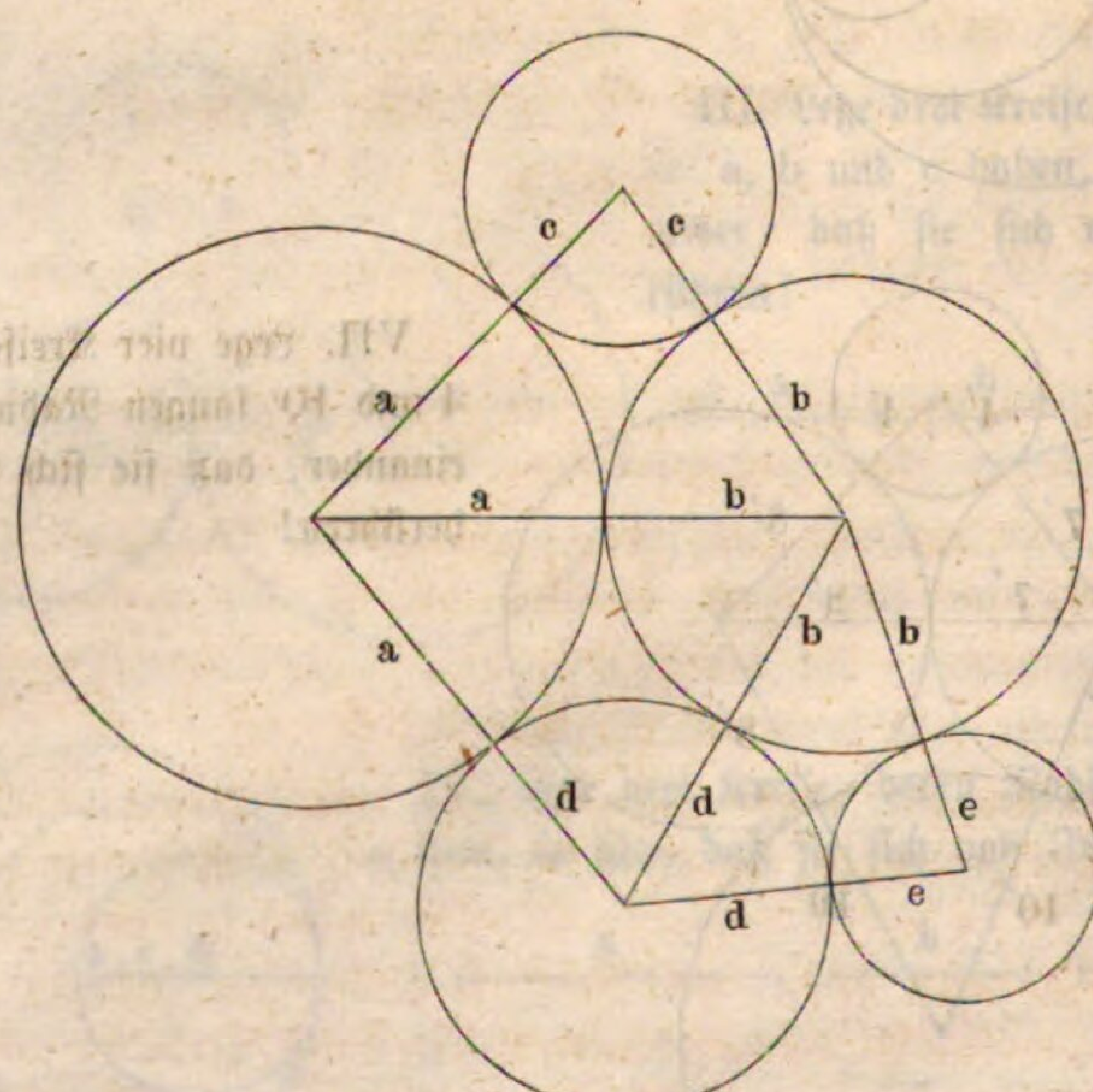
VII. Lege vier Kreise von 7, 8, 4 und 10′ langen Radien so neben einander, daß sie sich von Außen berühren!



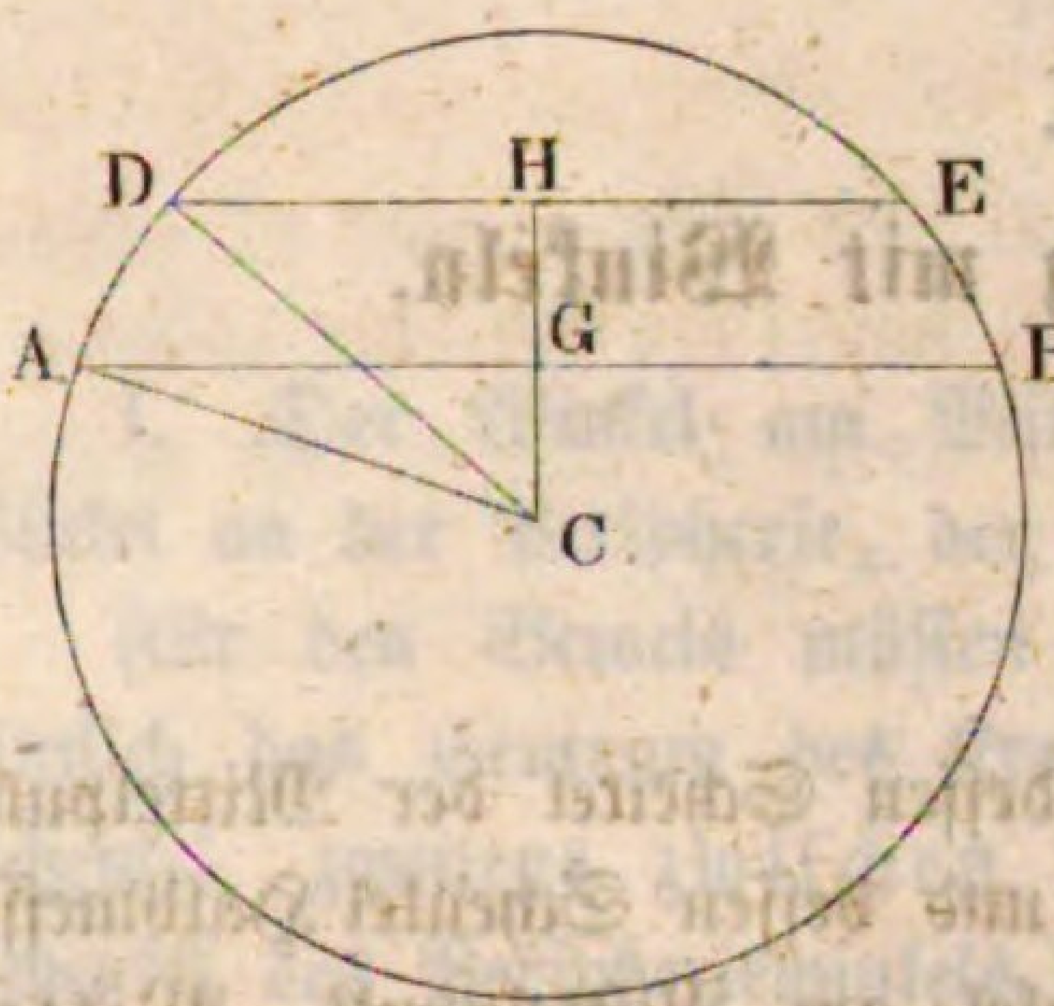
VIII. Lege vier Kreise von 12, 14, 9 und 19′ Durchmesser so in einander, daß sie sich von Innen berühren!

IX. Lege fünf Kreise, deren Radien a, b, c, d und e sind, so neben einander, daß sie sich von Außen berühren!





X. Aus zwei parallelen Sehnen eines Kreises, AB und DE, und ihrem Abstande, GH, den Halbmesser des Kreises zu finden.



a. Arithmetische Auflösung:

Es sei C der Mittelpunkt des Kreises, CH ein Perpendikel auf die Sehnen, und $AG = a$, $DH = b$, $GH = c$, $CG = y$ und der Halbmesser des Kreises $= r$; man ziehe CA und CD, so ist

1) $CA^2 = AG^2 + CG^2$, d. i. $r^2 = a^2 + y^2$

2) $CD^2 = DH^2 + CH^2$, d. i. $r^2 = b^2 + (y + c)^2$

$$\text{folglich } a^2 + y^2 = b^2 + (y + c)^2$$
$$= b^2 + y^2 + 2cy + c^2$$
$$\text{ferner } a^2 = b^2 + 2cy + c^2$$
$$\text{folglich } y = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}.$$

Setzt man diesen Werth für y in die Gleichung №. 1, so erhält man:

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2$$
$$= \frac{4a^2c^2 + (a^2 - b^2 - c^2)^2}{4c^2};$$
$$\text{folglich } r = \frac{\sqrt{[4a^2c^2 + (a^2 - b^2 - c^2)^2]}}{2c}$$

Liegt der Mittelpunkt des Kreises zwischen beiden Sehnen, so wird

$CH = c - y$, und daher

$$y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

b. Geometrische Auflösung:

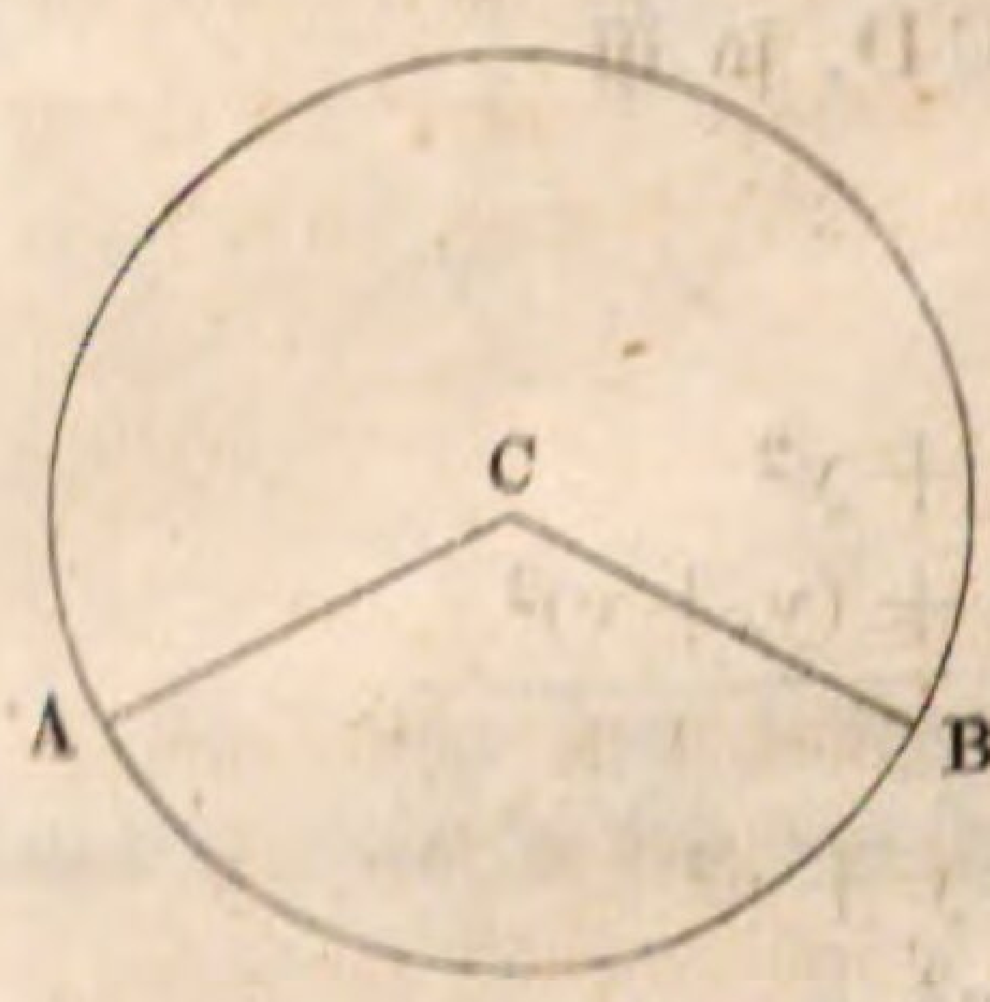
Die geometrische Auflösung ist hier sehr leicht; denn man braucht nur durch die Mitte der einen Sehne, AB, eine Linie CH senkrecht zu ziehen; ferner durch H, in einem Abstande $= GH$ von AB eine Parallele mit AB, und auf dieser $HD = HE =$ der Hälfte der anderen Sehne zu machen; so hat man vier Punkte A, D, E, B, durch welche der Kreis gehen muß; mithin ist der Mittelpunkt des Kreises aus dreien dieser Punkte leicht zu finden.

II. Abschnitt.

Der Kreis in Verbindung mit Winkeln.

§. 1.

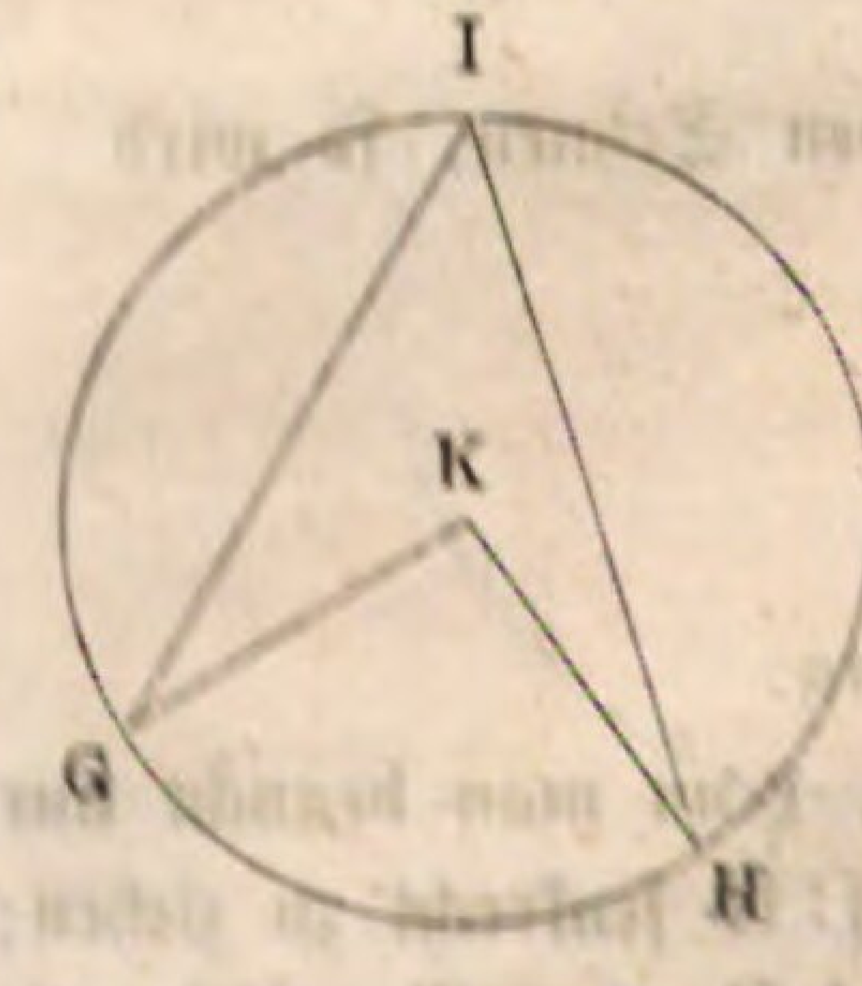
Einleitung.



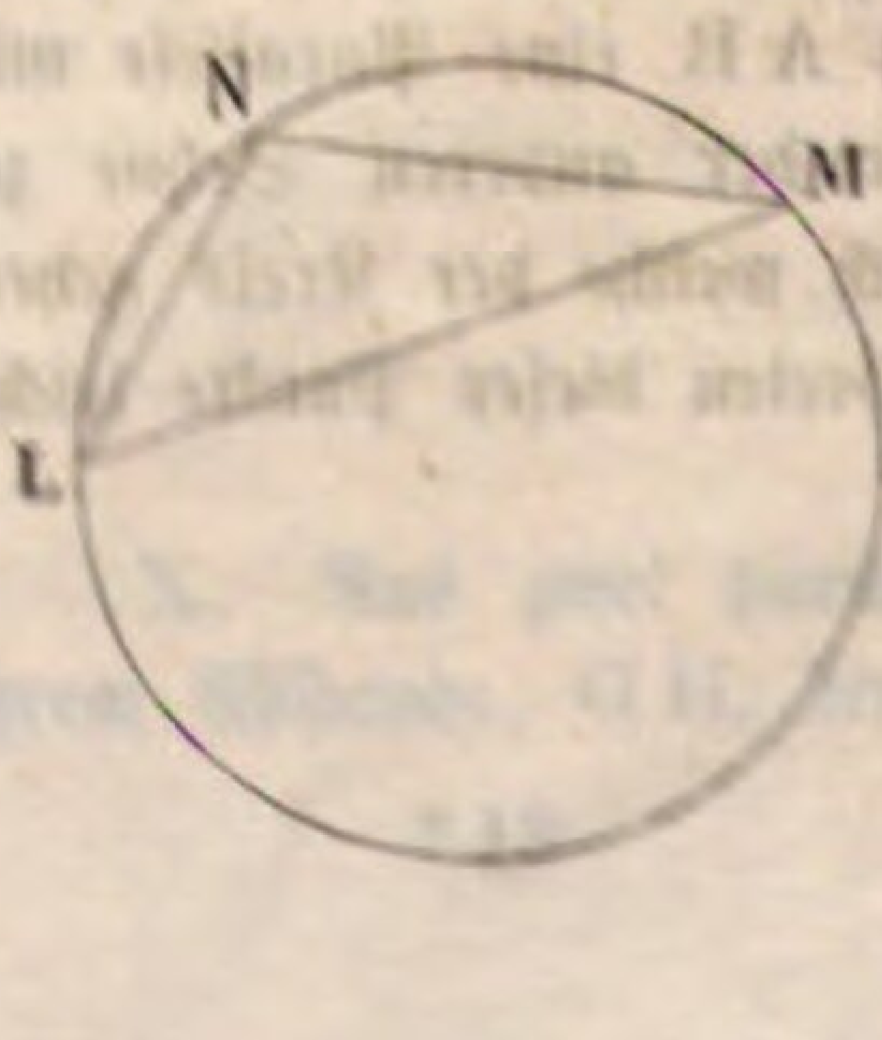
Ein Winkel, dessen Scheitel der Mittelpunkt eines Kreises ist und dessen Schenkel Halbmesser sind, heißt Winkel am Mittelpunkt, Mittelpunktwinkel oder Centriwinkel, z. B. A C B.



Ein Winkel, dessen Scheitel im Kreisumfange liegt, und dessen Schenkel Sehnen sind, heißt ein Winkel am Umkreise oder Peripheriewinkel, z. B. D E F.



Ein Winkel steht auf dem Bogen, durch dessen Endpunkte seine Schenkel gehen. Centri- und Peripheriewinkel können auf einerlei Bogen stehen, z. B. ∢ G K H und G I H stehen auf demselben Bogen G H.



Ein Winkel in einem Kreisabschnitt ist ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel durch die Endpunkte der Sehne, d. i. der Grundlinie des Segments, gehen. Der Kreisabschnitt L M N faßt z. B. einen solchen Winkel, L N M.

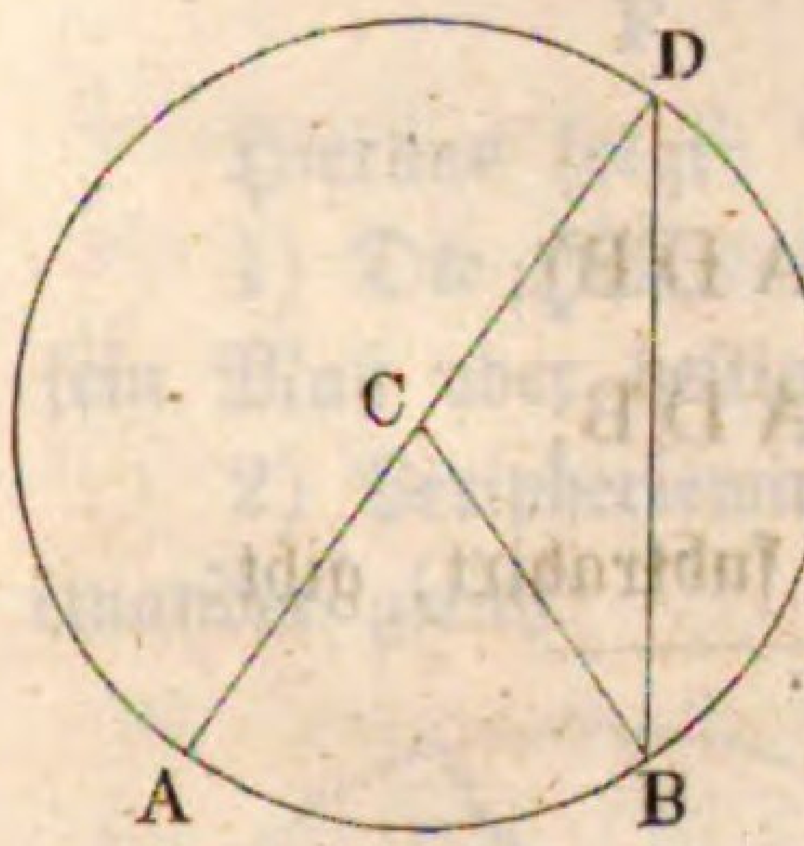
§. 2.

Lehrsätze.

I. Der Winkel am Mittelpunkte ist noch einmal so groß, als der Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf demselben Bogen steht.

Für den Beweis müssen wir hier drei Fälle unterscheiden: es kann nämlich das Centrum des Kreises oder der Centriwinkel erstens in einem Schenkel, zweitens zwischen den Schenkeln und drittens außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels liegen; daher:

Erster Beweis.



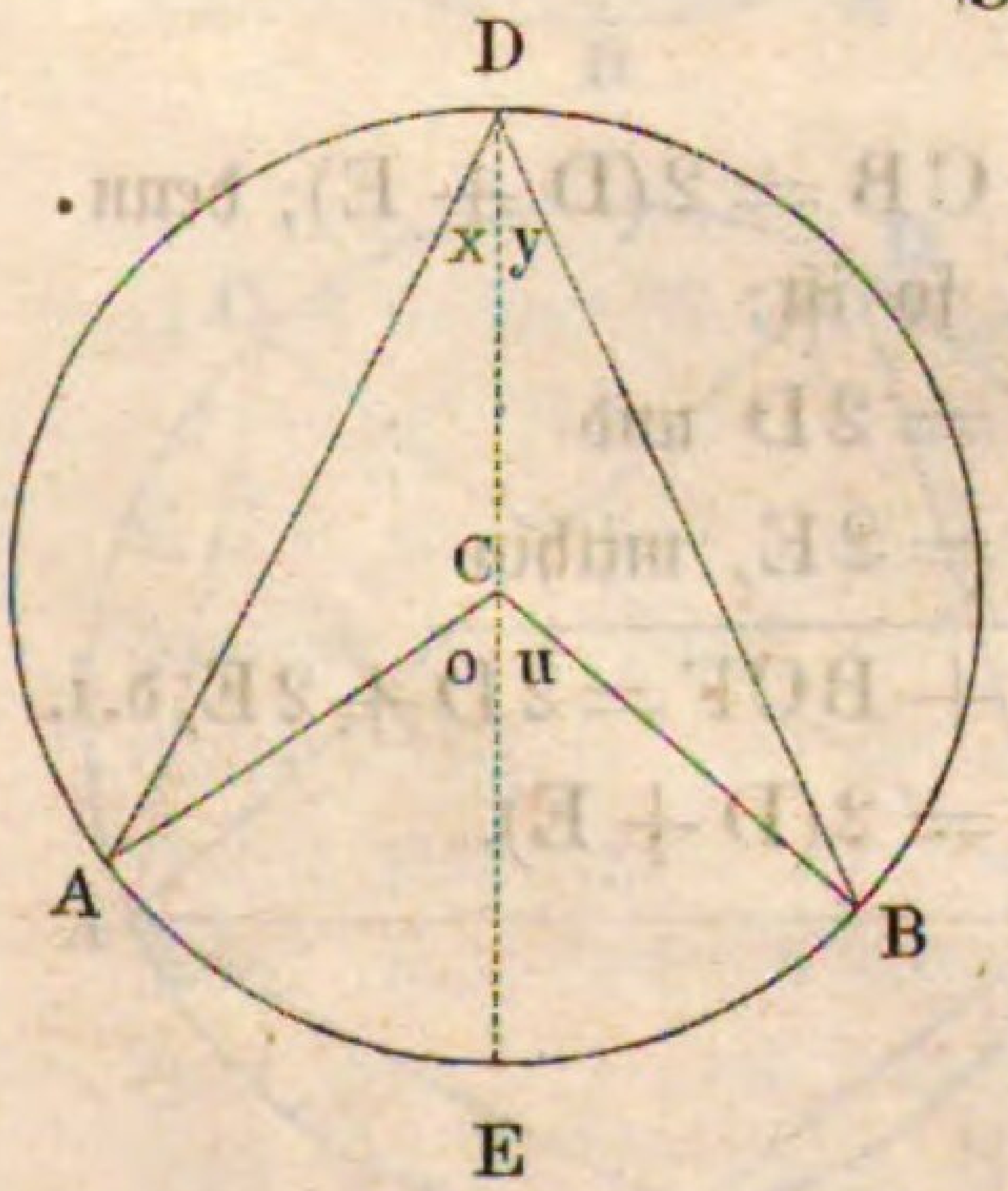
Es sei A C B der Winkel am Mittelpunkt, A D B der Winkel an der Peripherie, und das Centrum C falle in den einen Schenkel des letztern, so ist A C B als ein äußerer Winkel des gleichschenkeligen Dreiecks B D C anzusehen, und daher

$\sphericalangle$ A C B = B D C + D B C; ferner ist

$\sphericalangle$ B D C = D B C, folglich

$\sphericalangle$ A C B = B D C + B D C
= 2 B D C = 2 A D B.

Zweiter Beweis.

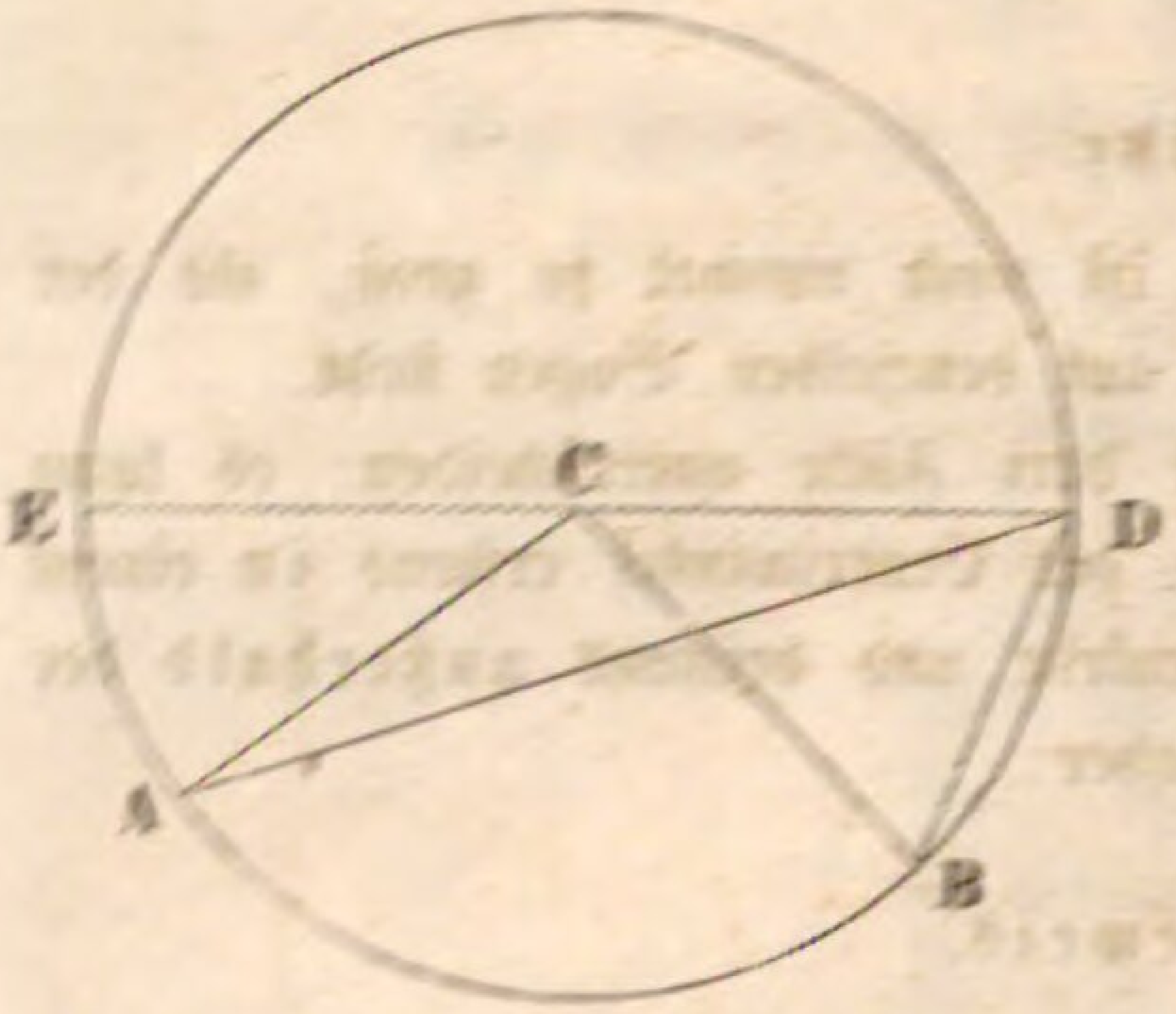


Es falle der Centriwinkel C zwischen die Schenkel des Peripheriewinkels, man ziehe durch D und C die gerade Linie D E, so ist:

$\sphericalangle$ o = 2 x
$\sphericalangle$ u = 2 y } nach №. 1, folglich

$\sphericalangle$ o + u = 2 x + 2 y = 2 (x + y), das ist
$\sphericalangle$ A C B = 2 A D B.

Dritter Beweis.



Es falle der Centriwinkel C außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels; man ziehe durch D und C die gerade Linie DE, so ist:

$\angle ECB = 2EDB$, das ist:

$\angle ECA + ACB = 2(EDA + 2ADB)$;

$= 2EDA + 2ADB$;

ferner ist $ECA = 2EDA$; dies subtrahirt, gibt:

$ACB = 2ADB$.

Aus diesem Lehrsatze lassen sich die nachfolgenden mit Leichtigkeit herleiten.

II. Wenn anstatt e i n e s Peripheriewinkels deren zwei oder mehrere sind, welche zusammen auf demselben Bogen stehen, auf welchem der Centriwinkel steht, so ist dieser noch ein Mal so groß, als jene zusammen genommen.

Erster Beweis.



Es ist $\angle ACB = 2(D + E)$; denn man ziehe CF, so ist:

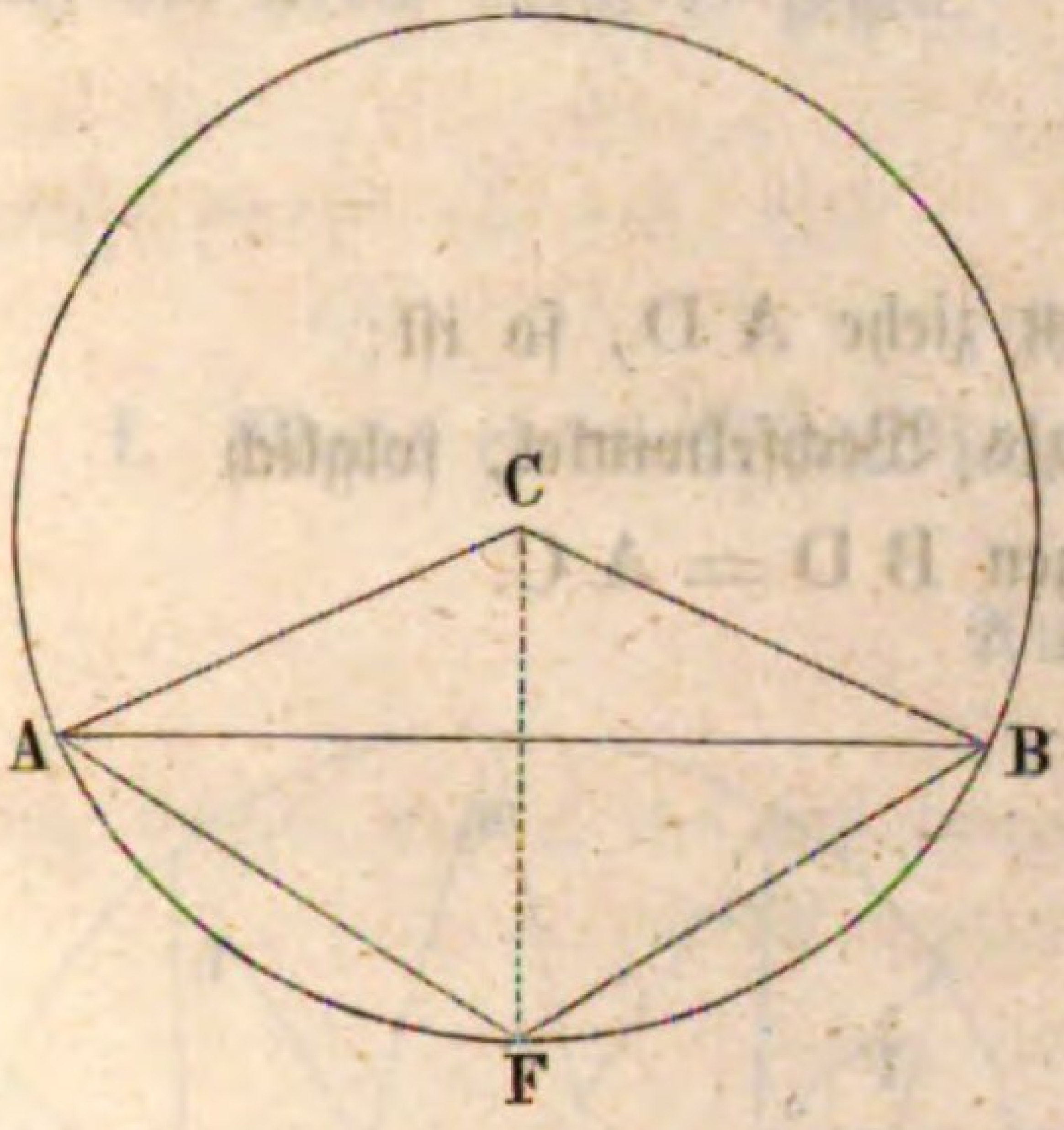
$\angle ACF = 2D$ und

$\angle BCF = 2E$, mithin

$\angle ACF + BCF = 2D + 2E$, d. i.

$\angle ACB = 2(D + E)$.

Zweiter Beweis.



Es ist $ACB = 2(ABF + BAF)$; denn man ziehe wieder CF, so ist:

$$\sphericalangle ACF = 2ABF \text{ und}$$
$$\sphericalangle BCF = 2BAF; \text{ folglich}$$
$$\sphericalangle ACF + BCF = 2ABF + 2BAF,$$

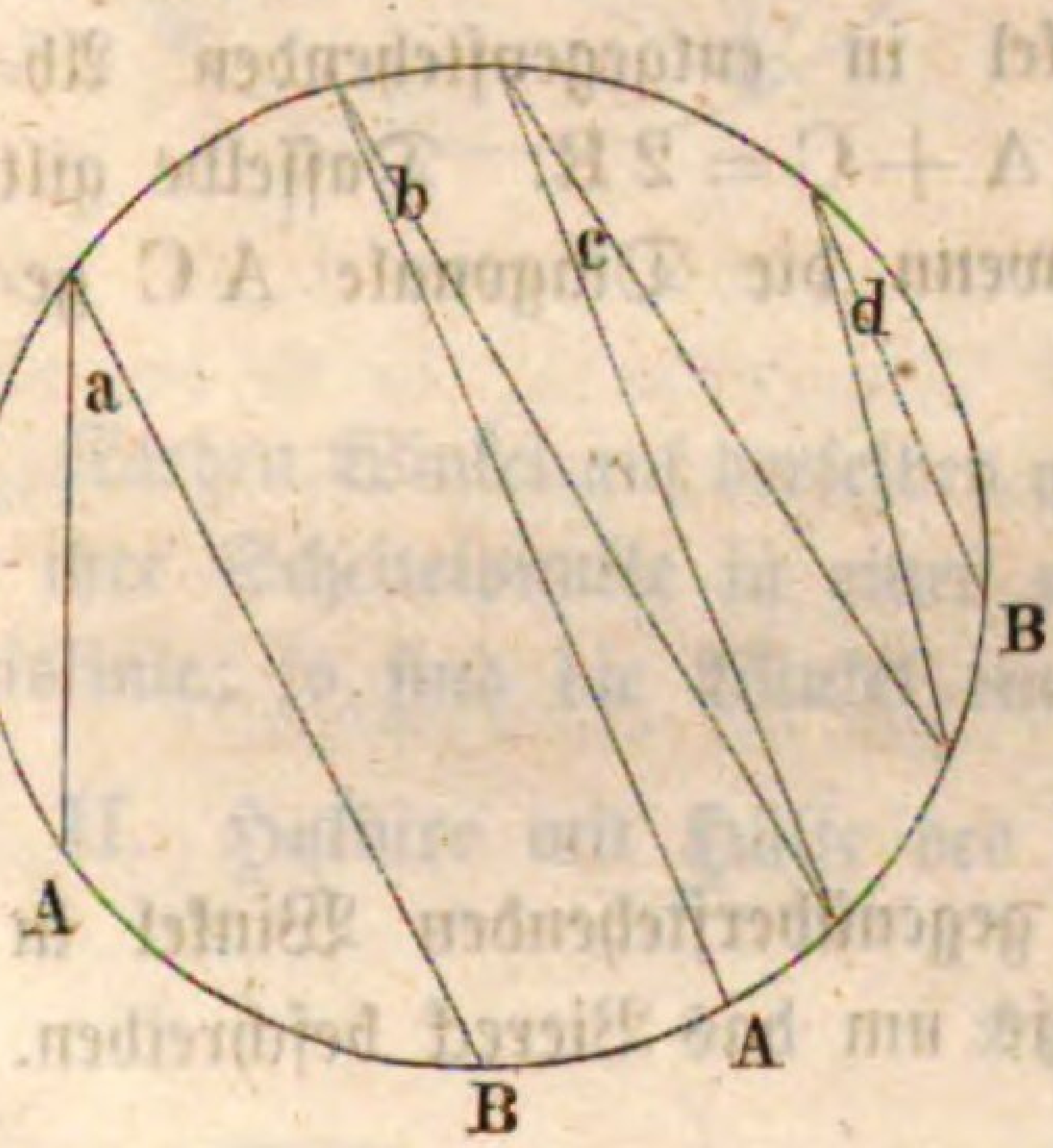
mithin ist:

$$\sphericalangle ACB = 2(ABF + BAF).$$

Hieraus folgt:

1) Die Hälfte des Bogens, auf welchem ein Peripheriewinkel steht, ist sein Maß oder bestimmt die Größe desselben.

2) Peripheriewinkel, die auf gleichen oder ähnlichen Bogen stehen, sind einander gleich.



Auch ist ein Peripheriewinkel so groß als zwei oder mehrere andere zusammen genommen, wenn diese zusammen auf einem eben so großen Bogen stehen, als jener, z. B. der Winkel $a = b + c + d$.

3) Gleiche Peripheriewinkel eines Kreises schließen gleiche Bogen zwischen ihre Schenkel.

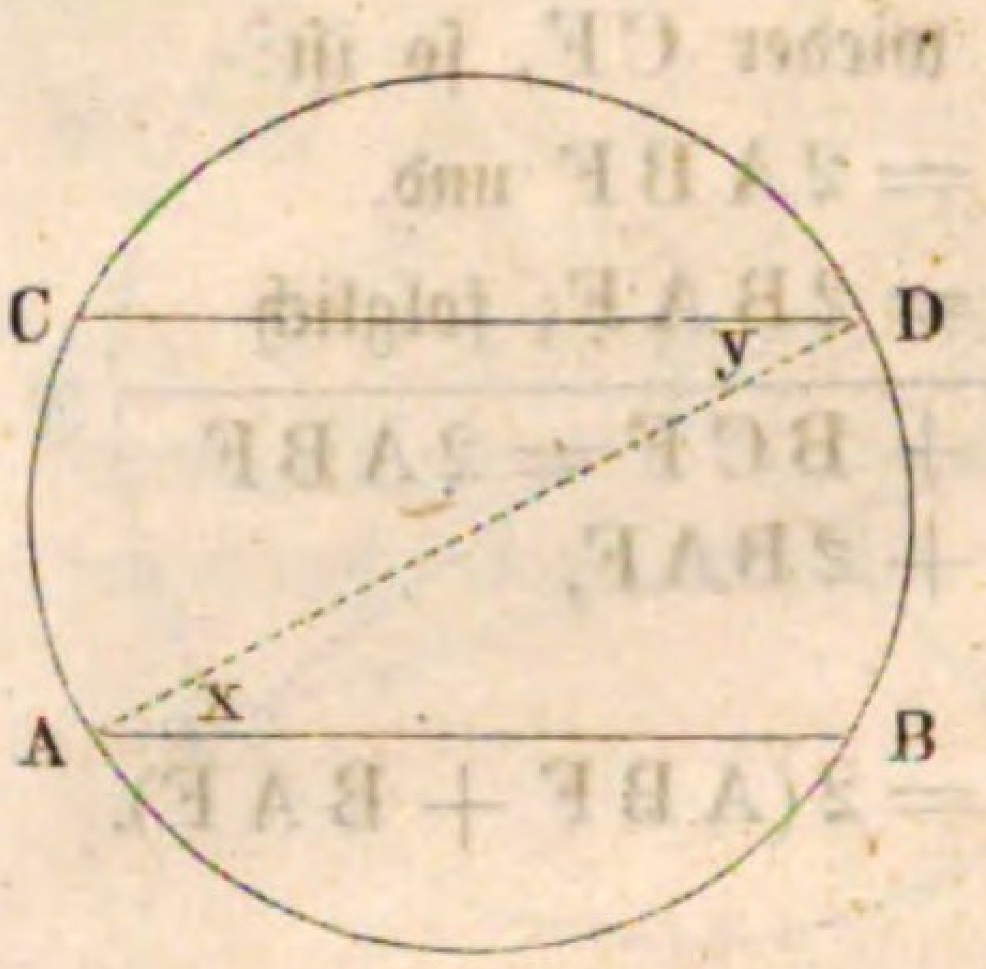
4) Alle Winkel in demselben Abschnitt, d. h. Peripheriewinkel, welche die Sehne des Abschnitts zwischen ihre Schenkel fassen, wie ACB und ADB, sind einander gleich.



5) Zwei Winkel in entgegenstehenden Abschnitten, wie ACB und AEB, sind zusammen $= 2R$, denn sie stehen auf dem ganzen Umkreise; mithin ist der Halbkreis ihr Maß.

6) Sind die entgegenstehenden Abschnitte einander gleich, so sind auch die Winkel in beiden einander gleich, folglich ist jeder $= R$, d. h. der Winkel im Halbkreise ist $= R$.

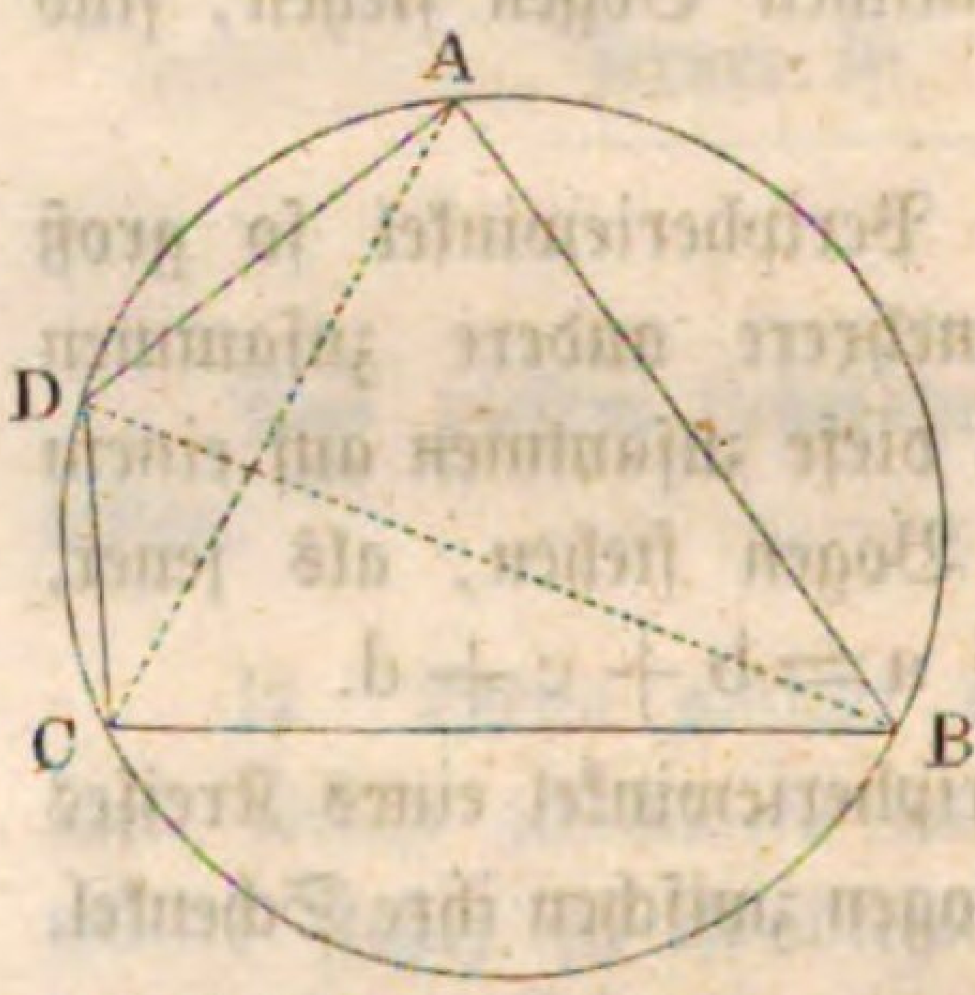
III. Wenn zwei Sehnen eines Kreises, A B und C D, einander parallel laufen, so sind die zwischen ihnen liegenden Bogen, A C und B D, einander gleich.



Beweis:

Man ziehe A D, so ist:
$\measuredangle$ x = y, als Wechselwinkel, folglich
$\measuredangle$ oder Bogen B D = A C.

IV. In einem Viereck, A B C D, dessen Spitzen in der Peripherie eines Kreises liegen, sind die gegenüberstehenden Winkel, sowohl A + C als B + D, = 2 R.

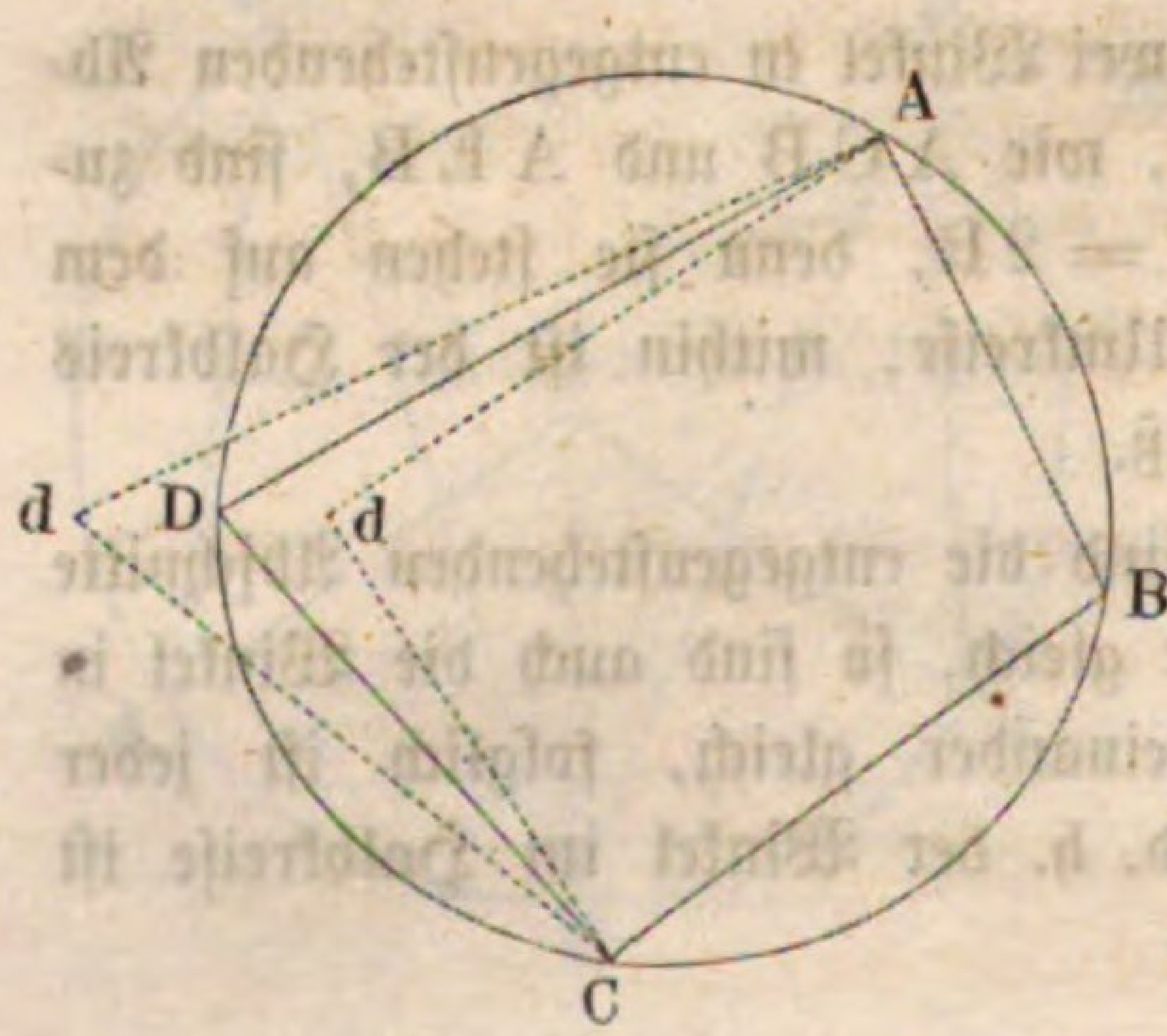


Beweis:

Man ziehe die Diagonale B D, so sind A und C Winkel in entgegenstehenden Abschnitten, folglich A + C = 2 R. Dasselbe gilt von B und D, wenn die Diagonale A C gezogen wird.

V. Wenn umgekehrt die Summe der gegenüberstehenden Winkel in einem Viereck = 2 R ist, so läßt sich ein Kreis um das Viereck beschreiben.

Beweis:



Es sei in dem Viereck A B C D A + B = B + D = 2 R; man beschreibe einen Kreis, der durch A, B und C gehe. Geht dieser nicht zugleich auch durch D, so gehe er durch einen andern Punkt, d, der inner- oder außerhalb des gegebenen Vierecks liegt. Man ziehe alsdann A d und C d, so muß B + d = 2 R sein. Da nun nach der Bedingung B + D = 2 R ist, so

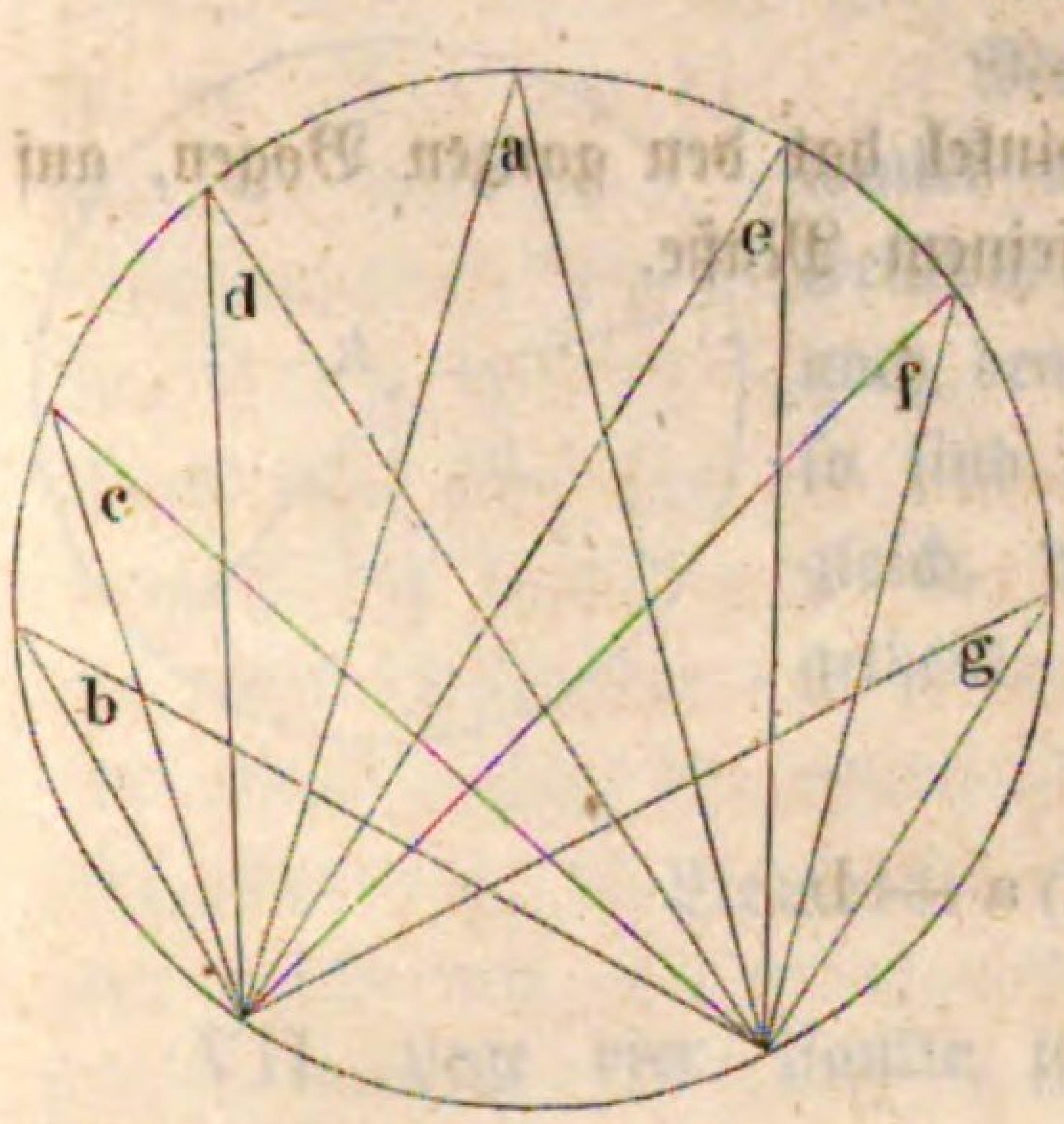
müßte $B + d = B + D$, mithin $d = D$ sein, was unmöglich ist; folglich muß der Kreis durch D gehen.

§. 3.

Aufgaben.

I. Mache einem Winkel sechs andere gleich.

Auflösung:



Man nehme den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel und setze sechs andere Peripheriewinkel auf denselben Bogen; so sind diese dem gegebenen Winkel gleich; also b, c, d, e, f, $g = a$.

Beweis:

Stehen Winkel auf derselben geraden Linie in deren Endpunkten, und liegen alle ihre Scheitelpunkte in einer und derselben durch jene Endpunkte gehenden Kreislinie; so sind die Winkel einander gleich.

II. Halbire mit Hülfe des Kreises einen gegebenen Winkel.

Auflösung:



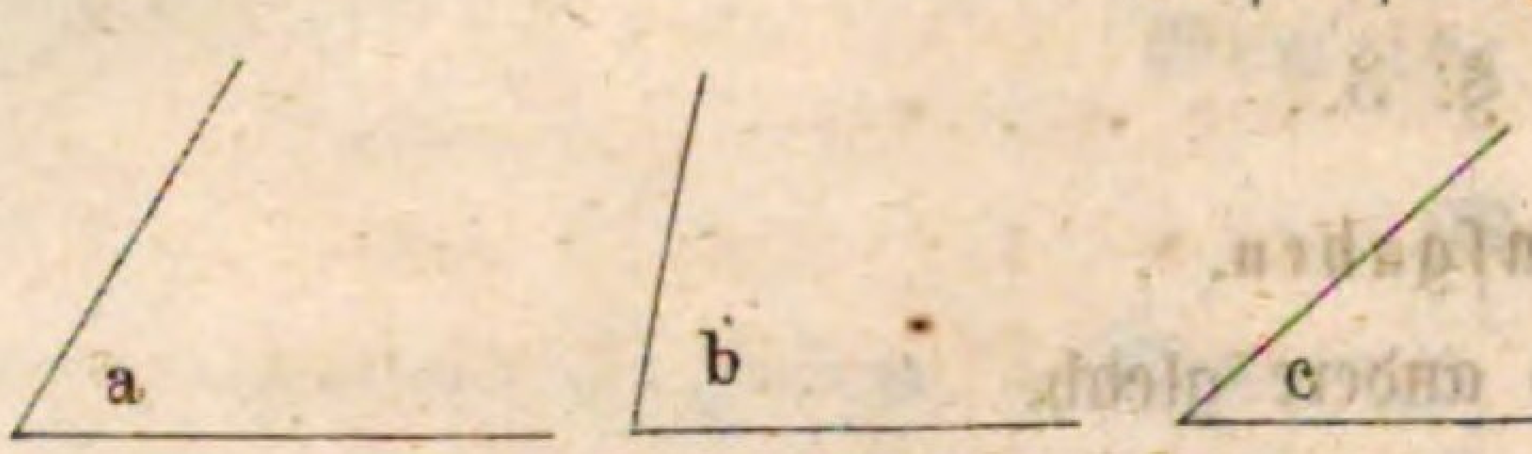
Man nehme den gegebenen Winkel zum Centriwinkel und construire über demselben Bogen einen Peripheriewinkel; so ist dieser der Hälfte des gegebenen gleich.

Beweis:

Ein Peripheriewinkel, der mit einem Centriwinkel auf demselben oder einem gleich großen Bogen steht, ist die Hälfte von diesem.

III. Addire drei gegebene Winkel a, b und c.

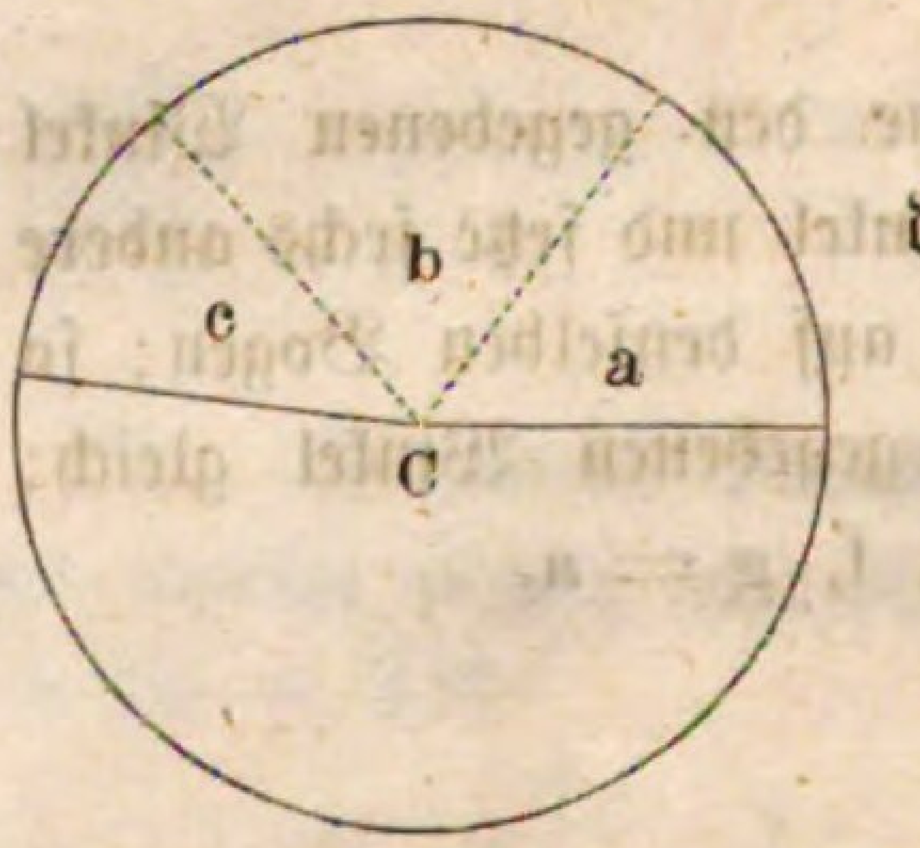
Auflösung:



Lege sie als Centriwinkel neben einander; also

$a + b + c = C.$

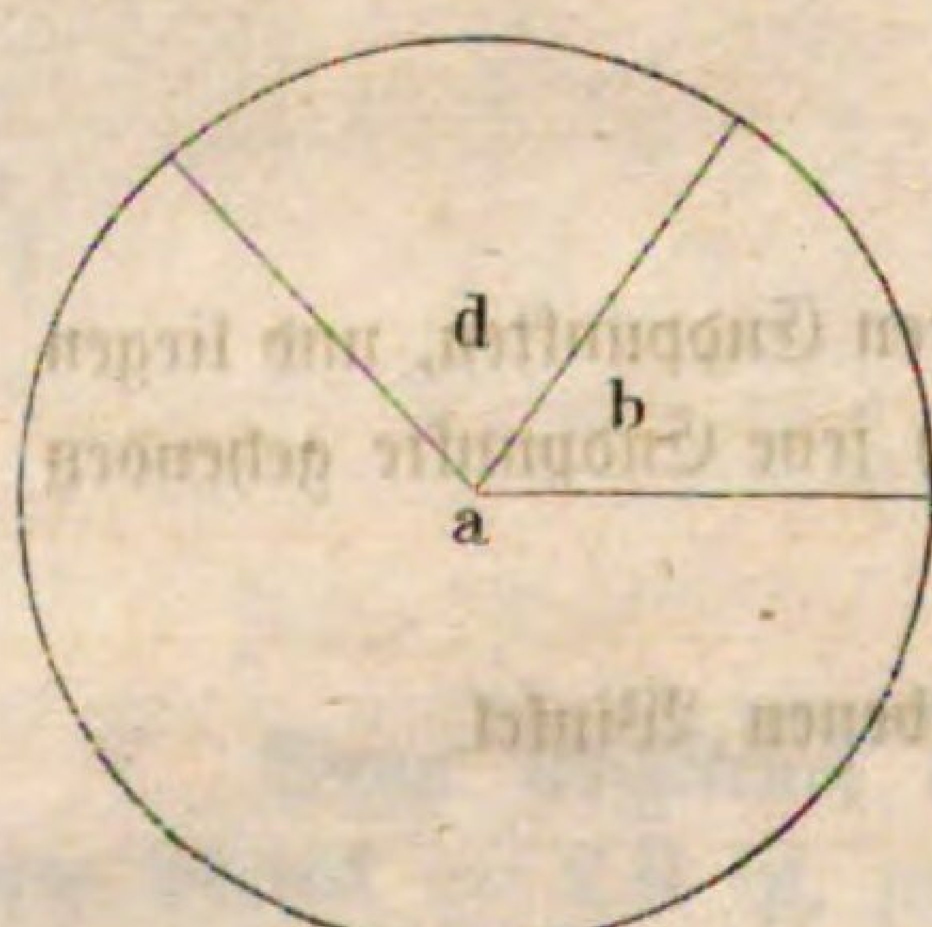
Beweis:



Der Centriwinkel hat den ganzen Bogen, auf dem er steht, zu seinem Maße.

IV. Subtrahire zwei gegebene Winkel, $a - b$.

Auflösung:

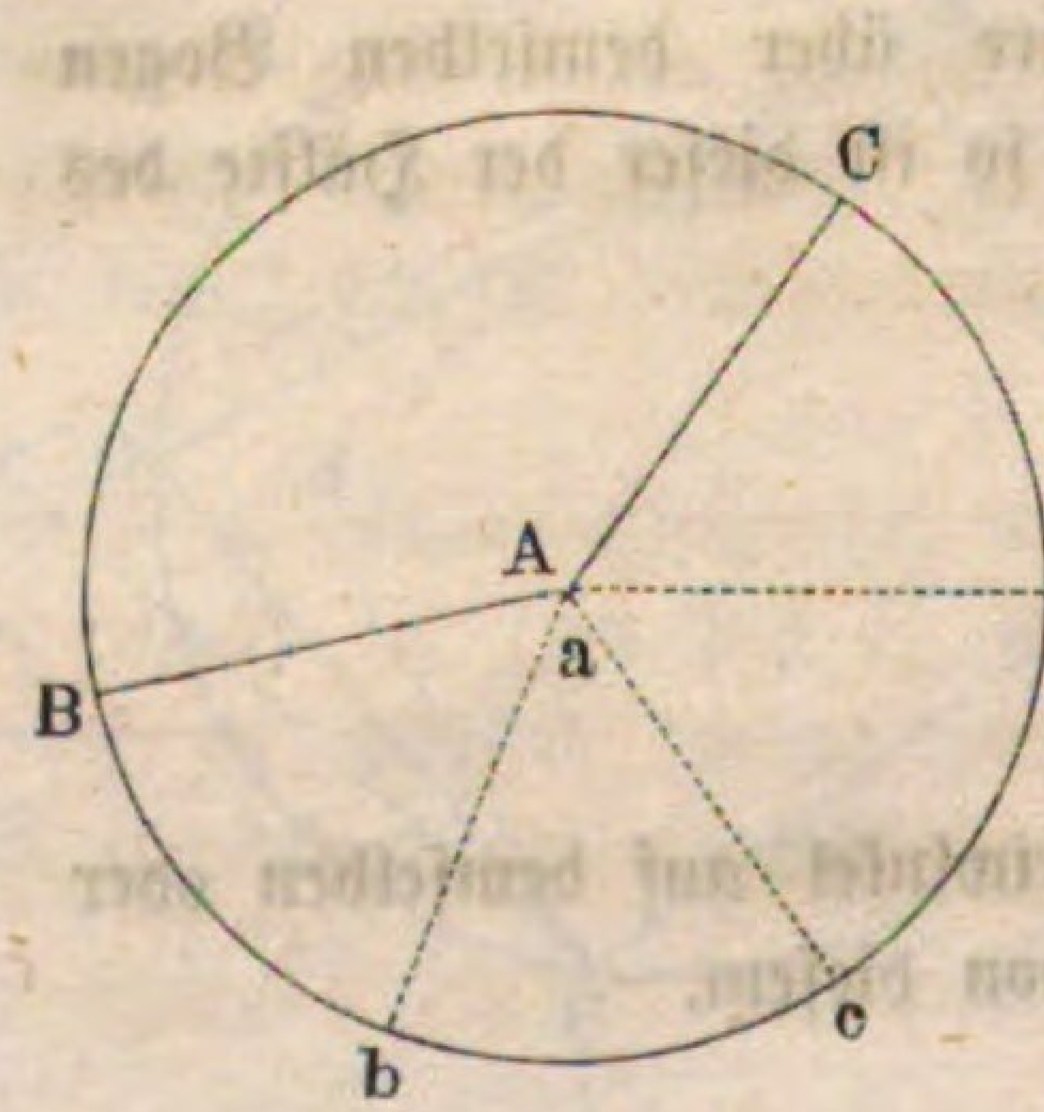


Man lege den Subtrahendus b als Centriwinkel in den Minuendus a, so ist der von a übrig bleibende Winkel gleich der gesuchten Differenz, also $a - b = d$.

Beweis: (Nach der Construction.)

V. Multiplicire einen gegebenen Winkel a mit 4.

Auflösung:



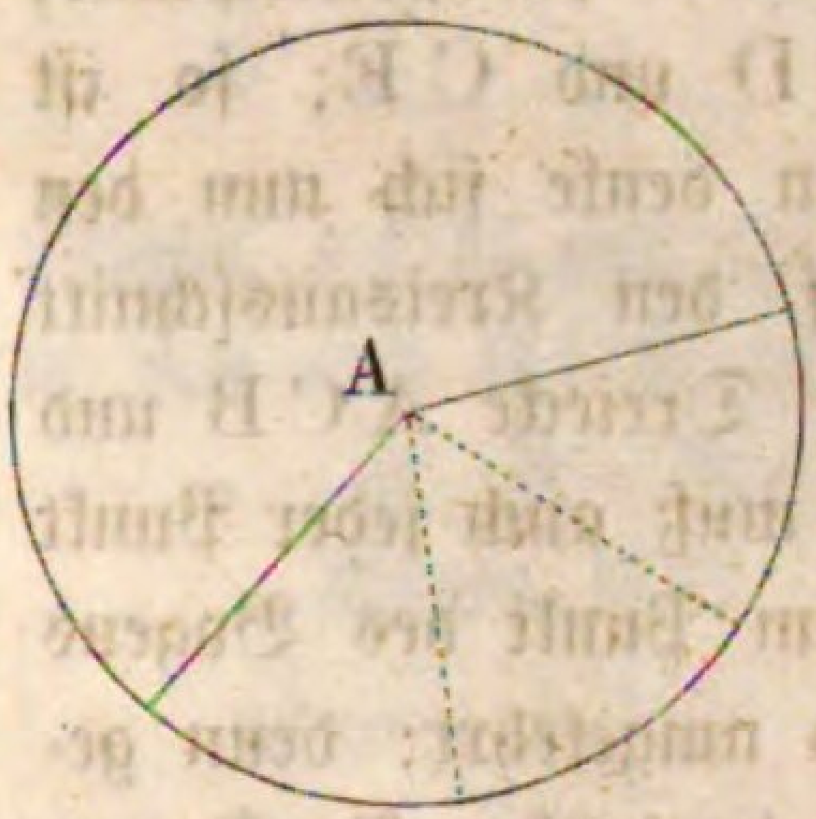
Man nehme den gegebenen Winkel zum Centriwinkel und addire zu seinem Bogen dasselbe Bogenstück 3 Mal; alsdann ist der auf dem ganzen Bogen stehende Centriwinkel gleich dem verlangten Product, also Winkel $A = 4a$.

Beweis:

Der Centriwinkel hat den Bogen, worauf er steht, zu seinem Maße; nun ist aber der Bogen BC nach der Construction $= 4 \times bc$; mithin ist auch der Winkel $A = 4a$.

VI. Dividire einen Winkel A mittelst Probiren durch die Zahl 3.

Auflösung:

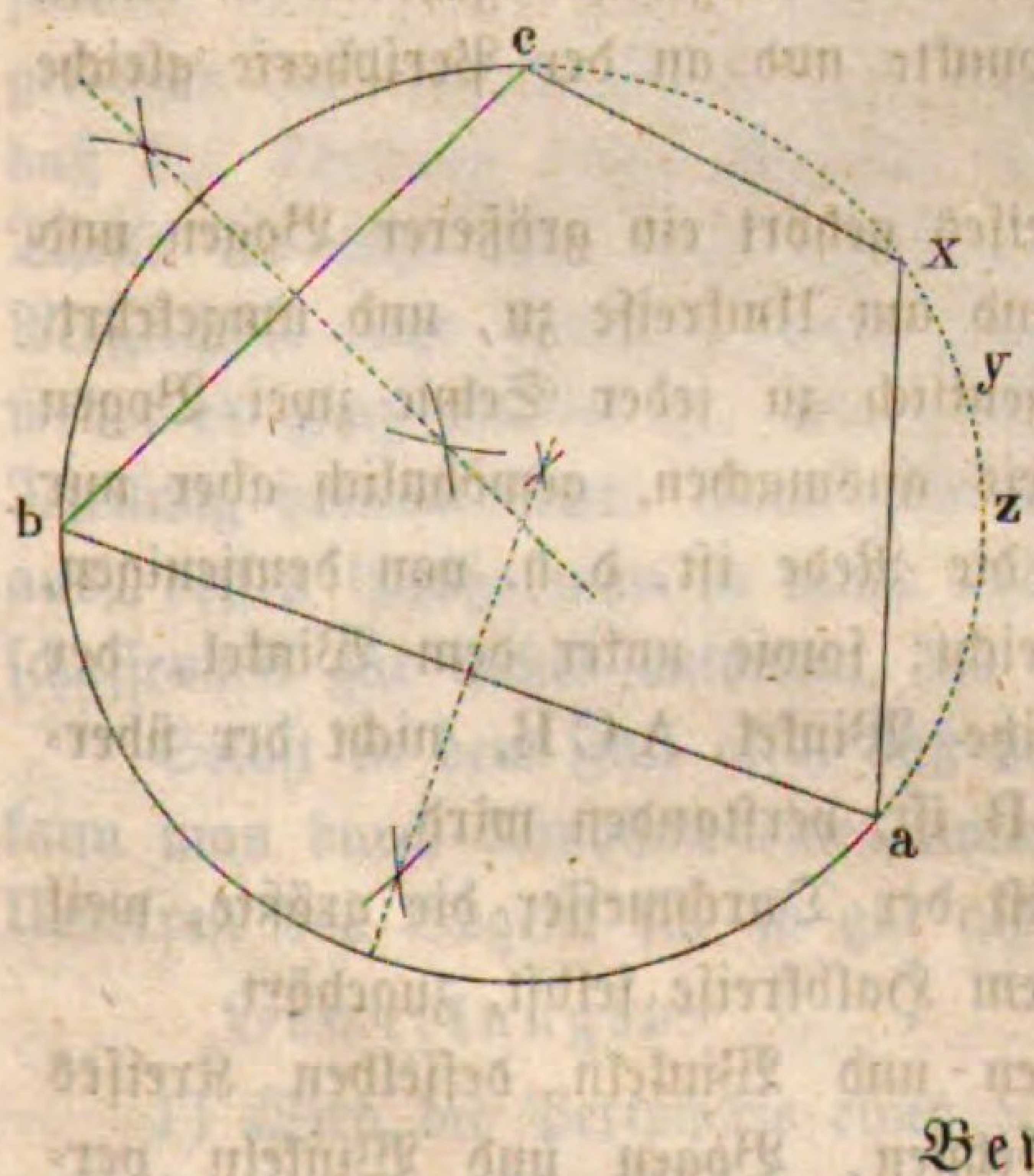


Man nehme den gegebenen Winkel zum Centriwinkel und theile durch Probiren den Bogen, auf welchem er steht, in drei gleiche Theile und ziehe nach den beiden erhaltenen Theilungspunkten Radien; so sind die drei entstandenen Winkel unter einander gleich, und also ist der gegebene Winkel durch 3 getheilt.

Beweis: (Nach der Construction.)

VII. Lege vier Punkte so hin, daß sich ein Kreis durch dieselben ziehen läßt.

Auflösung:



Man lege zuerst die drei Punkte a, b, c willkürlich, aber nicht in eine gerade Linie, hin und suche zu diesen das Centrum eines Kreises, welcher durch diese Punkte geht, und lege alsdann den vierten gesuchten Punkt in das noch ohne Sehne vorhandene Bogenstück des Kreises; so ist x, y, z oder jeder andere Punkt in diesem Bogenstück derjenige, durch welchen der Kreis gezogen werden kann.

Beweis:

Winkel $a + c = 2R$

„ $b + x = 2R$.

§. 4.

Lehrsätze:

I. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleiche Bogen.

Beweis:



Es sei AB = DE und C der Mittelpunkt; man ziehe CA, CB, CD und CE; so ist △ABC ≅ DCE. Man denke sich nun den Kreisausschnitt DCE auf den Kreisausschnitt ACB gelegt, so daß die Dreiecke ACB und DCE einander decken; so muß auch jeder Punkt des Bogens DE mit einem Punkt des Bogens AB zusammen fallen, und umgekehrt; denn geschähe das nicht, so müßte ein solcher Punkt entweder näher bei C liegen, oder weiter davon abstehen, als die Größe des Halbmessers beträgt, was unmöglich ist; mithin decken die Ausschnitte einander, und also ist der Bogen DE = dem Bogen AB. Hieraus folgt:

1) Gleiche Bogen eines Kreises haben gleiche Sehnen.

2) Gleichen Sehnen und Bogen eines Kreises liegen gleiche Winkel am Mittelpunkte und am Umkreise gegenüber; und umgekehrt gehören in einem Kreise zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte und an der Peripherie gleiche Sehnen und gleiche Bogen.

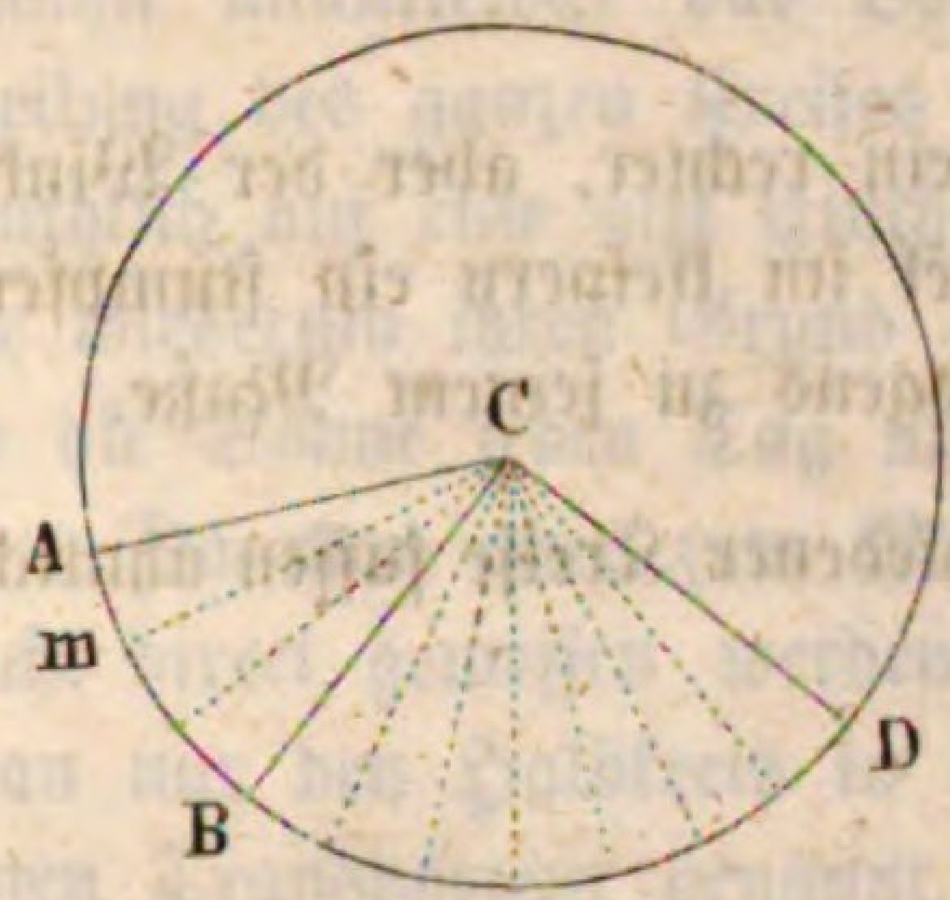
3) Der größeren Sehne eines Kreises gehört ein größerer Bogen und ein größerer Winkel am Mittelpunkte und am Umkreise zu, und umgekehrt. Hierbei ist jedoch zu erinnern, daß eigentlich zu jeder Sehne zwei Bogen gehören, die zusammen den ganzen Kreis ausmachen, gewöhnlich aber nur von dem kleinern dieser beiden Bogen die Rede ist, d. h. von demjenigen, dessen Größe den Halbkreis nicht überreicht; sowie unter dem Winkel, der z. B. der Sehne AB gehört, der spitze Winkel ACB, nicht der überstumpfe, dessen Maß der Bogen ADEB ist, verstanden wird.

4) Unter allen Sehnen im Kreise ist der Durchmesser die größte, weil er dem größten Bogen im Halbkreise, dem Halbkreise selbst, zugehört.

5) Was hier von Sehnen, Bogen und Winkeln desselben Kreises gesagt ist, gilt natürlich auch von Sehnen, Bogen und Winkeln verschiedener, aber gleicher Kreise.

II. In einem Kreise verhalten sich die Winkel am Mittelpunkte, wie die ihnen gegenüberstehenden Bogen.

Beweis:



Man vergleiche die Winkel ACB und BCD und ihre Bogen AB und BD gegen einander. Die Bogen theile man zu diesem Zweck mit irgend einem Maße = Am, welches so klein sein kann, als es immer soll, in lauter gleiche Theile, z. B. AB in drei, BD in sieben solcher Theile; so verhält sich AB : BD = 3 : 7. Alsdann ziehe man durch jeden Theilungspunkt der Bogen eine Linie nach C; so werden auch die Winkel ACB und BCD in lauter gleiche Winkel getheilt, und zwar ACB in drei und BCD in sieben; mithin verhält sich

∢ ACB : ∢ BCD = 3 : 7; es verhielt sich aber auch
Bogen BD : Bogen AB = 7 : 3; daher verhält sich

Winkel ACB : ∢ BCD = Bogen AB : Bogen BD.

Die Zahlen 3 und 7 sind hier allerdings nur in Beziehung auf eine bestimmte Figur gesetzt, in der die Eintheilung statt finden muß; man kann aber dafür allgemein m und n setzen, ohne daß der Gang des Beweises sich im Geringsten ändert, und sich darunter so große Zahlen denken, als man immer will. Da es ferner auch nicht darauf ankömmt, daß die Bogen wirklich in irgend eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden, sondern daß sie mit irgend einem, gleichviel welchem, gemeinschaftlichen Maße gemessen werden; so ist es kein Fehler gegen die wissenschaftliche Methode, daß die Theilung eines Bogens in irgend eine bestimmte Anzahl gleicher Theile bis jetzt noch nicht gezeigt worden ist. Es ist hier genug, sich die Möglichkeit einer Theilung beider Bogen in lauter gleiche Theile vorzustellen, wobei es ganz einerlei ist, wie groß die Menge der Theile sei, die bei der Theilung herauskommt. Man geht hier also von der Annahme eines Maßes aus, dessen Größe man so lange abändern kann, da auf ihre absolute Beschaffenheit gar nichts ankommt, bis es für beide Bogen passend wird.

Selbst in dem Fall also, daß das Verhältniß der Bogen irrational ist, kann man durch Annahme eines unendlich kleinen Maßes erreichen, daß der Ueberrest des Bogens für so gut als Nichts zu rechnen ist.

Bemerkungen:

1) Wird die Peripherie eines Kreises in irgend eine Zahl gleicher Theile getheilt, so kann sie zu einer bequemen Bestimmung der Größe der Winkel gebraucht werden.

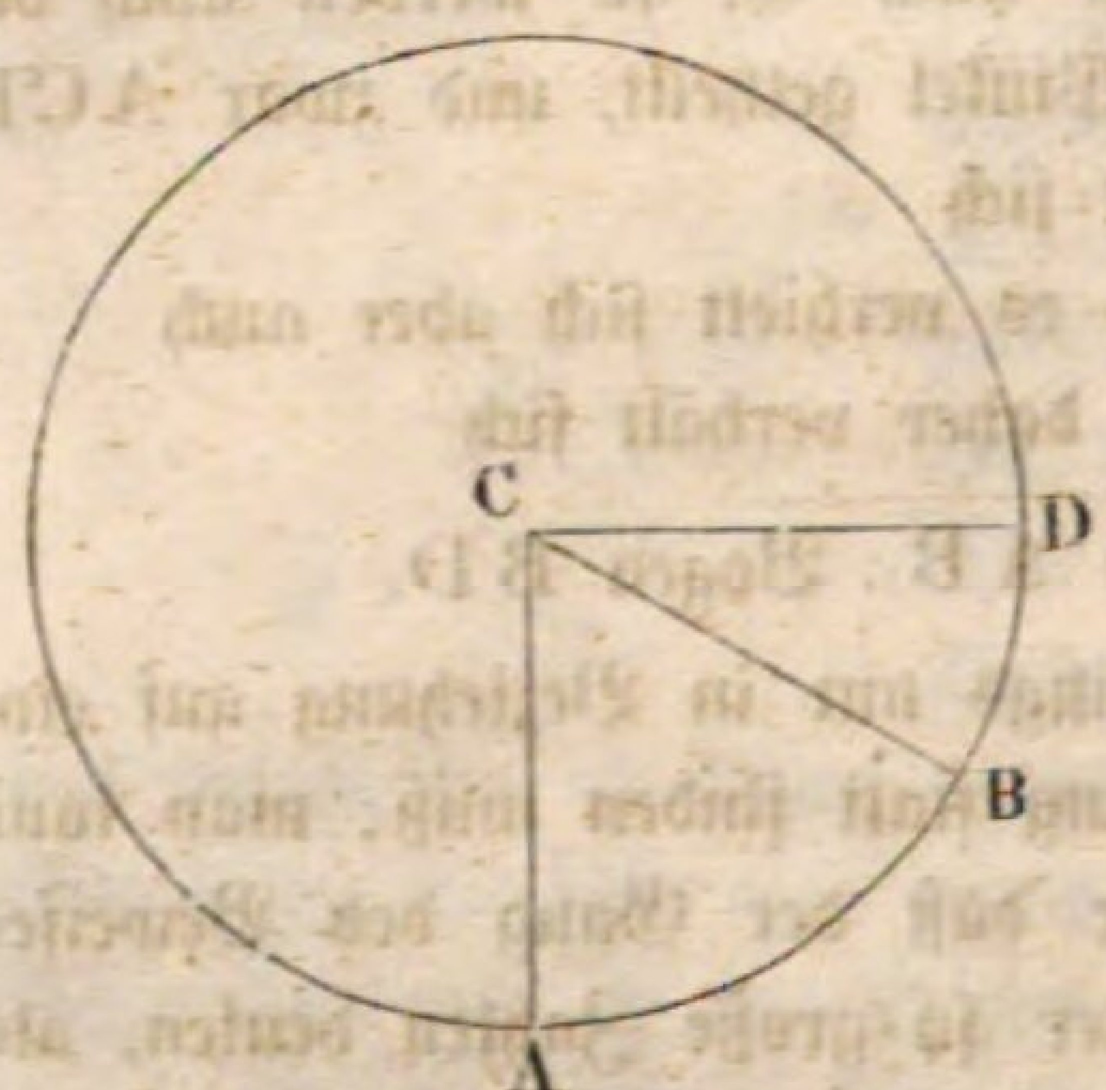
2) Da die Winkel um den Mittelpunkt eines Kreises zusammen 4R ausmachen, und sie die ganze Peripherie zwischen ihre Schenkel fassen; so ist

der Bogen, welcher R zugehört, dem vierten Theil der Peripherie gleich, und der Halbkreis umfaßt die Summe von 2R.

3) Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein rechter, aber der Winkel im größern Abschnitt ist ein spitzer, der Winkel im kleinern ein stumpfer; denn der Peripheriewinkel hat die Hälfte des Bogens zu seinem Maße.

III. Gleiche Winkel am Mittelpunkte verschiedener Kreise fassen ähnliche Bogen zwischen ihre Schenkel.

Beweis:





Aehnliche Bogen heißen Bogen verschiedener Kreise, die zu ihren Peripherieen einerlei Verhältniß haben oder einen gleich großen Theil ihrer Peripherieen ausmachen. Nun sei der Winkel $ACB = acb$; man errichte aus C ein Perpendikel CD auf CA, ebenso aus c ein Perpendikel cd auf ca, so verhält sich:

1) $ACB : ACD = AB : AD$

2) $acb : acd = ab : ad$

d. i. $AB : AD = ab : ad$.

Nun ist AD gleich dem vierten Theil der Peripherie, die durch P bezeichnet werde, und ad gleich dem vierten Theil der Peripherie des andern Kreises, die gleich p gesetzt werde; mithin verhält sich:

$AB : \frac{1}{4}P = ab : \frac{1}{4}p$, also auch

$AB : P = ab : p$.

Wenn die Peripherieen ungleicher Kreise in eine gleiche Anzahl unter sich gleicher Theile getheilt werden, so schneiden gleiche Winkel, in den Mittelpunkt dieser Kreise gelegt, gleiche Mengen von Theilen der Peripherie ab. Daher bedient man sich der Kreise zur Bestimmung der Größe der Winkel. Zu diesem Zweck theilt man nämlich die Peripherie eines beliebigen Kreises in 360 gleiche Theile ein, die man Grade nennt, und bestimmt die Größe eines Winkels nach der Menge von Graden, die er zwischen seine Schenkel faßt, wenn sein Scheitelpunkt im Mittelpunkt des Kreises liegt. Auf die Größe des Kreises kommt dabei nichts an: denn von dieser hängt zwar die Größe der Grade, aber nicht die Menge derselben ab, welche irgend einem Winkel als Maß zukommt. Winkel von verschiedener Größe schneiden also

auch verschiedene Mengen von Graden ab, und die Anzahl der Grade bestimmt unmittelbar das Verhältniß der Winkel gegen einander. Die Eintheilung des ganzen Kreises in 360 Grade ist sehr alt und gründet sich vermuthlich auf eine alte Eintheilung der Sonnenbahn in so viele gleiche Theile, die wiederum ihren Grund darin hatte, daß es den alten Völkern schien, als ob die Sonne jeden Tag um einen solchen Theil in ihrer Bahn fortrückte.

Da man aber zum Messen der Winkel, d. h., wenn die überstumpfen nicht direct gemessen werden sollen, keinen ganzen Kreis gebraucht, so hat man nur den Halbkreis in 180 Grade eingetheilt und dieses Meßinstrument einen Transporteur genannt.

Ein in 90 gleiche Theile eingetheilter Viertelkreis heißt ein Quadrant, und ein in 60 Grade eingetheilter Sechstelkreis wird ein Sextant genannt. Zur genauern Messung der Winkel wird der Grad wieder in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden und die Secunde in 60 Tertien eingetheilt, und man bezeichnet diese Größen, wie die Längenmaße: Ruthen, Fuße, Zolle und Linien, durch: ^{0}, $'$, $''$, $'''$; z. B. 40^0, $36'$ $27''$ $53'''$.

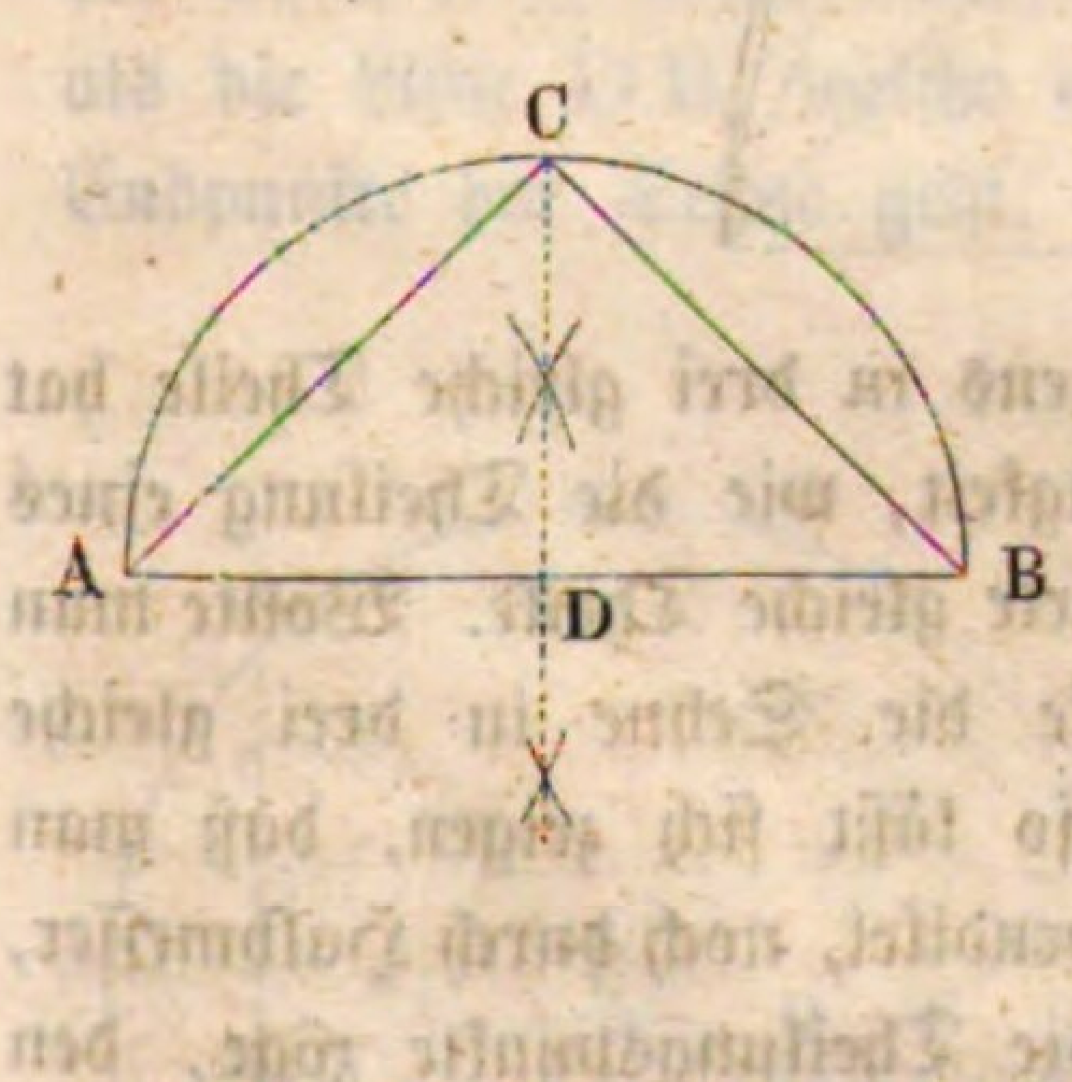
Unter Napoleon I. hatte man in Frankreich zur Bequemlichkeit für astronomische Berechnungen den Quadranten in 100 Grade, den Grad in 100 Minuten und die Minute in 100 Secunden eingetheilt; aber mit der Umänderung des politischen Systems ist man auch hierin wieder auf das Alte zurück gegangen.

§. 5.

Aufgaben:

I. Einen Bogen zu halbiren!

Auflösung:



Es sei A C B der zu theilende Bogen. Man ziehe die Sehne A B und durch die Mitte derselben das Perpendikel C D, so halbirt dieses auch den Bogen.

Beweis:

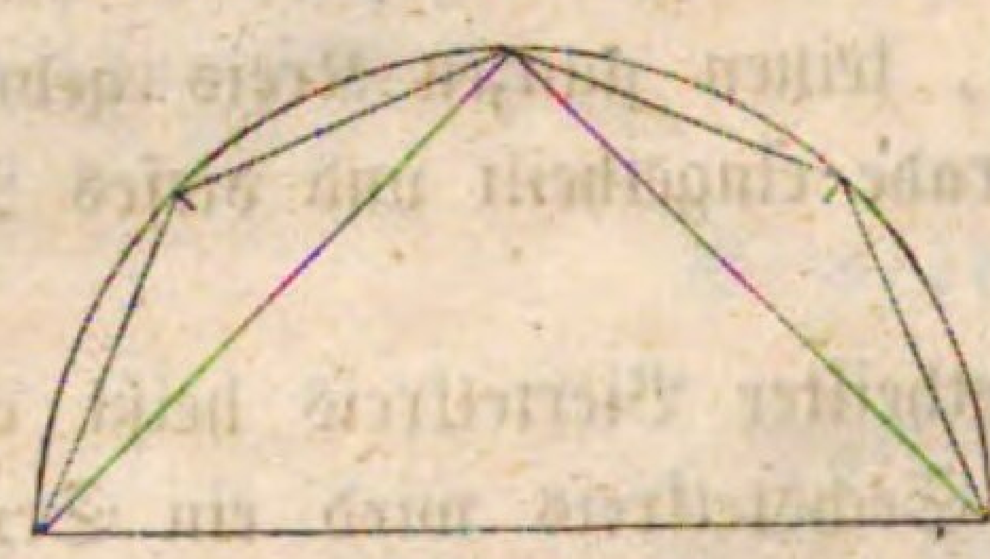
Man ziehe A C und B C, so ist Dreieck A D C $\cong$ B D C, folglich A C = B C, mithin auch der Bogen A C = dem Bogen B C.

II. Einen Bogen in 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Theile zu theilen.

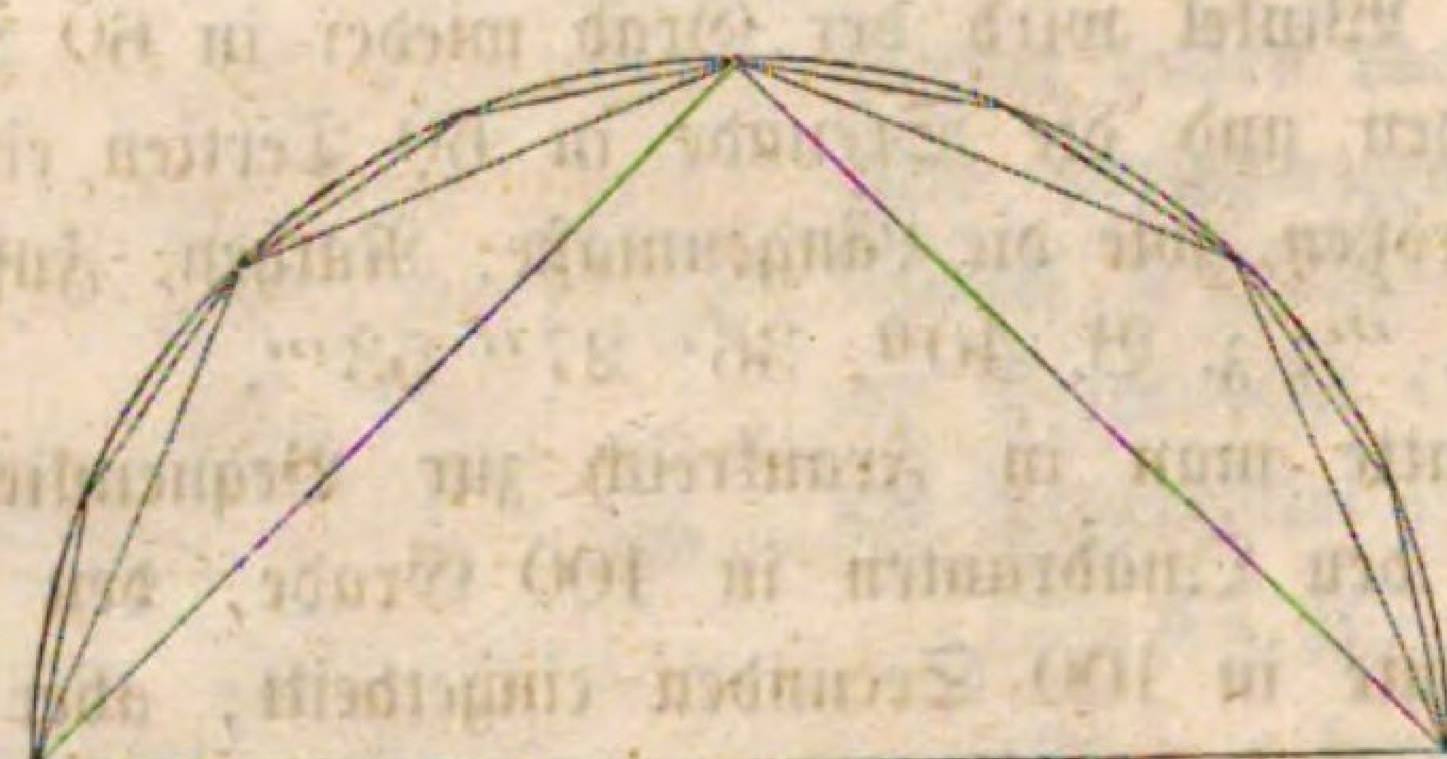
Auflösung:

Durch fortgesetztes Halbiren eines jeden Theiles wird der ganze Bogen in 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Theile getheilt.

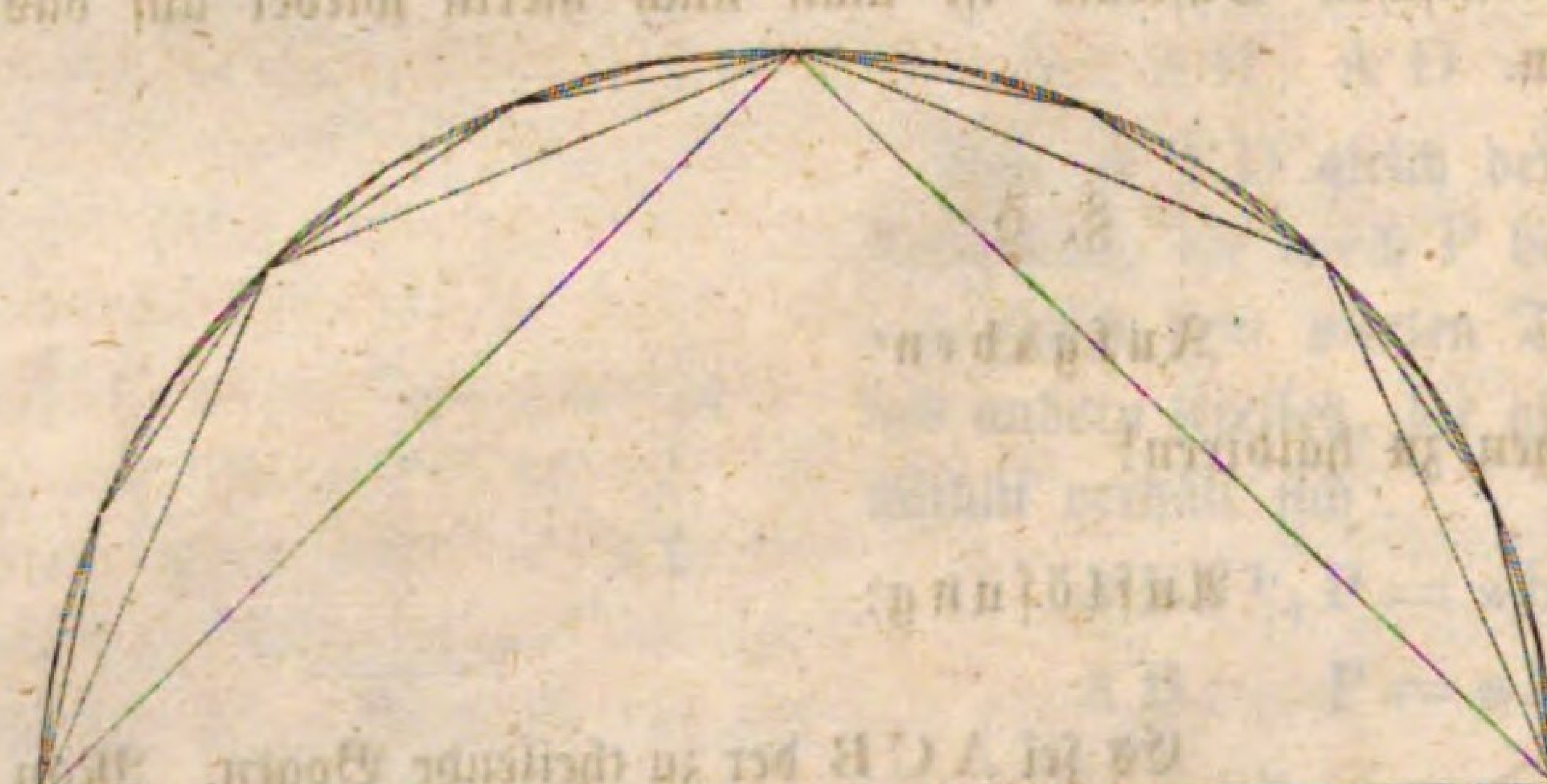
Beweis: (wie oben).



1) in vier gleiche Theile.

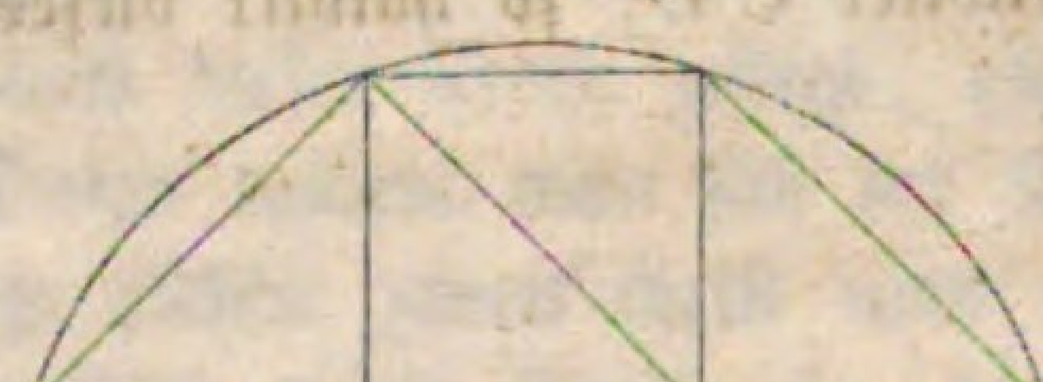


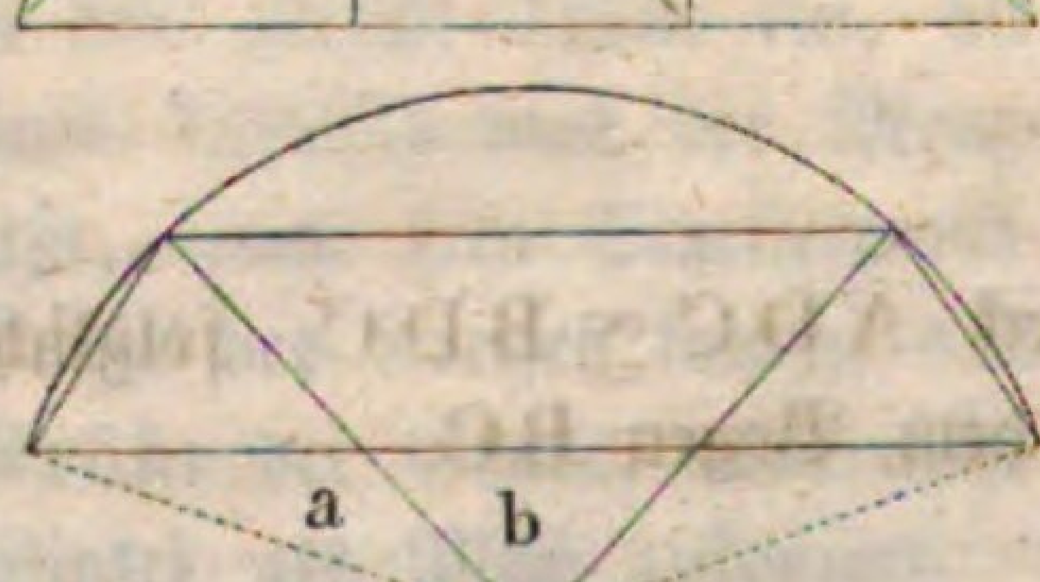
2) in acht gleiche Theile.



3) in sechszehn gleiche Theile.

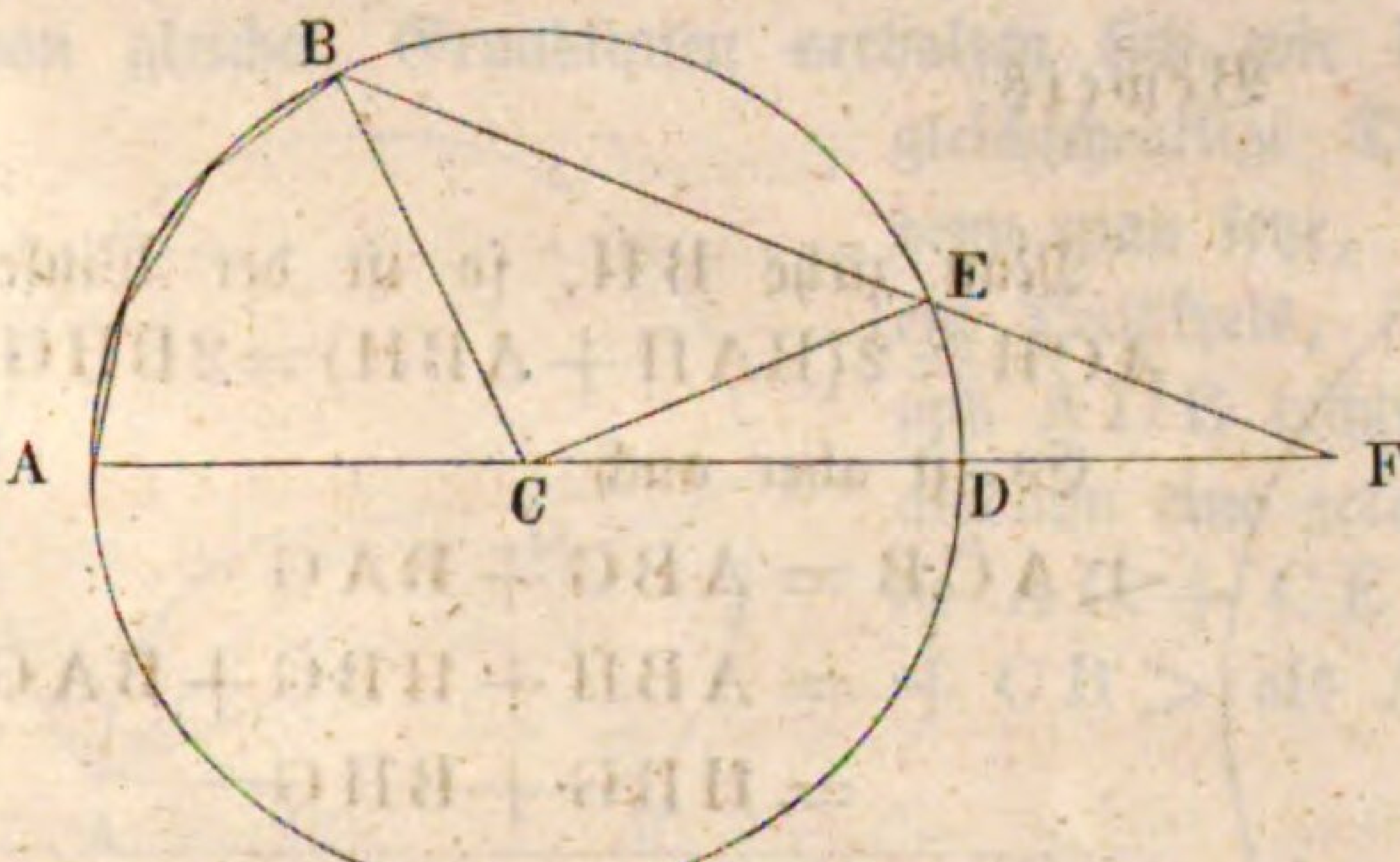
Anmerkung: Die Theilung eines Bogens in drei gleiche Theile hat dieselbe Schwierigkeit, wie die Theilung eines Winkels in so viele gleiche Theile. Wollte man zu diesem Zwecke die Sehne in drei gleiche Theile theilen, so läßt sich zeigen, daß man weder durch Perpendikel, noch durch Halbmesser, die man durch die Theilungspunkte zöge, den Bogen in drei gleiche Theile theilen würde. Im erstern Fall würde der mittlere Bogen zu klein, im letztern Fall zu groß werden;





denn die Sehne A E ist eine Hypotenuse, hingegen die Sehne E F ein Kathetus in zwei congruenten Dreiecken, und der Centriwinkel a ist kleiner als der Centriwinkel b.

Ein brauchbares Verfahren, diese Aufgabe mittelst des Kreises und der geraden Linie durch Probiren zu lösen, findet sich schon beim Archimedes. Es sei nämlich A B der Bogen oder A C B der Winkel, welcher getheilt werden soll; so verlängere man A C nach F hin und ziehe B F, so daß E F = C D werde; alsdann ist E D = $1/3$ A B oder ∢ E C D = $1/3$ ∢ A C B. Dies ist richtig, aber die Schwierigkeit besteht darin, den Punkt E oder F geometrisch zu bestimmen; mechanisch und durch Probiren läßt er sich allerdings leicht finden. Hier ist noch zu bemerken, daß gewisse Bogen, z. B. der Halbkreis, oder ein Quadrant sich ohne Schwierigkeit in drei gleiche Theile theilen lassen; aber nicht eben so ein jeder beliebiger Bogen.

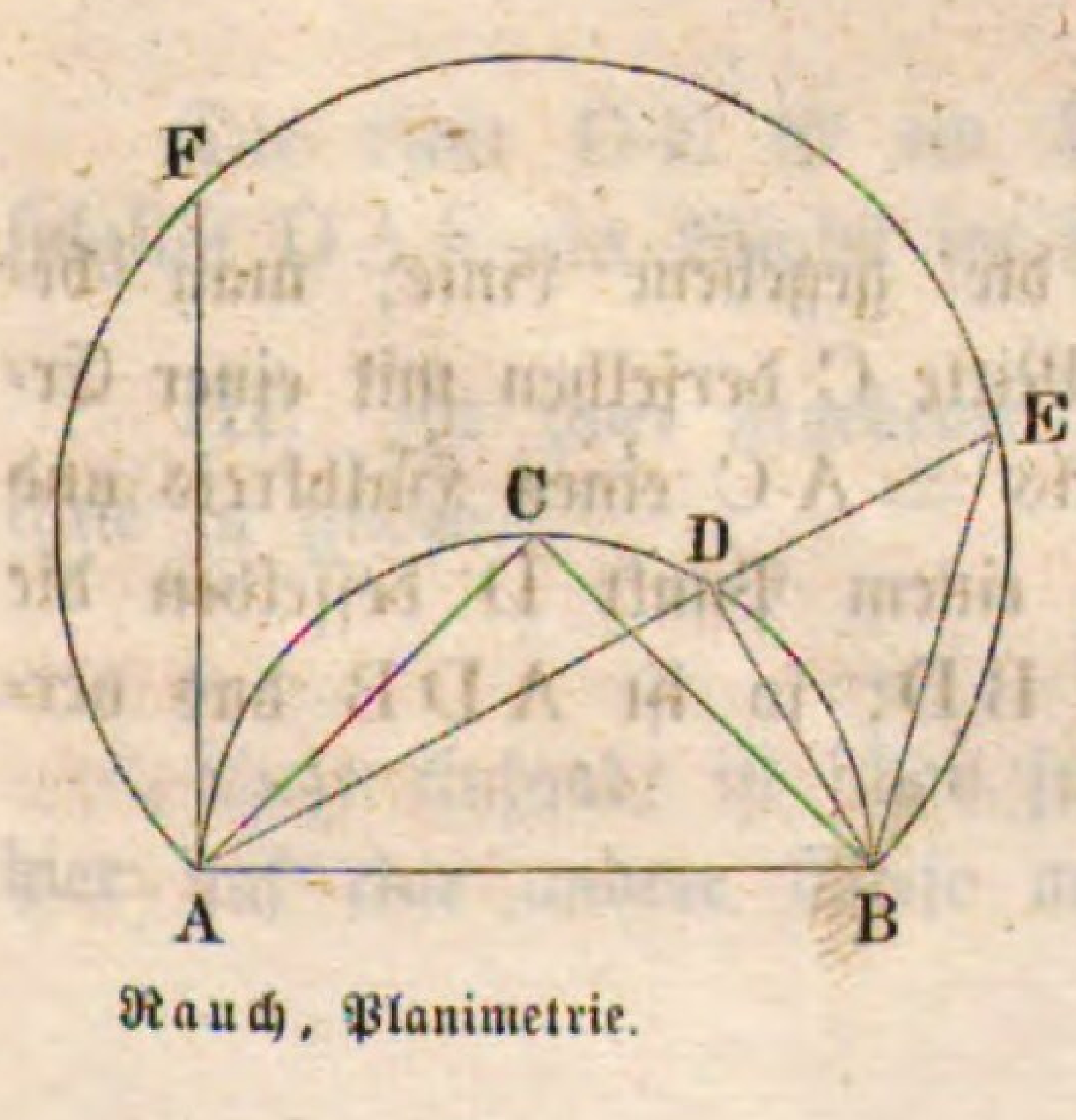


§. 6.

Lehrsätze.

I. Wenn man aus der Mitte C des Bogens A C D B einen zweiten Bogen A F E B über derselben Sehne A B beschreibt und aus A oder B irgend eine gerade Linie, wie A E, nach dem äußern Bogen zieht, so ist der Theil D E dieser Linie, welcher zwischen beide Bogen fällt, eben so groß als die Linie D B, welche von dem Durchschnittspunkte D nach dem andern Endpunkte der Sehne geht.

Beweis:

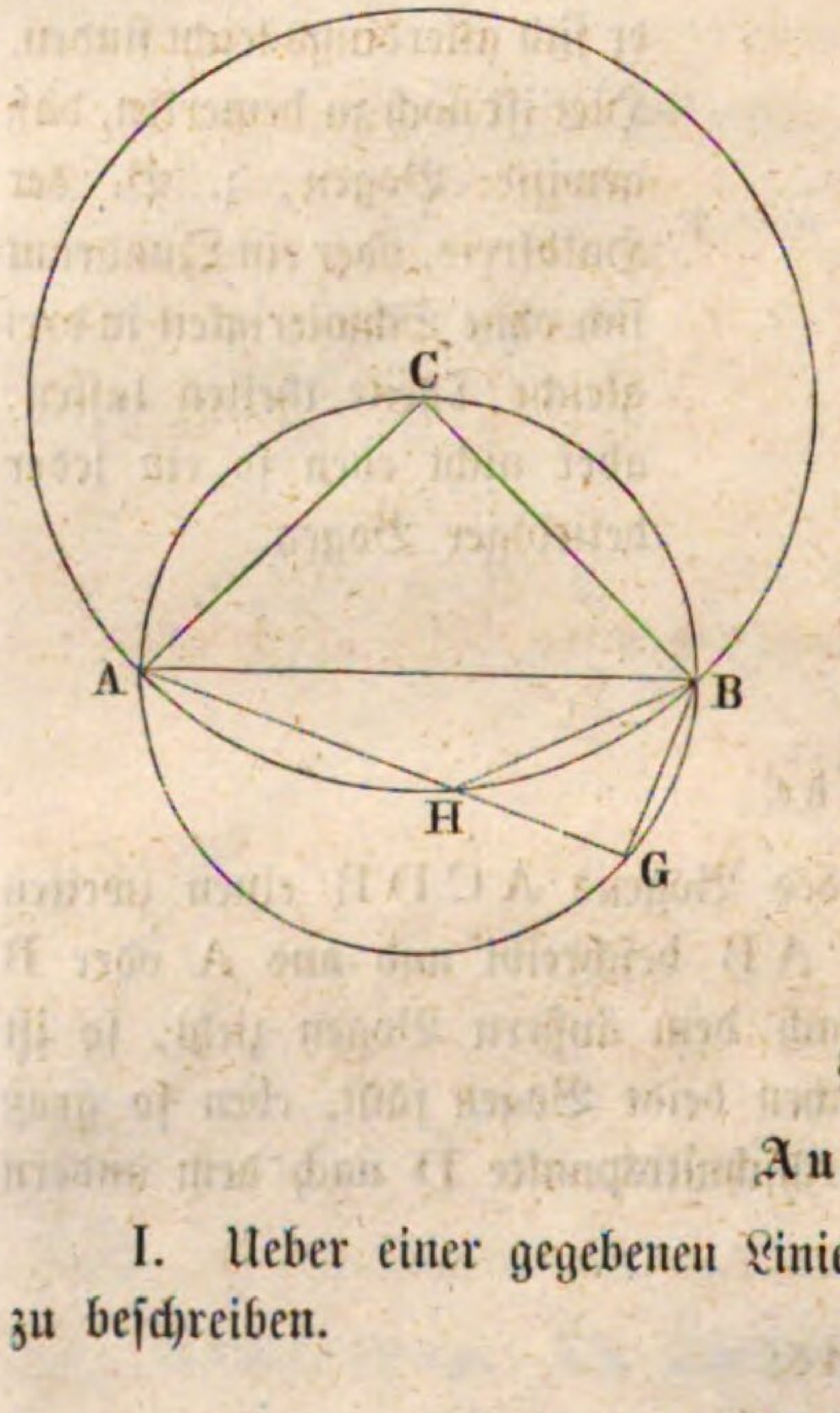


Man ziehe E B, ebenso A C und B C, so ist der Winkel A D B = A C B, ferner A C B = 2 A E B; mithin A D B = 2 A E B. Es ist aber auch A D B = A E B + D B E, folglich ist A E B oder D E B = D B E, also auch D B = D E.

Ist A F eine Tangente an dem innern Bogen in A, und die Sehne A E rückt derselben näher, so fallen die Punkte D und A immer näher zusammen; kommt A E endlich ganz in die Lage von A F selbst, so fällt D in A, woraus dann folgt, daß A F = A B ist.

II. Vollendet man die beiden Kreise und zieht von A nach der andern Seite von A B die Sehne A G, welche den Bogen A H B in H schneidet, so ist auch hier die Sehne B G des Kreises A C B G der Linie G H, welche zwischen beide Kreise fällt, gleich.

Beweis:



Man ziehe B H, so ist der Winkel ACB = 2(BAH + ABH) = 2BHG.

Es ist aber auch

$$\sphericalangle ACB = ABG + BAG$$
$$= ABH + HBG + BAG$$
$$= HBG + BHG$$

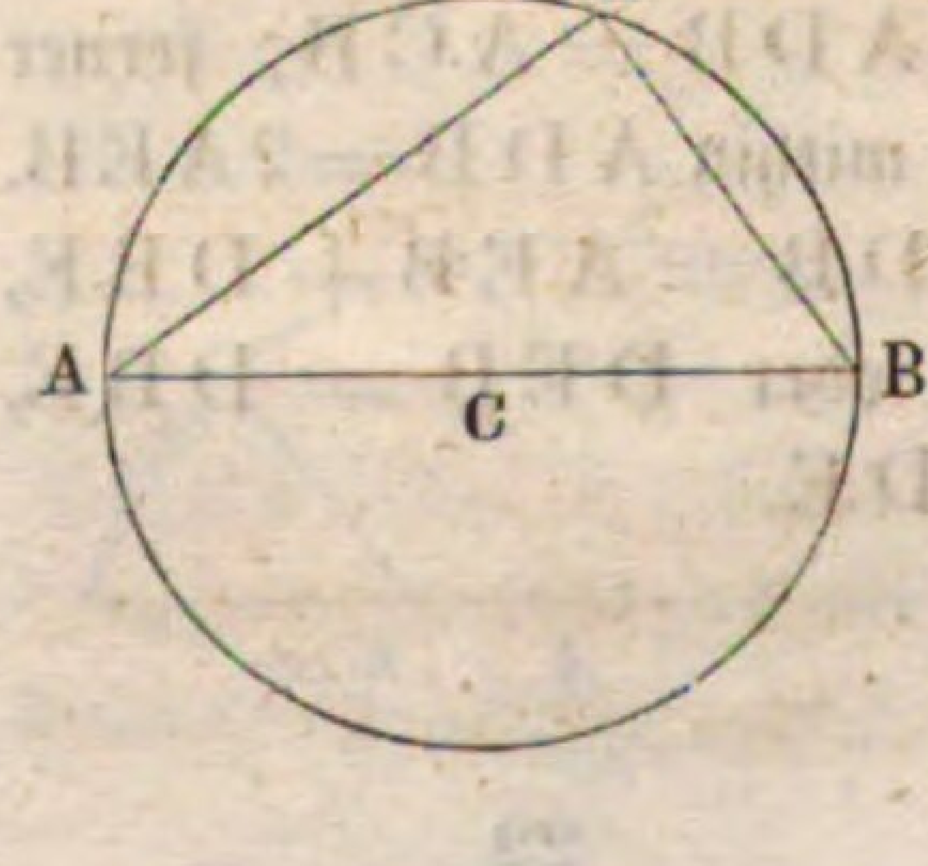
folglich: 2BHG = HBG + BHG, also BHG = HBG und mithin Sehne BG = GH.

§. 7.

Aufgaben.

I. Ueber einer gegebenen Linie als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben.

Auflösung:



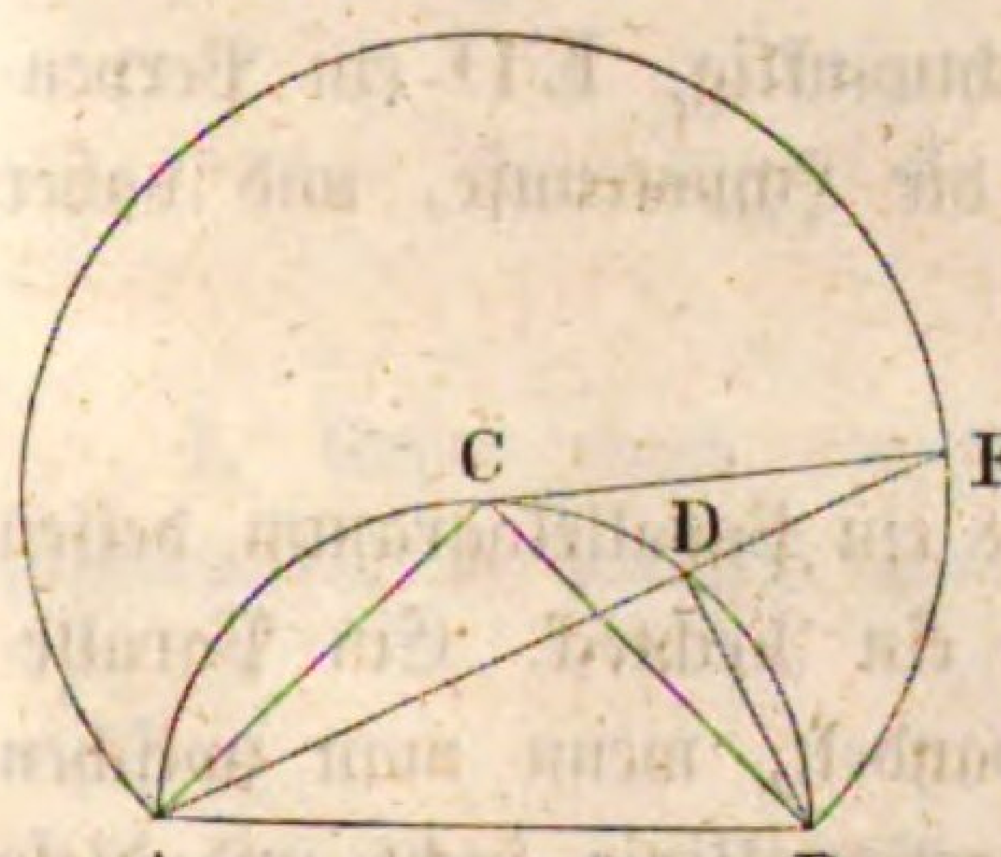
Es sei A B die gegebene Linie; man beschreibe aus der Mitte C derselben mit einer Eröffnung des Zirkels = A C einen Halbkreis und ziehe nach irgend einem Punkt D desselben die Linien A D und B D; so ist A D B das verlangte Dreieck.

Beweis:

Da der Winkel ADB ein Winkel im Halbkreise ist, so ist er = R.

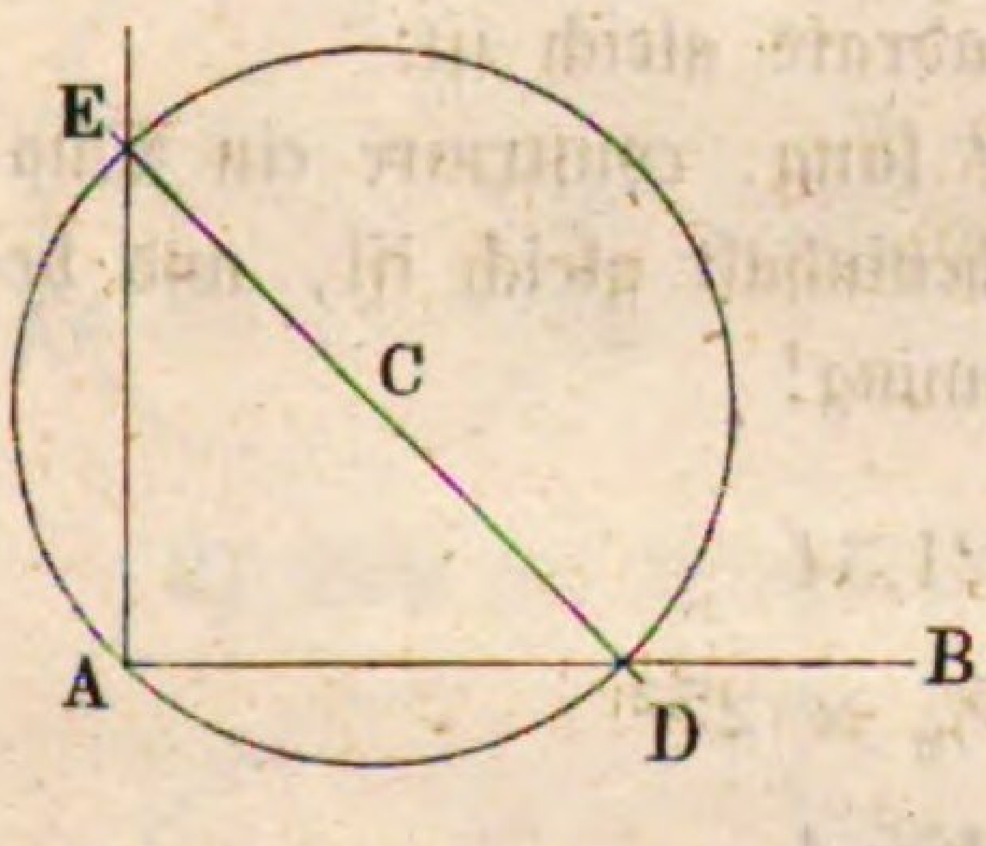
Diese Aufgabe gehört in die Klasse der unbestimmten, indem man in dem Halbkreise unzählig verschiedene Punkte, wie D annehmen kann, wodurch immer die Aufgabe richtig gelöſ't wird; allein außer dem Halbkreise über oder unter AB ist es unmöglich einen Punkt zu finden, von welchem ein Paar Linien, nach A und B gezogen, einen rechten Winkel einschlößen.

Unter allen rechtwinkligen Dreiecken über AB ist das gleichschenklige, dessen Spitze in die Mitte des Halbkreises fällt, das größte; denn Dreiecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen. Auch hat das



gleichschenklige Dreieck den größten Umfang; denn man setze, es sei der Abschnitt ACB ein Halbkreis, so daß die Dreiecke ACB und ADB rechtwinklig wären, und denke sich alsdann eine gerade Linie von C nach E, so ist $AC + CE > AE$; folglich auch $AC + CB >$ als $AD + DB$.

II. Auf das Ende einer geraden Linie ein Perpendikel zu errichten!



Auflösung:

Es soll in A auf AB ein Perpendikel errichtet werden; man setze den Zirkel in einen beliebigen Punkt C über AB, eröffne ihn bis A, beschreibe einen Bogen, der AB in D schneidet, ziehe durch C und D die Linie DE, so ist E der Punkt, durch welchen das verlangte Perpendikel geht.

Beweis:

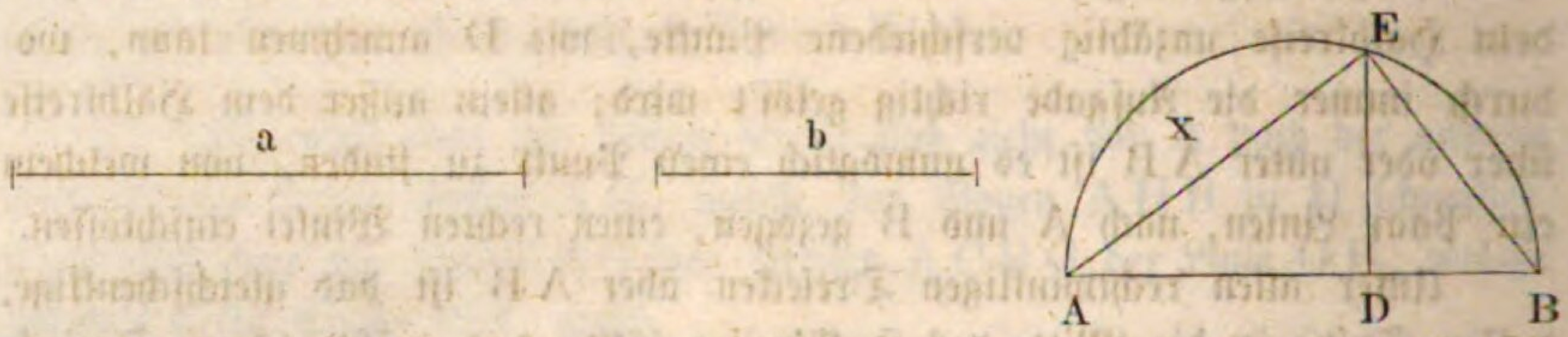
Die Linie DE ist ein Durchmesser des um C beschriebenen Kreises, folglich DAE ein Winkel im Halbkreise, also = R.

III. Zu zwei gegebenen Linien, a und b, die mittlere Proportionallinie zu finden.

Auflösung:

Diese Aufgabe ist schon früher gelöſ't worden; wir wollen dieselbe aber hier auf eine andere Weise nochmals ausführen. Man mache AB = a

und beschreibe darüber einen Halbkreis. Sodann mache man $AD = b$, errichte aus D ein Perpendikel DE auf AB und ziehe AE, so ist diese die verlangte mittlere Proportionallinie.



Beweis:

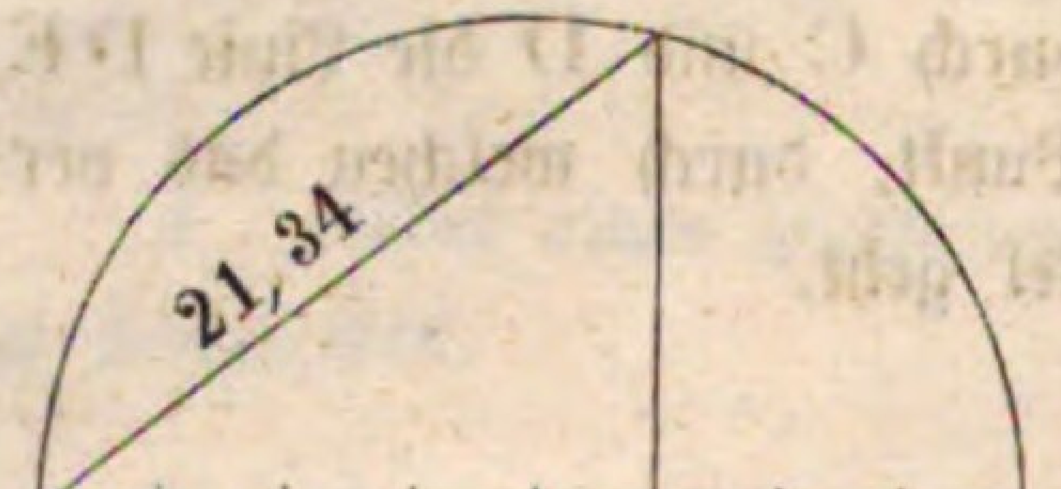
Man ziehe BE; so ist Dreieck AEB rechtwinklig, ED ein Perpendikel aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse, und daher verhält sich $AD : AE = AE : AB$ oder

$$b : AE = AE : a.$$

Das Quadrat von AE ist also so groß, als ein Parallelogramm, dessen Grundlinie $= a$ und dessen Höhe $= b$ ist, also ein Rechteck. Ein Parallelogramm wird demnach in ein Quadrat verwandelt, wenn man zwischen seiner Grundlinie und Höhe die mittlere Proportionallinie sucht und diese zur Seite des Quadrats nimmt.

Es sei AB in m gleiche Theile getheilt, und AD enthalte n solcher Theile, so ist $AE^2 = \frac{n}{m} AB^2$. Dieser Satz lehrt ein Quadrat finden, welches irgend einem Theile eines gegebenen Quadrats gleich ist.

Es sei z. B. die Seite eines Quadrats 27′ lang; construire ein Quadrat, welches dem $^5/_8$ Theile desselben an Flächeninhalt gleich ist, und beweise die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!



$$x = 21{,}34$$
$$(21{,}34)^2 = {}^5/_8 \times 27^2$$
$$(21{,}34)^2 = 455{,}4$$
$${}^5/_8 \times 27^2 = 455{,}625.$$

Es ist auch ED die mittlere Proportionallinie zwischen AD und DB.

§. 8.

Lehrsatz:

Der Winkel BAD, den die Tangente CD mit der Sehne AB in dem Berührungspunkte A macht, ist dem Winkel E im entgegenstehenden Abschnitt des Kreises gleich.

Beweis:



Man errichte in A ein Perpendikel AF auf die Tangente, dies geht durch den Mittelpunkt, und ziehe BF; so ist der Winkel ABF = R, folglich ist F + m auch = R. Da nun nach der Construction BAD + m = R ist, so ist auch F + m = BAD + m, und daher BAD = F. Es ist aber F = E, mithin BAD = E. Ebenso ist der Winkel BAC jedem Winkel in dem Abschnitt BAG gleich.

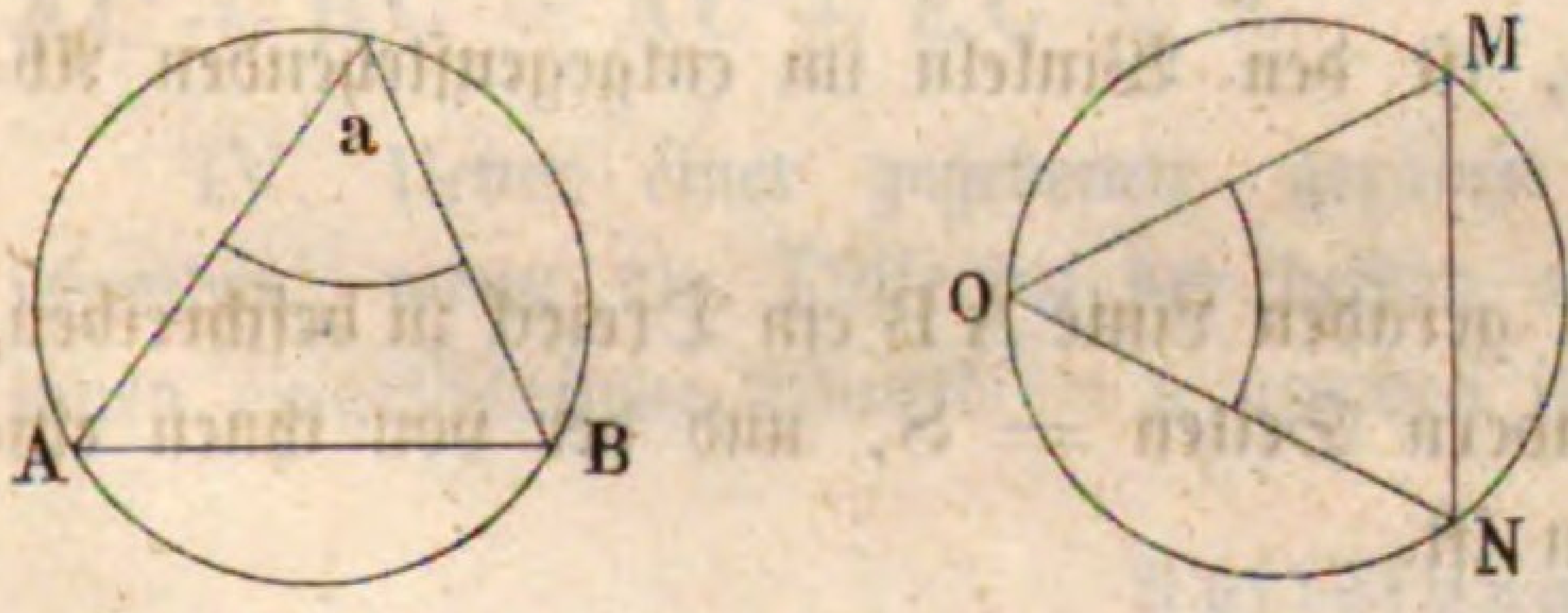
§. 9.

Aufgaben.

I. Ueber einer gegebenen, geraden Linie AB einen Kreisabschnitt zu construiren, in welchem alle Winkel einem gegebenen Winkel a gleich sind.

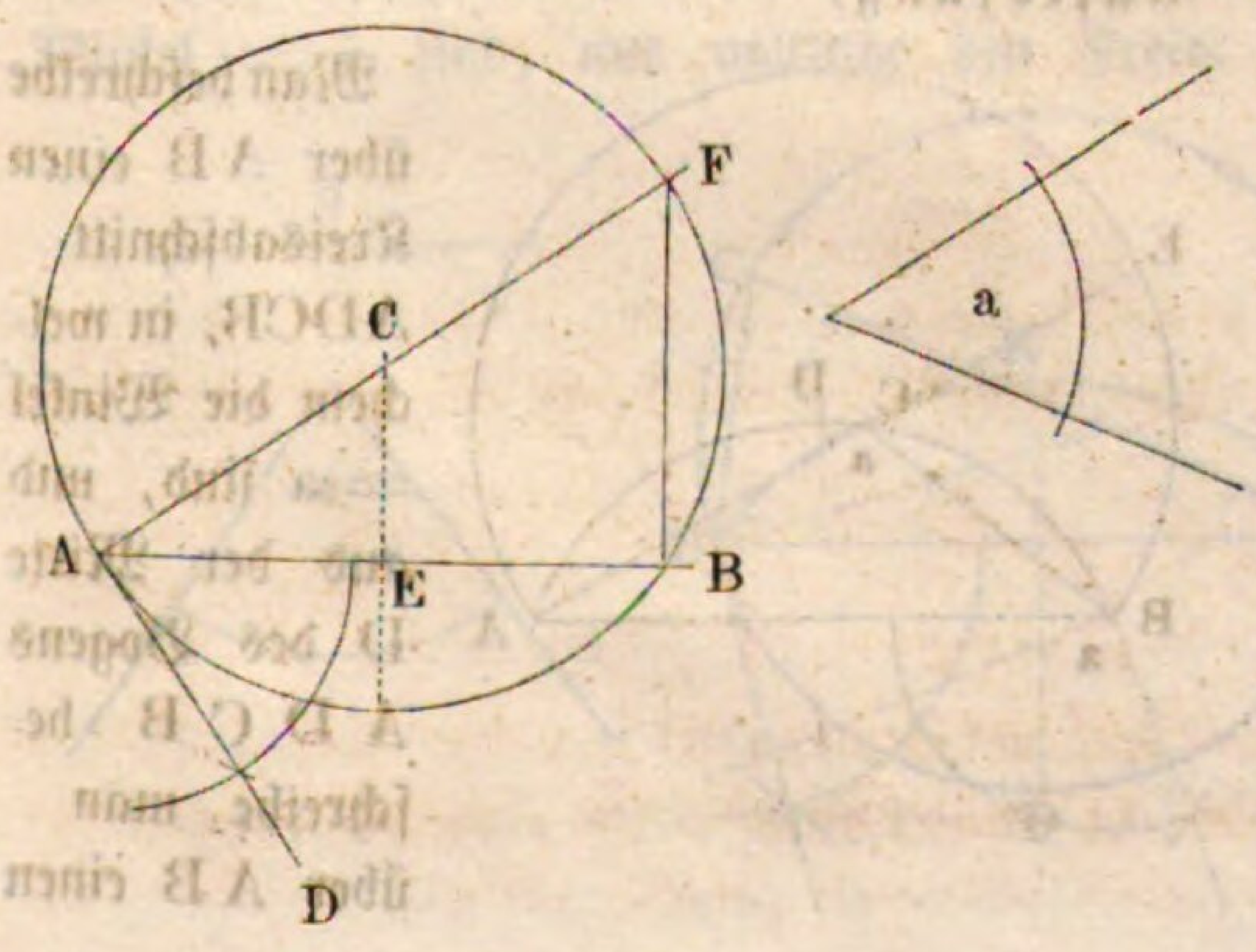
Auflösung:

1) Es sei Winkel MON = a; man mache aus einem beliebigen Punkte M des einen Schenkels mit einer Eröffnung des Zirkels = AB einen Durchschnitt in N auf dem andern Schenkel, ziehe MN und beschreibe einen



Kreis um das Dreieck MON; so erhält man den verlangten Abschnitt über MN = AB, welcher alsdann auf AB übertragen werden kann.

2) Soll der Abschnitt unmittelbar über AB verzeichnet werden, so lege



man eine Linie AD von beliebiger Länge an AB in A unter einem Winkel BAD = a; errichte aus A ein Perpendikel AF auf AD und aus E, der Mitte von AB, ein Perpendikel EC auf AB; der Durchschnittspunkt beider Perpendikel ist der Mittelpunkt des Kreises, der den gesuchten Abschnitt AFB gibt.

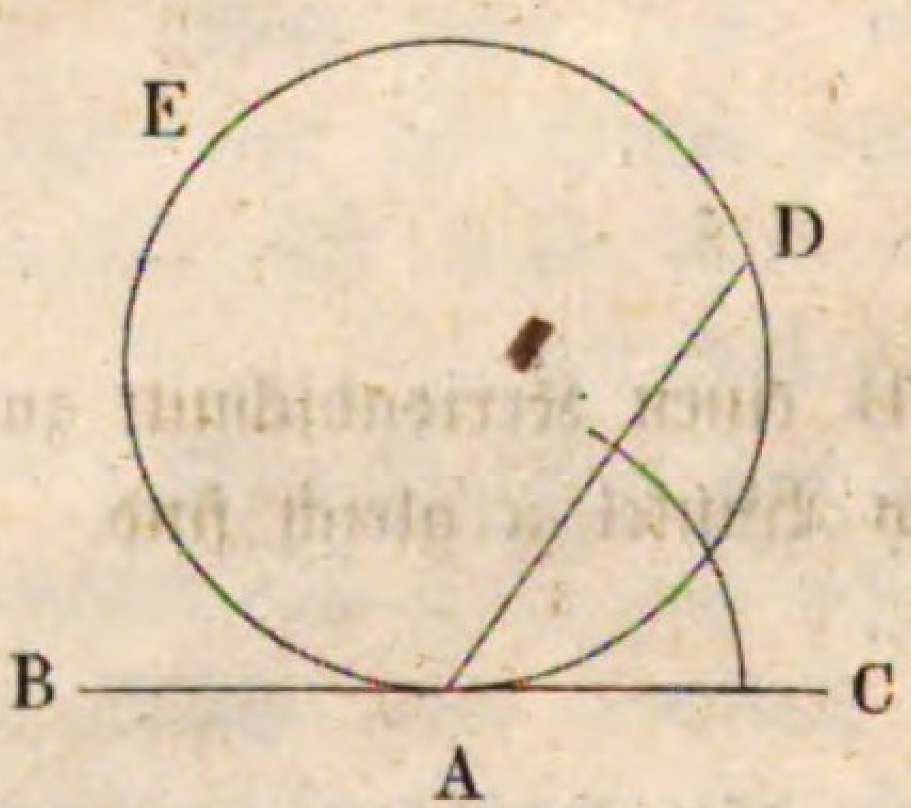
Beweis:

Für № 1 ergiebt sich der Beweis unmittelbar aus der Construction.

Für № 2 ist zu bemerken, daß AD eine Tangente des Kreises in A; folglich der Winkel BAD den Winkeln des Abschnitts AFB gleich ist. Es ist aber nach der Construction Winkel BAD = a; mithin sind die Winkel des Abschnitts AFB = a.

II. Von einem gegebenen Kreise ein Segment abzuschneiden, dessen Winkel einem gegebenen Winkel a gleich sind.

Auflösung:





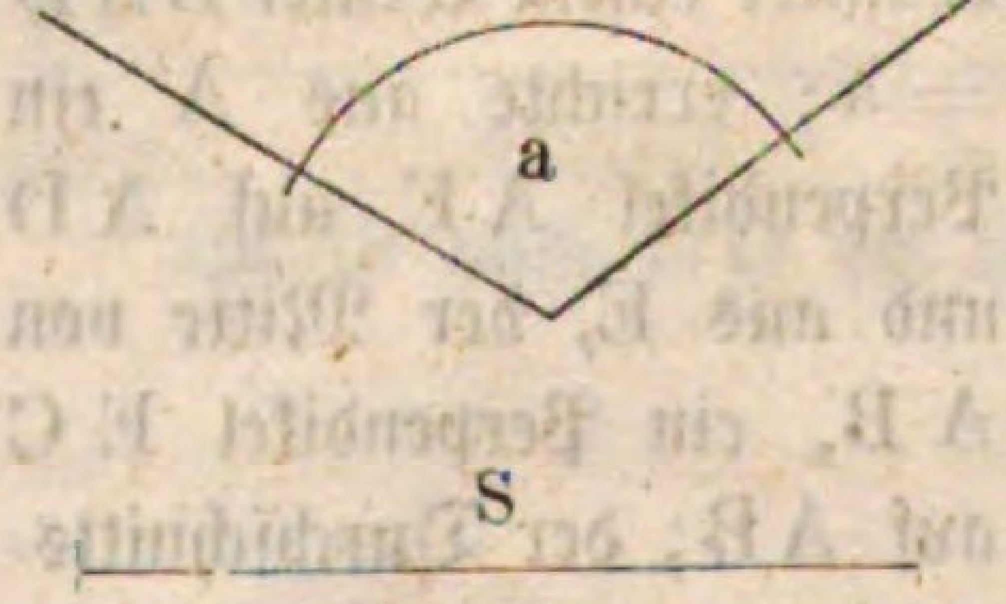
Man ziehe in A an dem gegebenen Kreise die Tangente BC und trage in A den gegebenen Winkel a = DAC an; so ist AED das verlangte Segment.

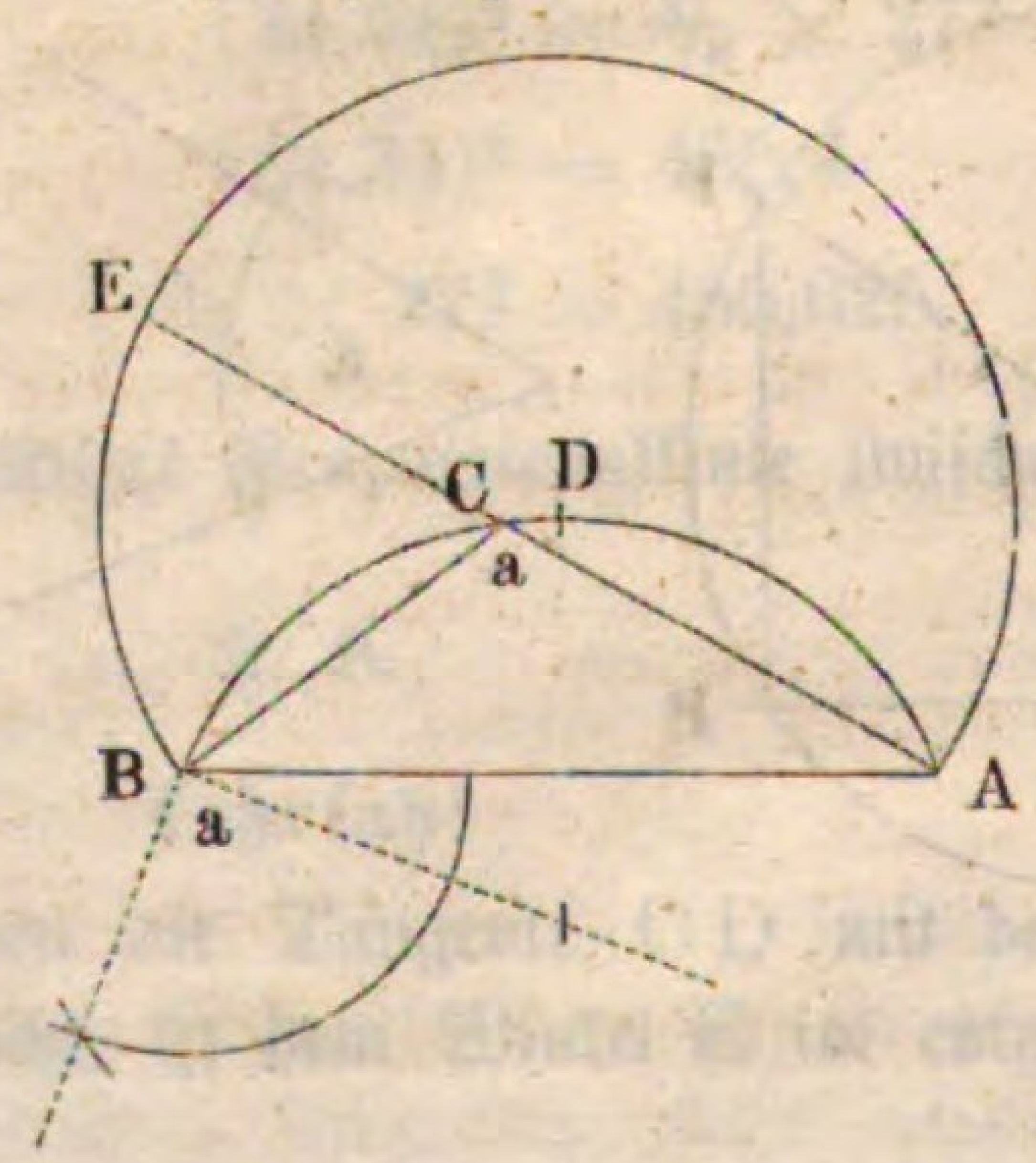
Beweis:

Nach der Construction ist Winkel DAC gleich dem gegebenen Winkel a; der Winkel DAC aber, den die Tangente BC mit der Sehne AD in dem Berührungspunkte A macht, ist den Winkeln im entgegenstehenden Abschnitt AED gleich.

III. Ueber einer gegebenen geraden Linie AB ein Dreieck zu beschreiben, wenn die Summe der beiden andern Seiten = S, und der von ihnen eingeschlossene Winkel = a gegeben ist.

Auflösung:





Man beschreibe über AB einen Kreisabschnitt ADCB, in welchem die Winkel = a sind, und aus der Mitte D des Bogens ADCB beschreibe man über AB einen

zweiten Abschnitt AEB; alsdann durchschneide man aus A mit einer Eröffnung des Zirkels AE = S den äußern Bogen in E, ziehe die Linie AE, und aus dem Durchschnittspunkt derselben mit dem innern Bogen, nämlich aus C, die Linie CB; so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis:

Der Winkel ACB ist ein Winkel des Abschnitts ADCB und nach der Construction = a; ferner ist CE = CB und AC + CE = S; also ist auch AC + CB = S.

Wäre S dem Durchmesser des Kreises um D gleich, so wäre das Dreieck gleichschenklig und das möglichst größte über AB mit dem Winkel a. Wenn also S größer als dieser Durchmesser wäre, so würde das Dreieck unmöglich sein.

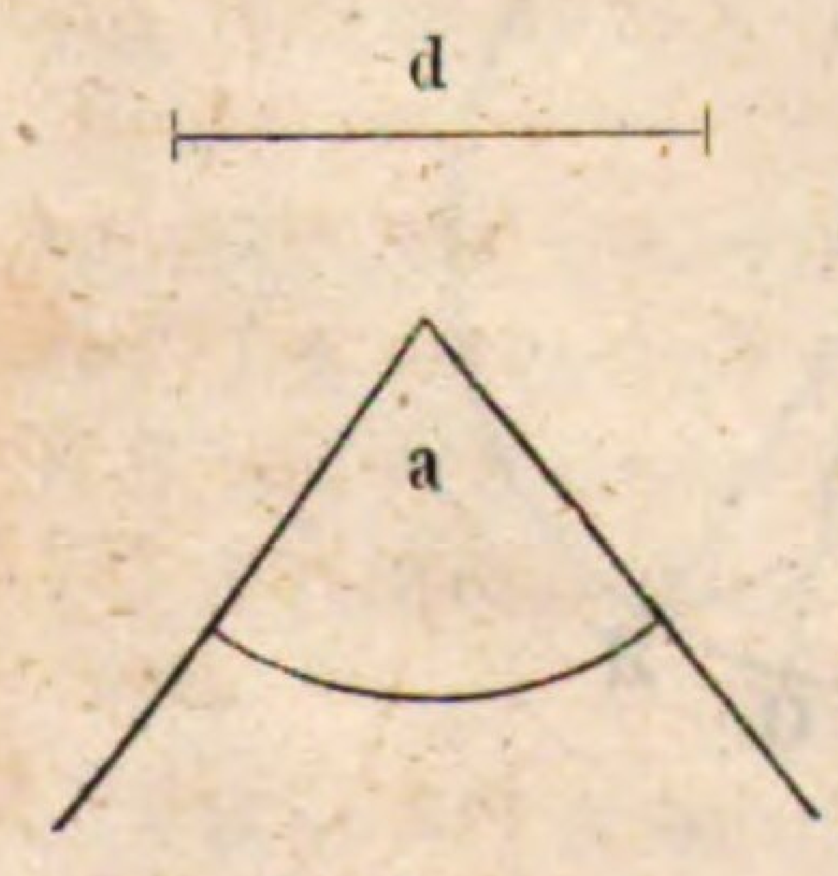
Wird nur verlangt, über AB ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel in der Spitze = a sei, zu beschreiben, so braucht man nur in dem Abschnitte ADCB nach der Mitte seines Bogens D aus A und B gerade Linien zu ziehen.

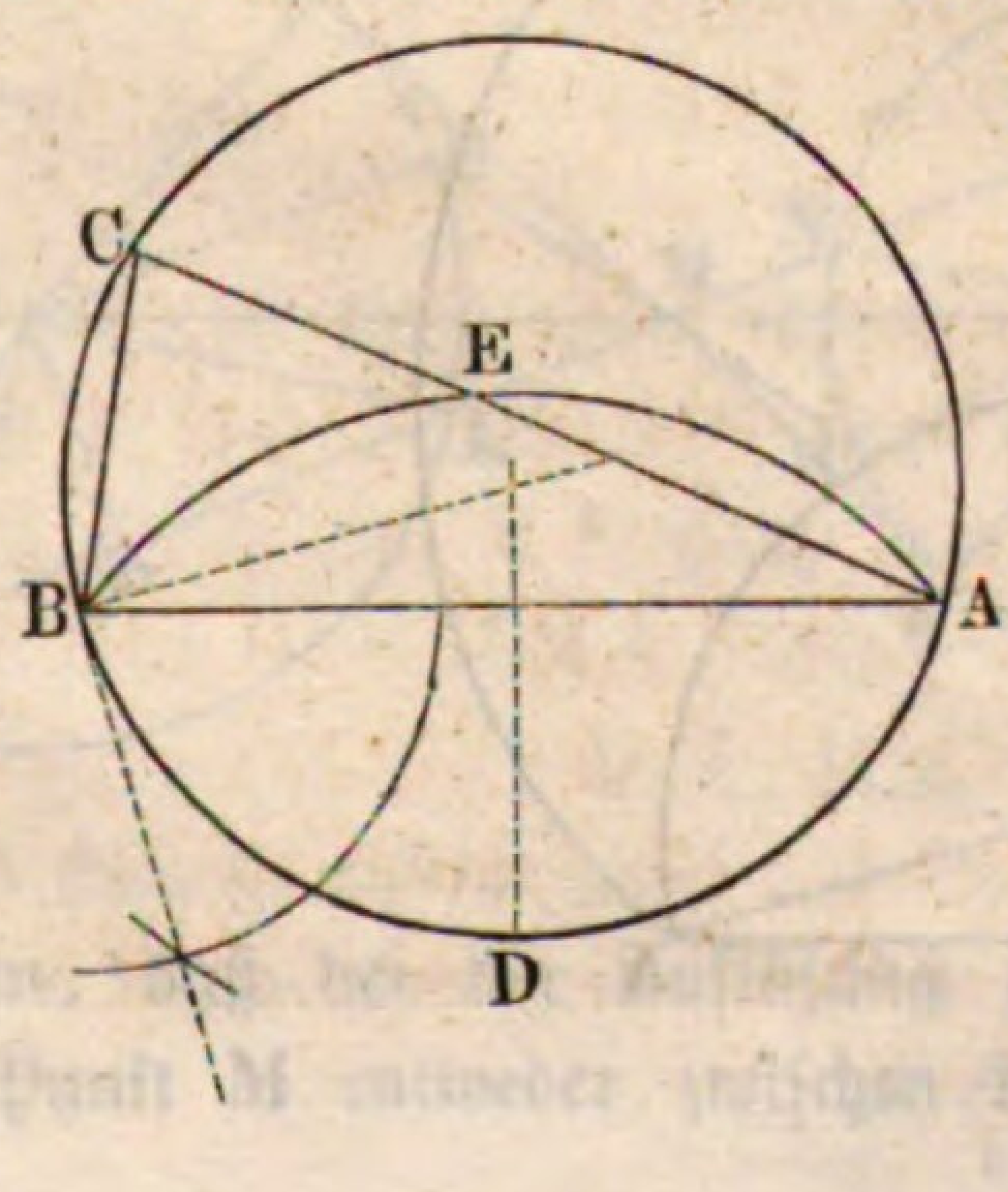
Wäre anstatt des Winkels ACB der Winkel BAC gegeben, so lege man AE = S an AB unter einem Winkel = BAC, ziehe eine gerade Linie von B nach E und lege BC unter einem Winkel = BEC an BE; alsdann ist das Dreieck BEC gleichschenklig und daher BC = EC; mithin AC + BC = AC + EC = S.

IV. Ueber einer gegebenen, geraden Linie AB ein Dreieck zu beschreiben, wenn die Differenz der beiden andern Seiten = d und der von ihnen eingeschlossene Winkel = a gegeben ist.

Auflösung:

Man beschreibe über AB einen Kreisabschnitt ACB, in welchem alle Winkel = a sind, und vollende den Kreis. Aus der Mitte D des entgegenstehenden Bogens ADB schlage man mit einer Eröffnung des Zirkels = AD einen Bogen AEB und aus A mache man mit dem Halbmesser AE = d einen Durchschnitt in E; darauf ziehe man durch A





und E die Linie A C und von B nach C die Linie BC; so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis:

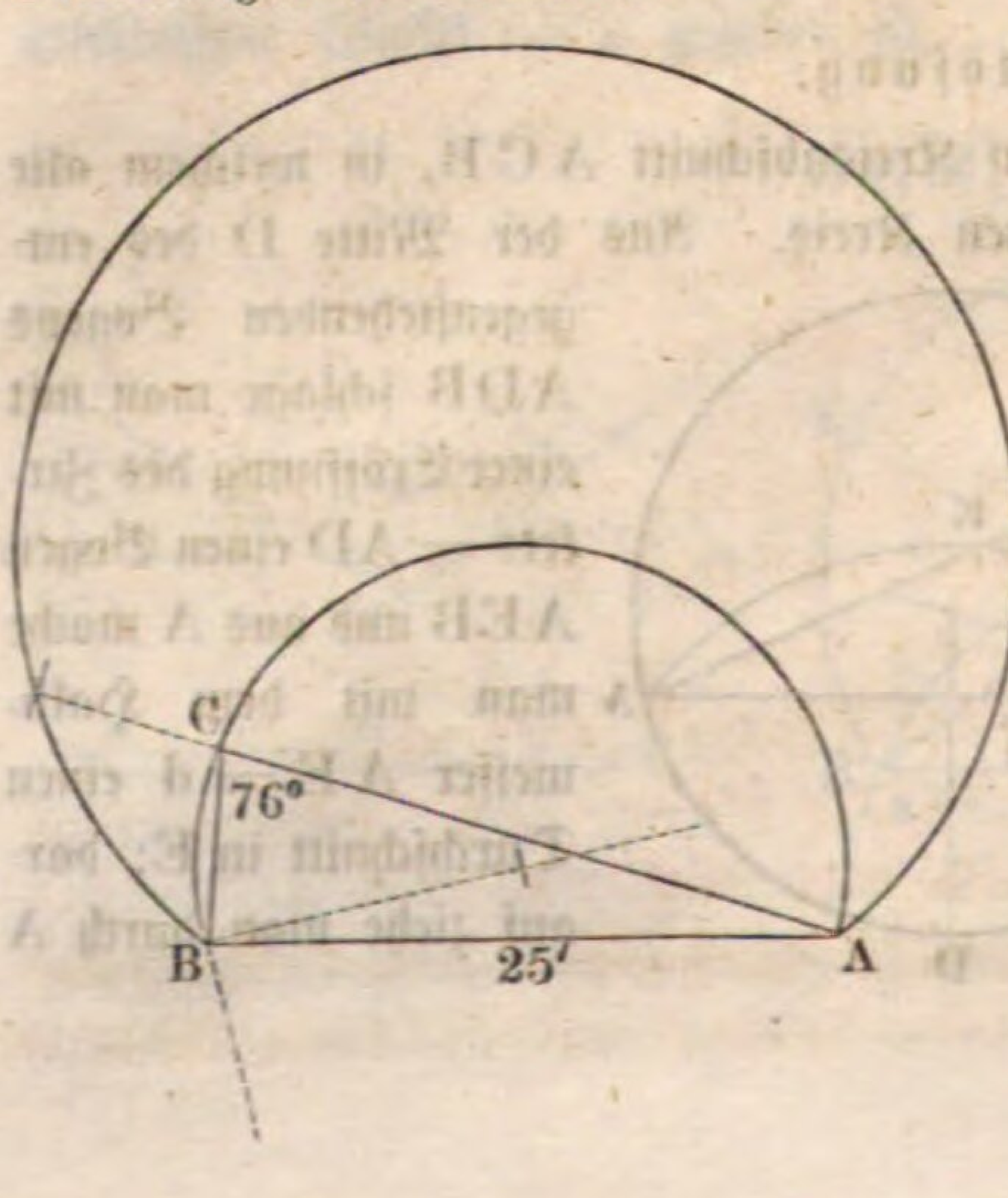
Da nach der Construction alle Winkel des Abschnitts ACB = a sind; so ist auch C = a, ferner ist BC = EC und AE = d; also ist AC — BC = AC — EC = AE = d.

Ist die gegebene Differenz d = o, so kann man sich vorstellen, es falle der Punkt E mit dem Punkt A zusammen; folglich wird A C zur Tangente in A, ebenso BC zur Tangente in B, und das Dreieck ABC gleichschenklig.

Wäre anstatt des Winkels A C B der Winkel B A C gegeben, so lege man AE = d unter einem Winkel = BAC an AB in A und ziehe eine Linie von B nach E, alsdann verlängere man AE und beschreibe über BE das gleichschenklige Dreieck BCE, dessen Winkel an der Grundlinie durch die verlängerte AE bestimmt ist.

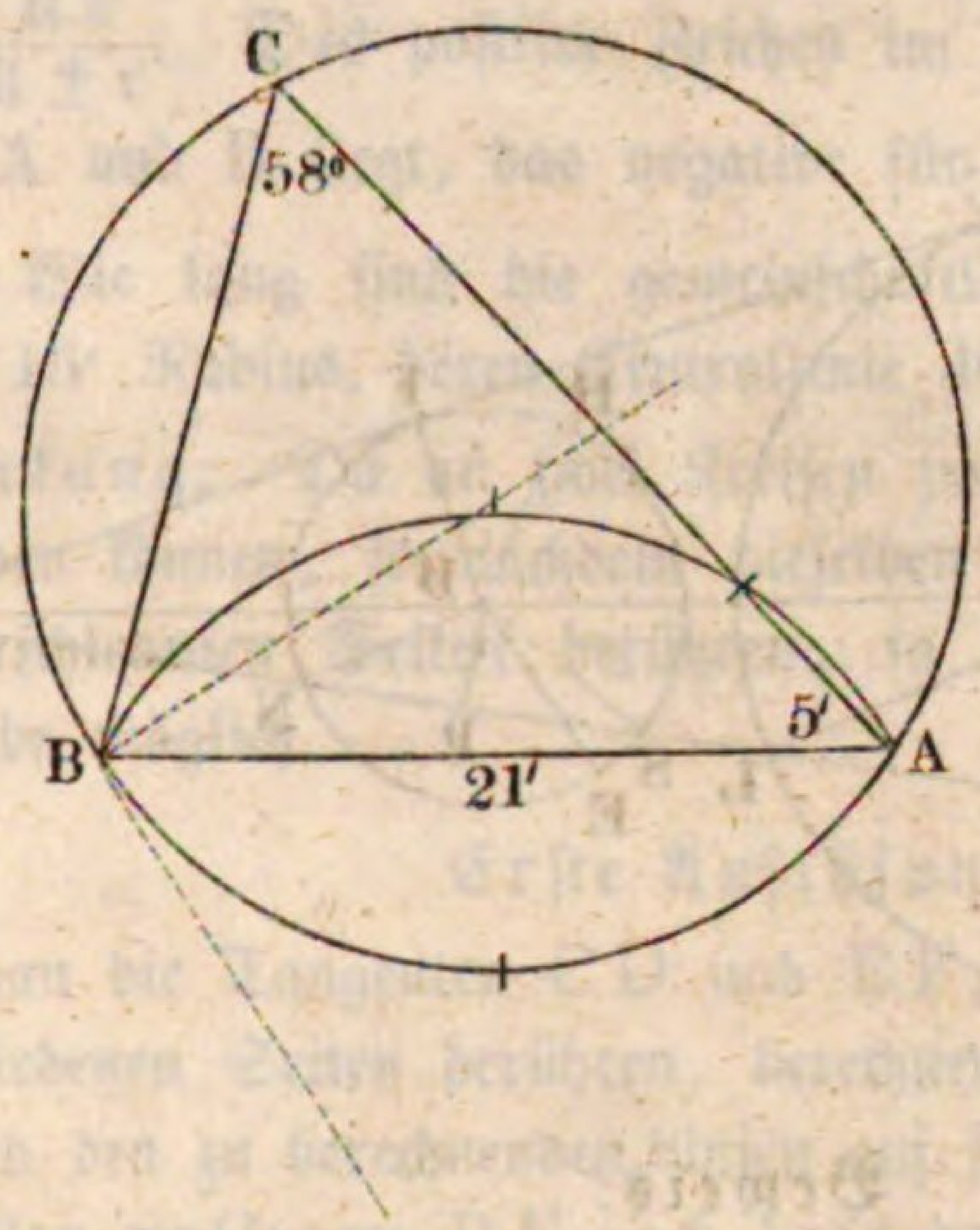
Wenn dagegen der Winkel ABC gegeben wäre, so brauchte man nur eine Linie BC von unbestimmter Länge unter diesem Winkel an AB in B zu legen, diese unterhalb B um ein Stück = AE = d zu verlängern, von dem untern Ende derselben nach A eine gerade Linie zu ziehen und über dieser ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel durch die Lage der rückwärts verlängerten BC gegen die Grundlinie bestimmt ist, zu beschreiben. Dadurch würde man den Punkt C und zugleich das ganze Dreieck erhalten.

V. Beschreibe über einer geraden Linie von 25′ lang ein Dreieck, in welchem die Summe der beiden andern Seiten 33′ lang und der von ihnen eingeschlossene Winkel 76⁰ groß ist, und bestimme die beiden unbekannten Seitenlängen des Dreiecks!



Seite A C = 26′
" BC = 7′.

VI. Construire über einer geraden Linie von 21′ lang ein Dreieck, in welchem die Differenz der beiden andern Seiten 5′ und der von ihnen eingeschlossene Winkel 58° groß ist, und bestimme die Länge der beiden unbekannten Seiten!

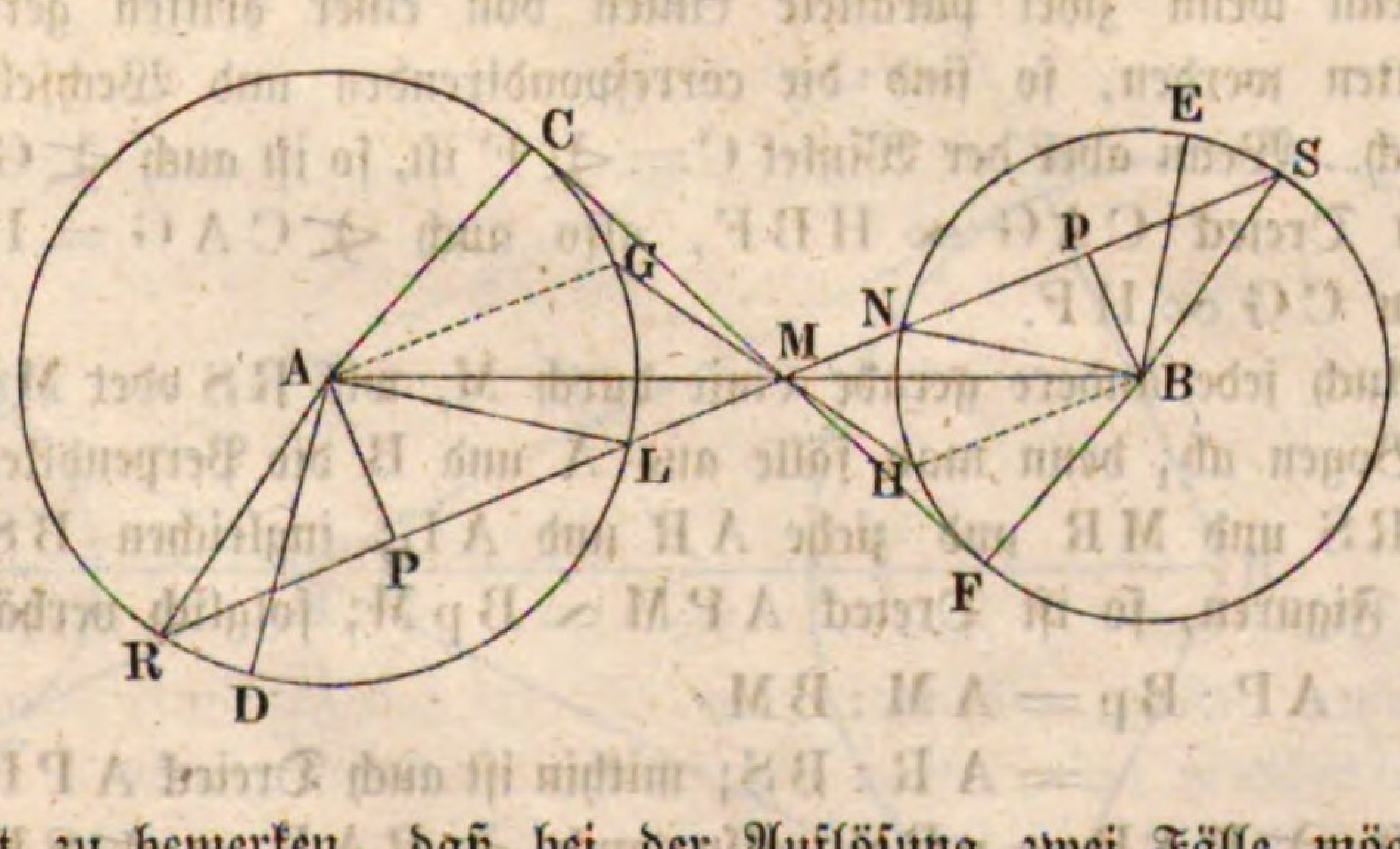


Seite A C = 24′
" B C = 19′.

VII. Wenn zwei Kreise in einer Ebene gegeben sind, in der geraden Linie A B, welche durch ihre Mittelpunkte geht, den Punkt M zu finden, dessen Lage so beschaffen ist, daß jede gerade Linie, welche durch denselben hindurch geht und die Kreise schneidet, ähnliche Bogen von ihnen abschneidet.

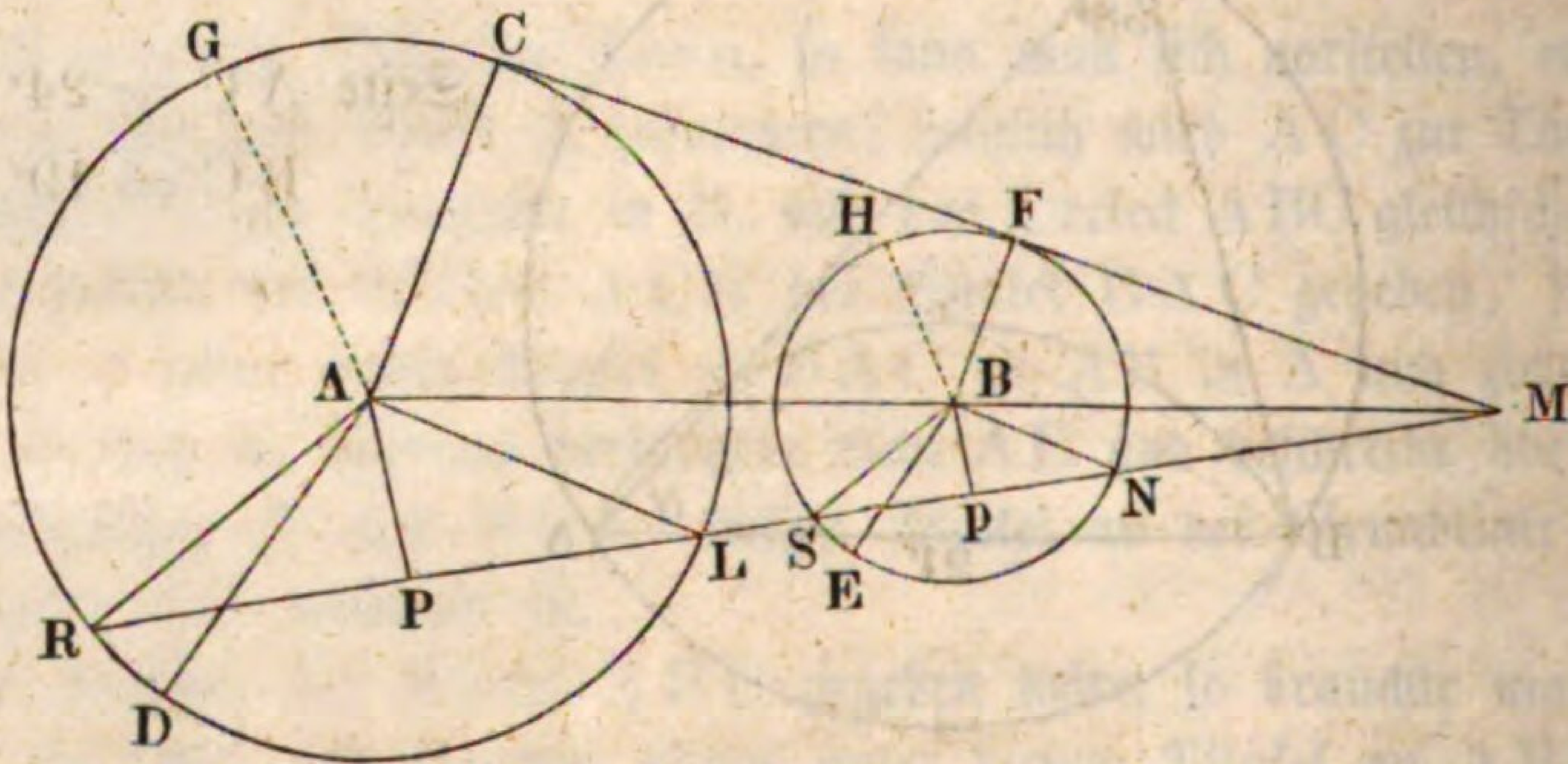
Auflösung:

Man ziehe durch A und B zwei einander parallele Halbmesser, A C und B F, und durch die Endpunkte C und F eine gerade Linie C F. Der Punkt M, in welchem diese die Centrallinie schneidet, ist der gesuchte Punkt.



Es ist zu bemerken, daß bei der Auflösung zwei Fälle möglich sind: es liegt nämlich der Punkt M entweder zwischen den Mittelpunkten beider

Kreise, oder außerhalb derselben. Im letztern Falle müssen die Linien A B und C F so weit verlängert werden, bis sie sich schneiden. Auch kann man unterscheiden, ob die Kreise einander schneiden, oder nur berühren, oder wie hier ganz außerhalb einander liegen; in allen Fällen aber gilt die gegebene Auflösung.



Beweis:

1) Die Dreiecke A C M und B F M sind einander ähnlich; folglich verhält sich

A C : A M = B F : B M oder:

A C : B F = A M : B M.

Da aber alle Halbmesser eines Kreises einander gleich sind, so bleibt der Punkt M immer derselbe, welche Lage im Kreise auch die parallelen Durchmesser haben mögen.

2) Man ziehe A G und B H; die Winkel bei C und F sind einander gleich, denn wenn zwei parallele Linien von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, so sind die correspondirenden und Wechselwinkel einander gleich. Wenn aber der Winkel C = ∢ F ist, so ist auch ∢ G = ∢ H; mithin ist Dreieck C A G ∾ H B F, also auch ∢ C A G = H B F oder der Bogen C G ∾ H F.

3) Auch jede andere gerade Linie durch M, wie R S oder M R schneidet ähnliche Bogen ab; denn man fälle aus A und B die Perpendikel A P und B p auf R S und M R und ziehe A R und A L, ingleichen B S und B N in beiden Figuren, so ist Dreieck A P M ∾ B p M; folglich verhält sich

A P : B p = A M : B M

= A R : B S; mithin ist auch Dreieck A P R ∾ B p S; folglich ist ∢ P A R = p B S, also auch ∢ R A L = ∢ S B N; daher der Bogen R D L ∾ S E N.

Wenn die Kreise einander berühren, so liegt der Punkt M, der zwischen A und B fällt, im Berührungspunkte. Auch die gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise gehen durch die Punkte M.

Setzt man die Linie $AB = a$, $AC = R$, $BF = r$ und $AM = x$; so ist $x = \frac{Ra}{R \pm r}$. Das positive Zeichen im Nenner gilt für den Fall, wo M zwischen A und B liegt, das negative für den, wo M außerhalb liegt.

VIII. Wie lang sind die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise von 5′ und 13′ Radius, deren Centrallinie 40′ lang ist?

Anmerkung: Da an zwei Kreisen zwei Paar verschiedene Tangenten gezogen werden können, je nachdem dieselben die beiden Kreise an derselben oder an verschiedenen Seiten berühren, so ist auch eine doppelte Lösung dieser Aufgabe möglich.

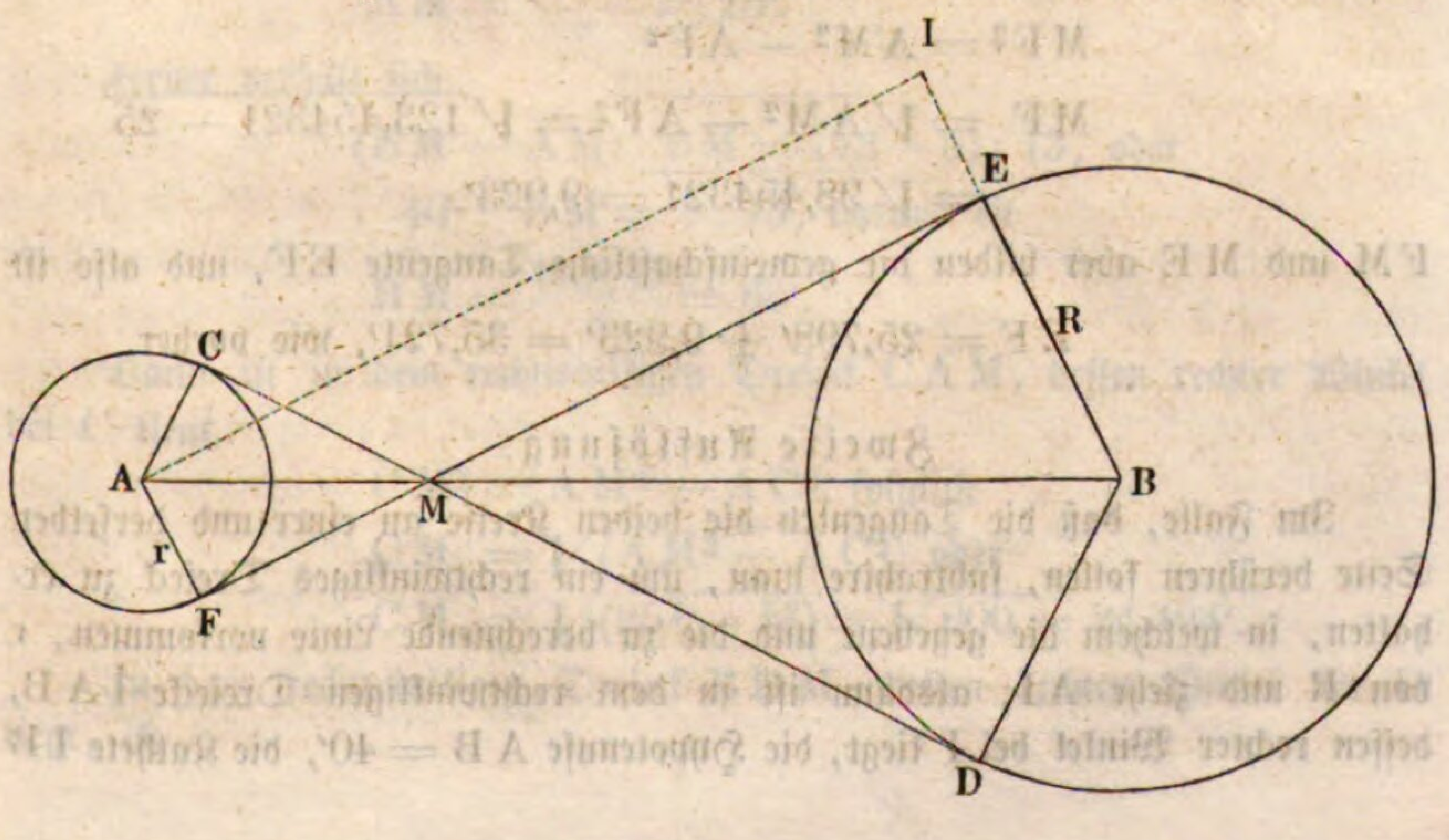
Erste Auflösung:

Will man die Tangenten CD und EF, welche die Kreise um A und B an verschiedenen Seiten berühren, berechnen; so construire man aus den gegebenen und den zu berechnenden Linien auf folgende Weise ein rechtwinkliges Dreieck: Man verlängere BE nach I, so daß $EI = AF$ werde und verbinde den Punkt I mit A. Alsdann ist AIB ein rechtwinkliges Dreieck, dessen rechter Winkel bei I liegt und worin die Hypotenuse $AB = 40'$, die Kathete $BI = R + r = 18'$, die andere Kathete BI gleich der zu berechnenden Tangente EF ist. Dann ist

$$AI^2 = AB^2 - BI^2$$

$$AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{1600 - 324}$$

$$= \sqrt{1276} = 35{,}721' = AI, =$$ der Tangente EF oder CD.



Will man ohne Hülfslinien zur Lösung der Aufgabe gelangen, so gehe man von dem Satze aus, daß die Centrallinie durch die gemeinschaftlichen Tangenten in zwei Stücke zerlegt wird, welche den Radien der Kreise proportional sind. In nebenstehender Figur wird die Centrallinie A B, welche 40′ lang ist, in zwei Stücke zerlegt, welche sich wie r : R, oder wie 5 : 13 verhalten; also verhält sich

$$AM : BM = 5 : 13$$

$$(AM + BM) : AM = (5 + 13) : 5$$

$AM + BM$ ist aber $= 40'$; folglich verhält sich

$40' : AM = 18 : 5$. Daraus ist

$$AM = \frac{5 \times 40}{18} = 11{,}111' \ldots$$

Ferner verhält sich

$(AM + BM) : BM = (5 + 13) : 13$ oder

$40 : BM = 18 : 13$; hieraus ist

$$BM = \frac{13 \times 40}{18} = 28{,}888' \ldots$$

Nun ist in dem Dreieck E M B

$$BM^2 = ME^2 + BE^2$$

$$ME^2 = BM^2 - BE^2$$

$ME = \sqrt{BM^2 - BE^2}$ oder

$$ME = \sqrt{(28{,}888^2 - 13^2)} = \sqrt{(834{,}516544 - 169)}$$

$$= \sqrt{665{,}516544} = 25{,}798'.$$

Ebenso ist in dem Dreieck F M A

$$MF^2 = AM^2 - AF^2$$

$$MF = \sqrt{AM^2 - AF^2} = \sqrt{123{,}454321 - 25}$$

$$= \sqrt{98{,}454321} = 9{,}923'.$$

F M und M E aber bilden die gemeinschaftliche Tangente E F, und also ist

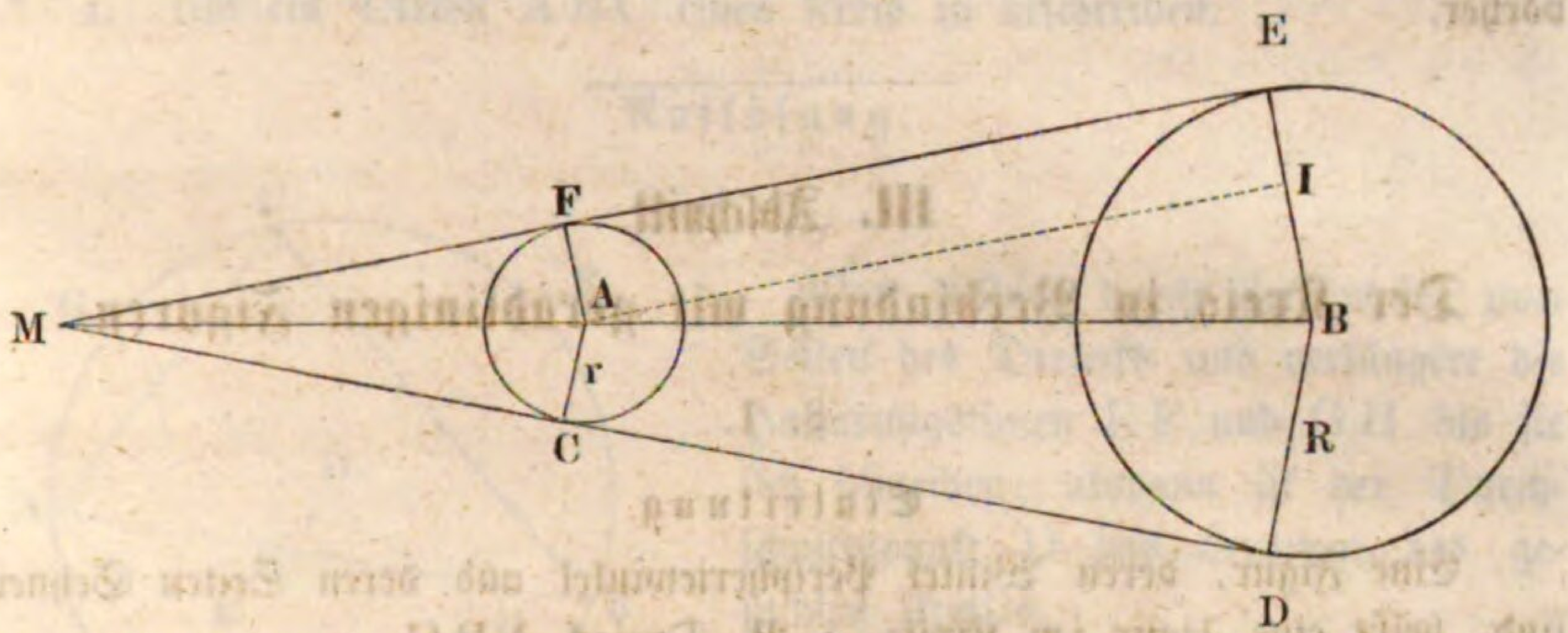
$EF = 25{,}798' + 9{,}923' = 35{,}721'$, wie vorher.

Zweite Auflösung:

Im Falle, daß die Tangenten die beiden Kreise an einer und derselben Seite berühren sollen, subtrahire man, um ein rechtwinkliges Dreieck zu erhalten, in welchem die gegebene und die zu berechnende Linie vorkommen, r von R und ziehe A I; alsdann ist in dem rechtwinkligen Dreiecke I A B, dessen rechter Winkel bei I liegt, die Hypotenuse $AB = 40'$, die Kathete I B

$= R - r = 13 - 5 = 8'$, und die andere Kathete = der zu berechnenden Tangente EF oder CD. Es ist aber $AI^2 = AB^2 - BI^2$, folglich

$$AI = \sqrt{(AB^2 - BI^2)} \text{ oder}$$
$$AI = \sqrt{(40^2 - 8^2)} = \sqrt{(1600 - 64)}$$
$$= \sqrt{1536} = 39{,}191' = \text{Tangente } DC \text{ oder } EF.$$



Soll auch hier die Construction der Hülfslinien wegfallen, so gehe man wie eben von dem Satze aus, daß die Centrallinie oder, wie hier, die verlängerte Centrallinie durch die gemeinschaftlichen Tangenten in zwei Stücke zerlegt wird, welche den Radien der beiden Kreise proportional sind. Demnach verhält sich

$BM : AM = 13 : 5$, ferner

$(BM - AM) : AM = (13 - 5) : 5$, wofür man, da

$BM - AM = 40'$ ist, setzen kann:

$40 : AM = 8 : 5$; daraus ist

$$AM = \frac{5 \times 40}{8} = 25'.$$

Ferner verhält sich

$(BM - AM) : BM = (13 - 5) : 13$, oder

$40 : BM = 8 : 13$, daraus ist

$$BM = \frac{13 \times 40}{8} = 65'.$$

Dann ist in dem rechtwinkligen Dreieck CAM, dessen rechter Winkel bei C liegt,

$CM^2 = AM^2 - AC^2$, folglich

$$CM = \sqrt{(AM^2 - AC^2)} \text{ oder}$$
$$CM = \sqrt{(25^2 - 5^2)} = \sqrt{600} = 24{,}494'.$$

In dem rechtwinkligen Dreieck BDM, dessen rechter Winkel bei D liegt, ist

$$MD^2 = MB^2 - BD^2, \text{ demnach}$$
$$MD = \sqrt{(MB^2 - BD^2)} \text{ oder}$$
$$MD = \sqrt{(65^2 - 13^2)} = \sqrt{4056} = 63{,}686'.$$

Da nun MD = Tangente $CD + MC$ ist, so ist demnach die gesuchte Tangente $CD = MD - MC = 63{,}686 - 24{,}495 = 39{,}191$, wie vorher.

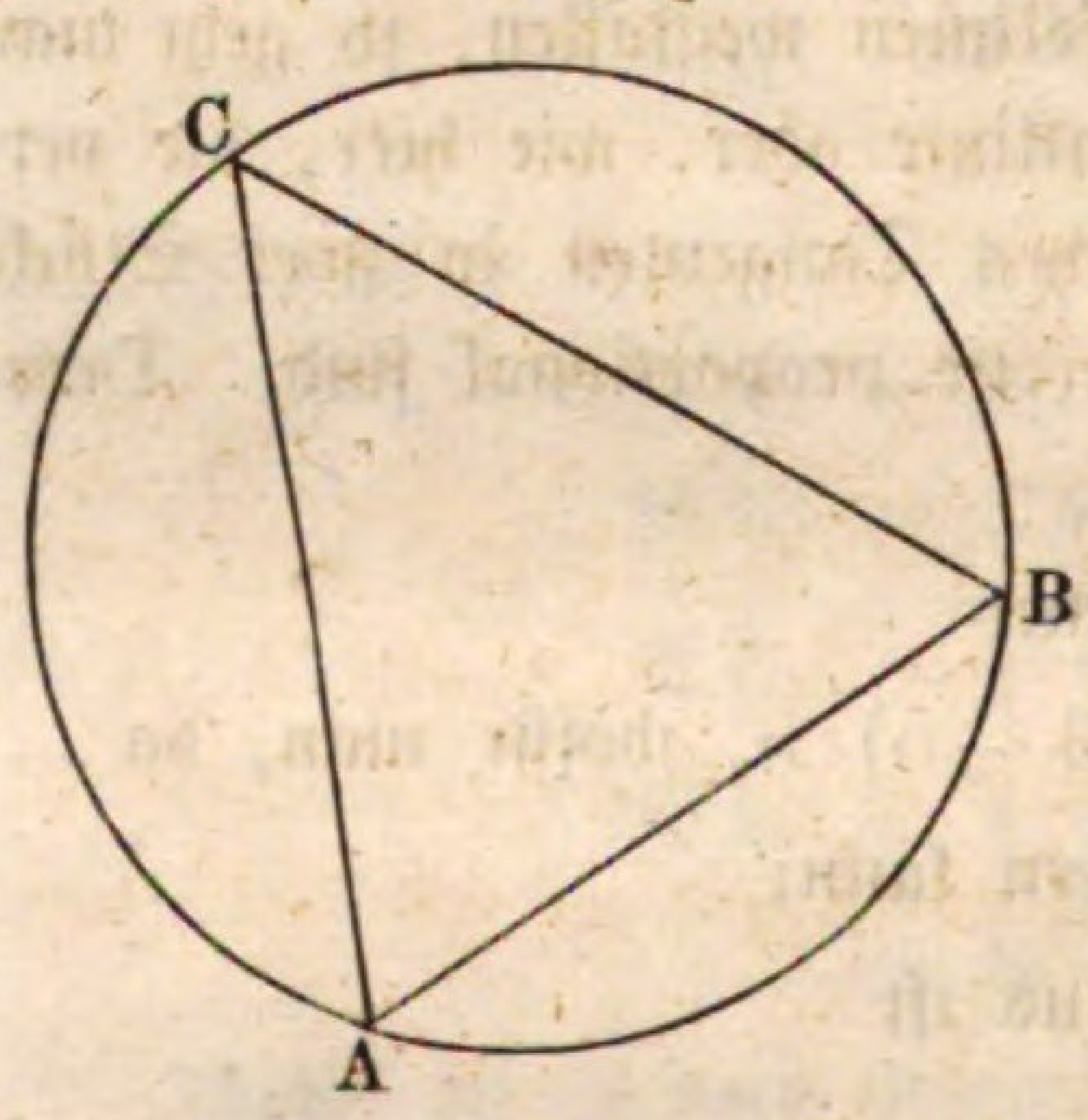
III. Abschnitt.

Der Kreis in Verbindung mit geradlinigen Figuren.

§. 1.

Einleitung.

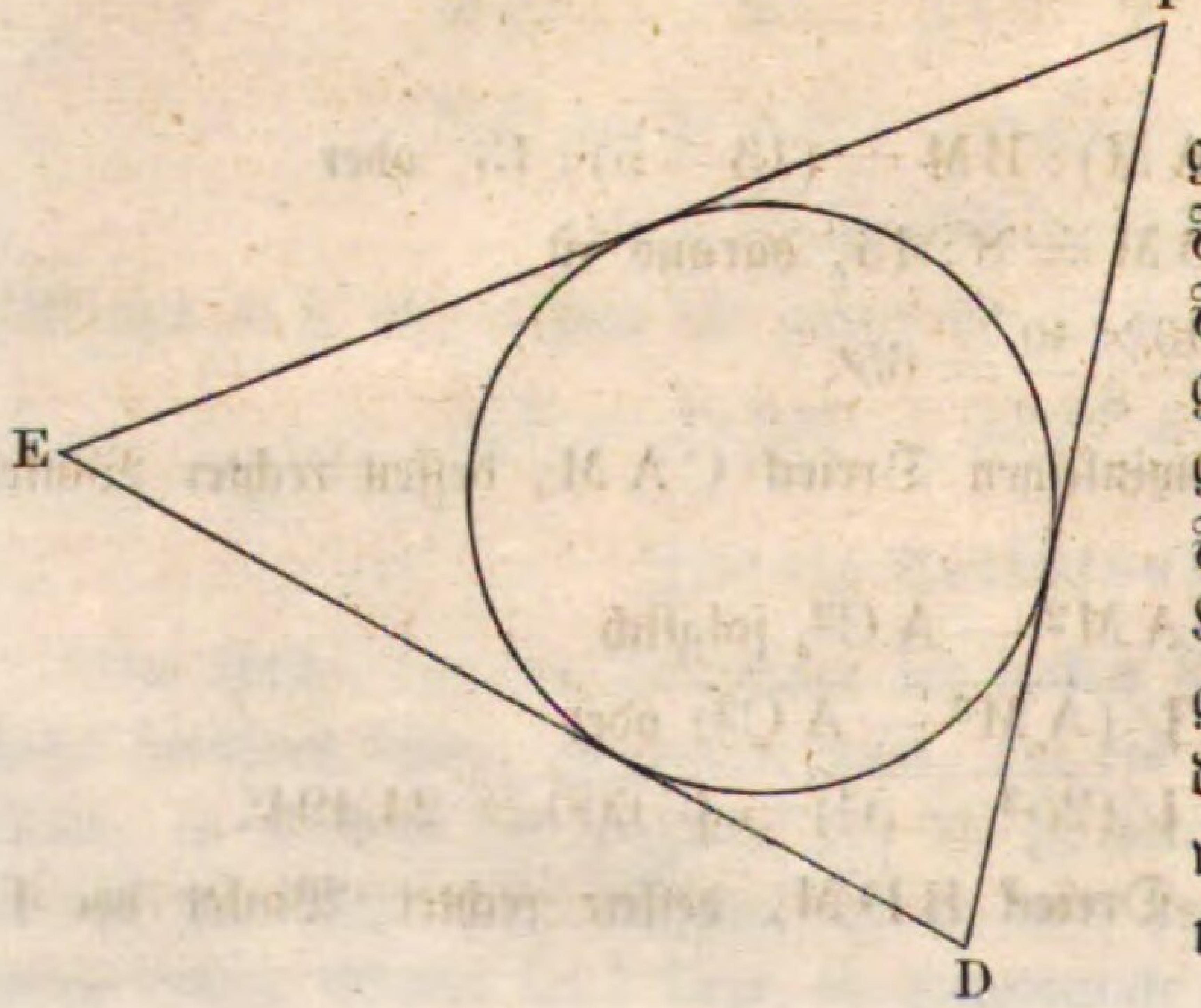
Eine Figur, deren Winkel Peripheriewinkel und deren Seiten Sehnen sind, heißt eine Figur **im** Kreise, z. B. Dreieck ABC.



Eine Figur, deren sämmtliche Seiten Tangenten sind, heißt eine Figur **um** den Kreis, z. B. Dreieck DEF. Sollen nun geradlinige Figuren mit einem Kreise in Verbindung gebracht werden, so sind zwei Fälle möglich; es können nämlich

1) die geradlinigen Figuren **in** einen Kreis oder **um** einen Kreis construirt werden;

2) kann der Kreis entweder **um** eine geradlinige Figur oder **in** eine geradlinige Figur geschrieben werden.



Im ersten Falle ist der Kreis gegeben, und die geradlinige Figur wird gesucht; im zweiten Falle ist die geradlinige Figur gegeben und der Kreis wird gesucht. Wird eine geradlinige Figur **in** einen Kreis, oder der Kreis um die geradlinige Figur gezeichnet, so werden die Seiten der Figur **Sehnen** des Kreises; wird aber die geradlinige Figur **um** einen Kreis, oder der Kreis

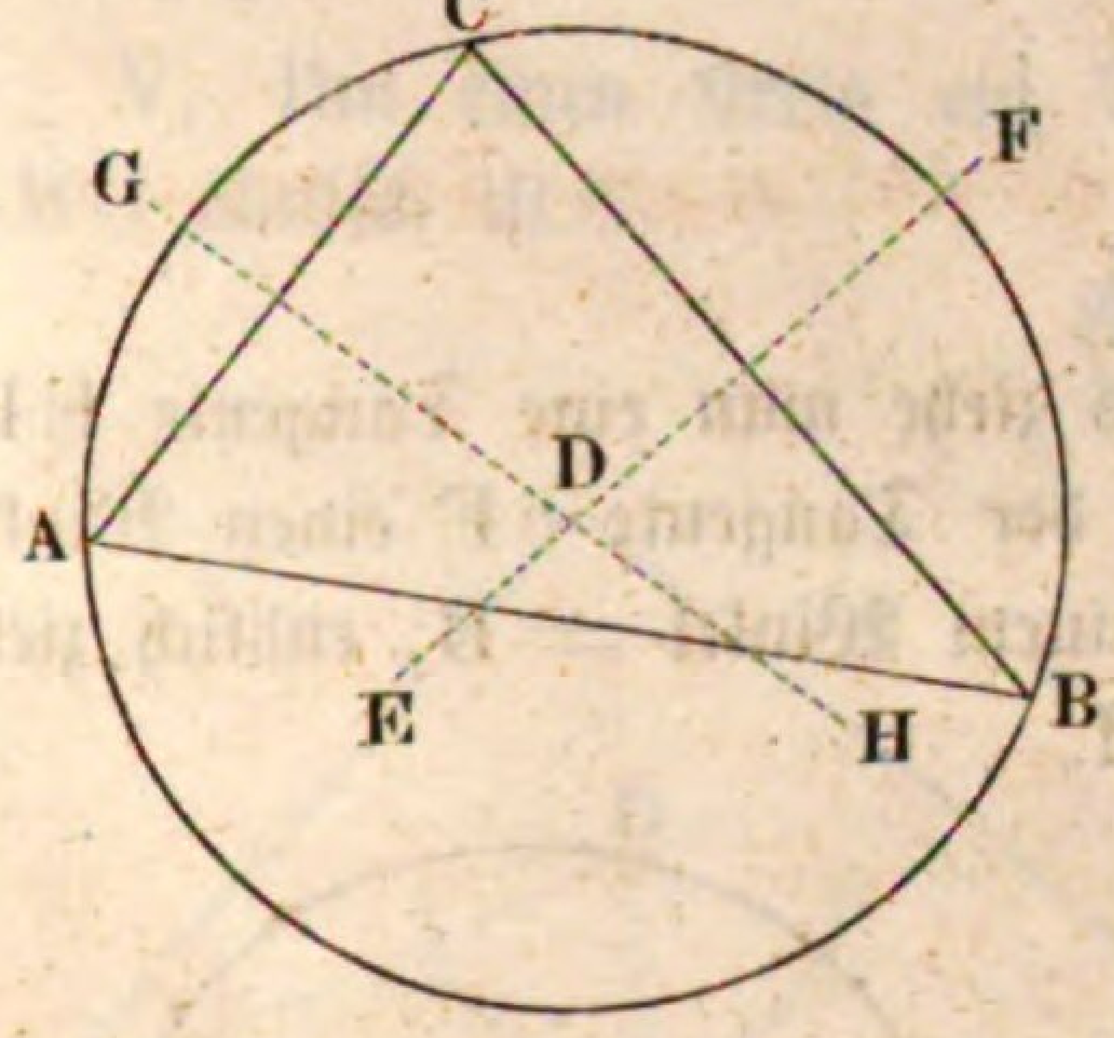
in die geradlinige Figur beschrieben; so werden die Seiten der Figur Tangenten des Kreises.

§. 2.

Der Kreis und das Dreieck.

I. Um ein Dreieck ABC einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung:



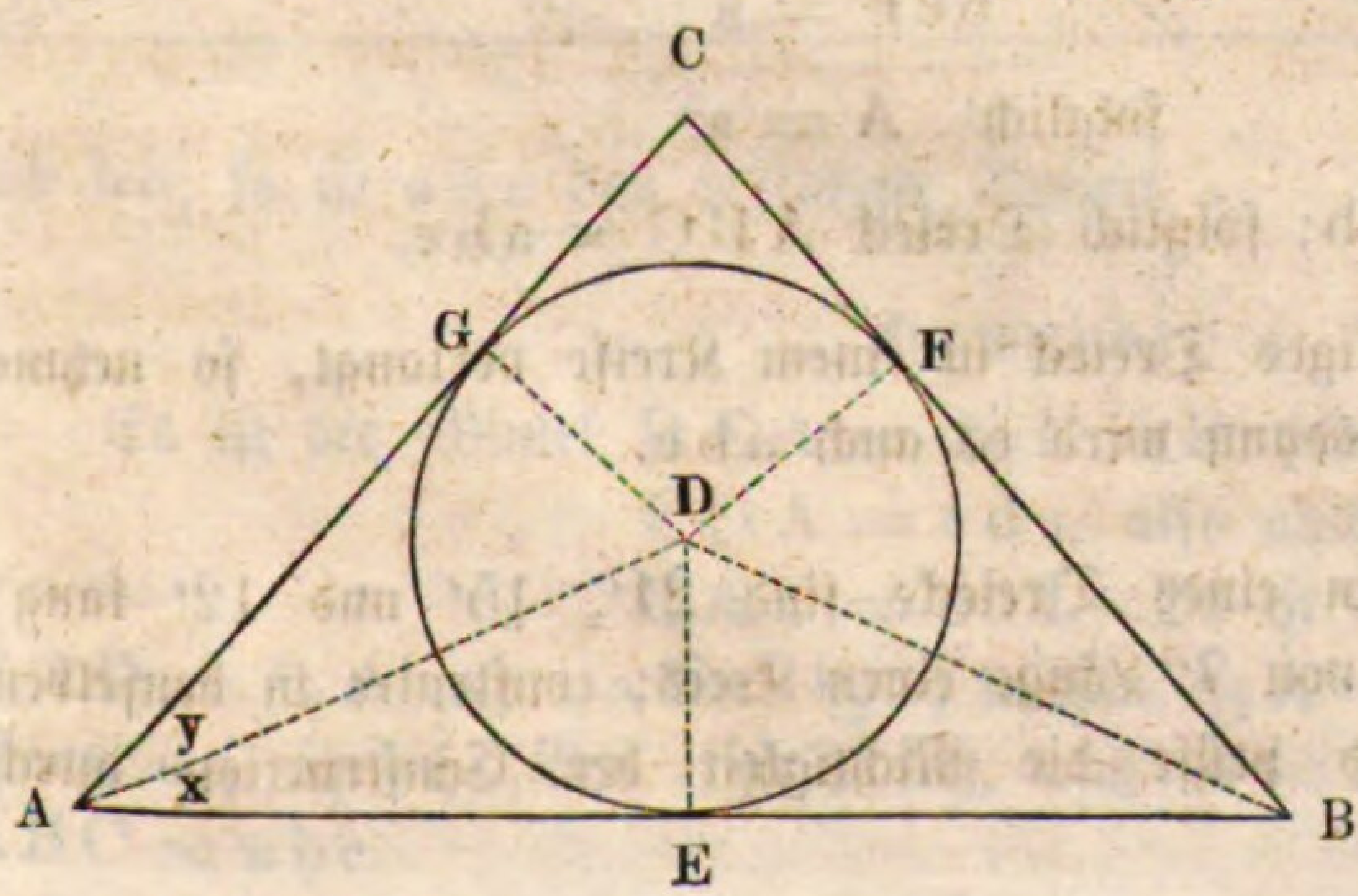
Man halbire durch Perpendikel zwei Seiten des Dreiecks und verlängere die Halbirungslinien EF und GH bis sie sich schneiden; alsdann ist der Durchschnittspunkt D das Centrum des gesuchten Kreises.

Beweis:

Nach der Construction sind die beiden Seiten AB und BC des Dreiecks ABC Sehnen des Kreises geworden, und ihre drei Endpunkte A, B, C fallen in die Peripherie des umgeschriebenen Kreises; mithin sind die Winkel des Dreiecks Peripheriewinkel und ihre Seiten Sehnen des Kreises geworden, d. h. um das Dreieck ist ein Kreis beschrieben.

II. In ein Dreieck ABC einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung:



Man halbire zwei Winkel des Dreiecks, z. B. A und B; der Punkt D, in welchem die Halbirungslinien sich schneiden, ist der gesuchte Mittelpunkt.

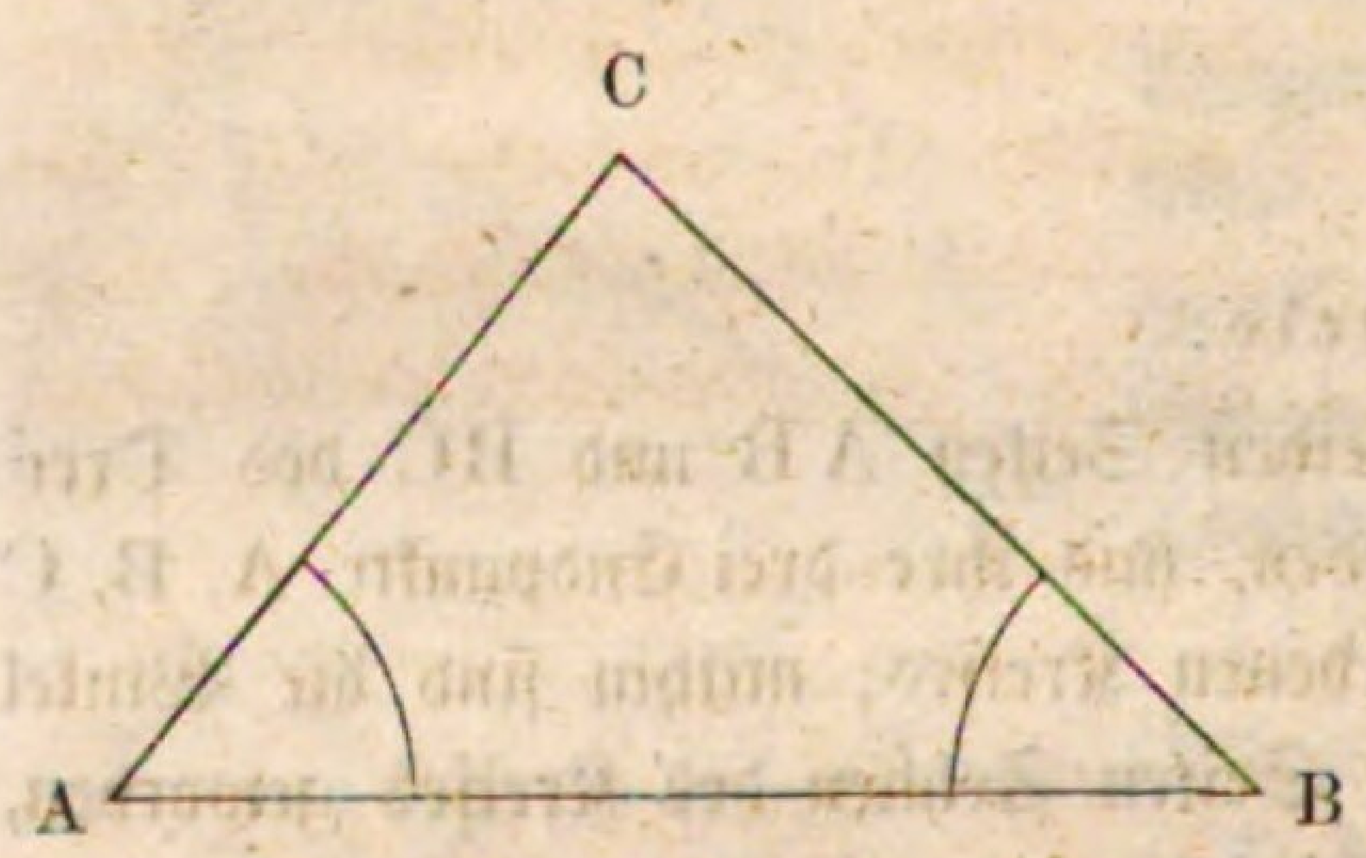
Beweis:

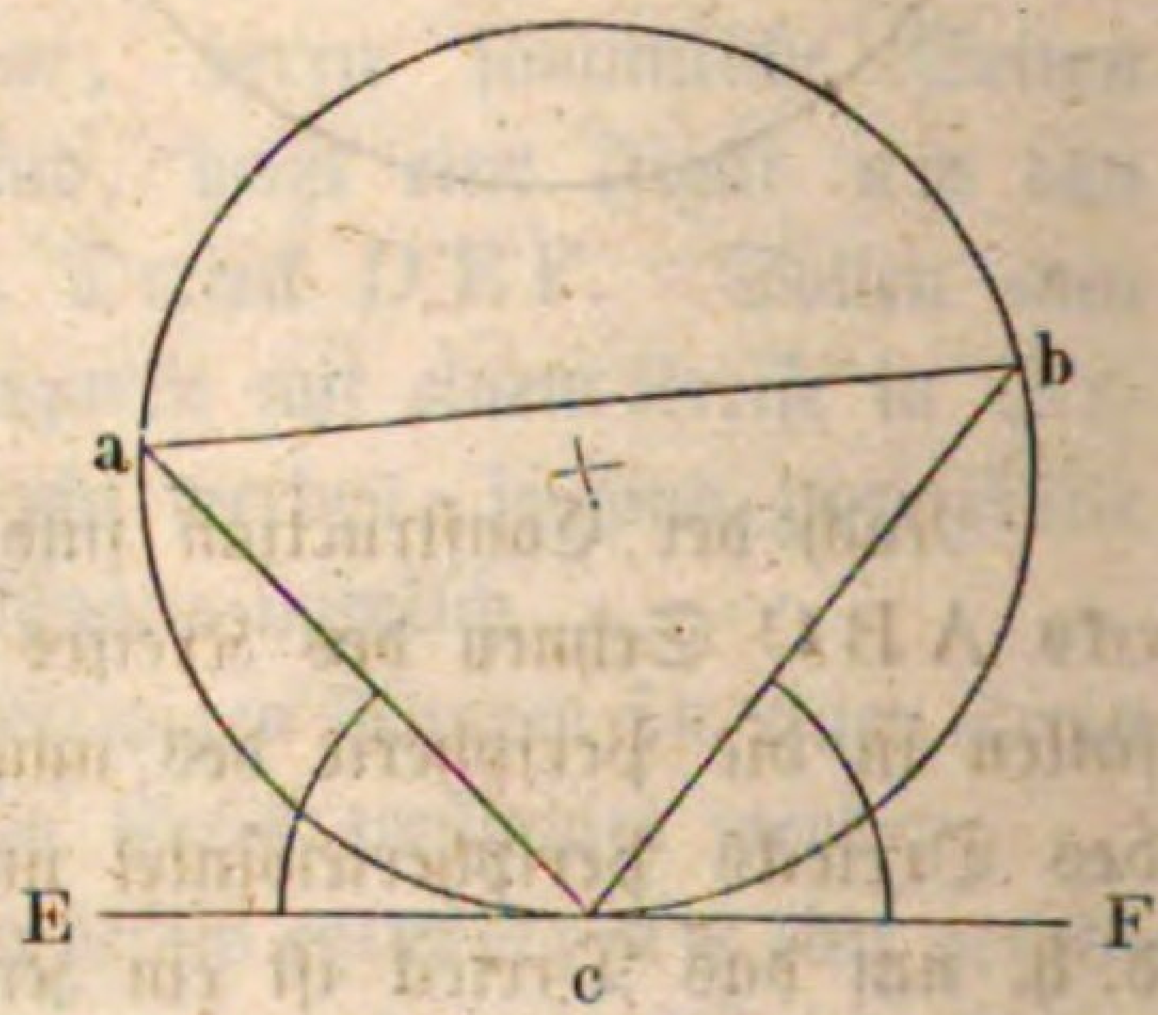
Man fälle die Perpendikel DE, DF und DG; so ist Dreieck ADE $\cong$ ADG, weil AD beiden gemein, die Winkel bei E und G = R und x = y ist; mithin ist DE = DG. Ganz ebenso zeigt sich, daß auch DF = DE ist; also sind DE, DF und DG als Halbmesser desselben Kreises zu betrachten, und die Seiten des Dreiecks Tangenten an diesem Kreise; folglich ist der Kreis in das Dreieck beschrieben.

III. In einen Kreis ein Dreieck zu verzeichnen, das einem gegebenen ABC ähnlich ist.

Auflösung:

An irgend einem Punkte c des Kreises ziehe man eine Tangente EF; aus c ziehe man eine Sehne cb, die mit der Tangente cF einen Winkel = A macht, und eine andere ca unter einem Winkel = B; endlich ziehe man ab, so ist abc das verlangte Dreieck.





Beweis:

Es ist nach der Construction $\sphericalangle$ bcF = A

bcF = a

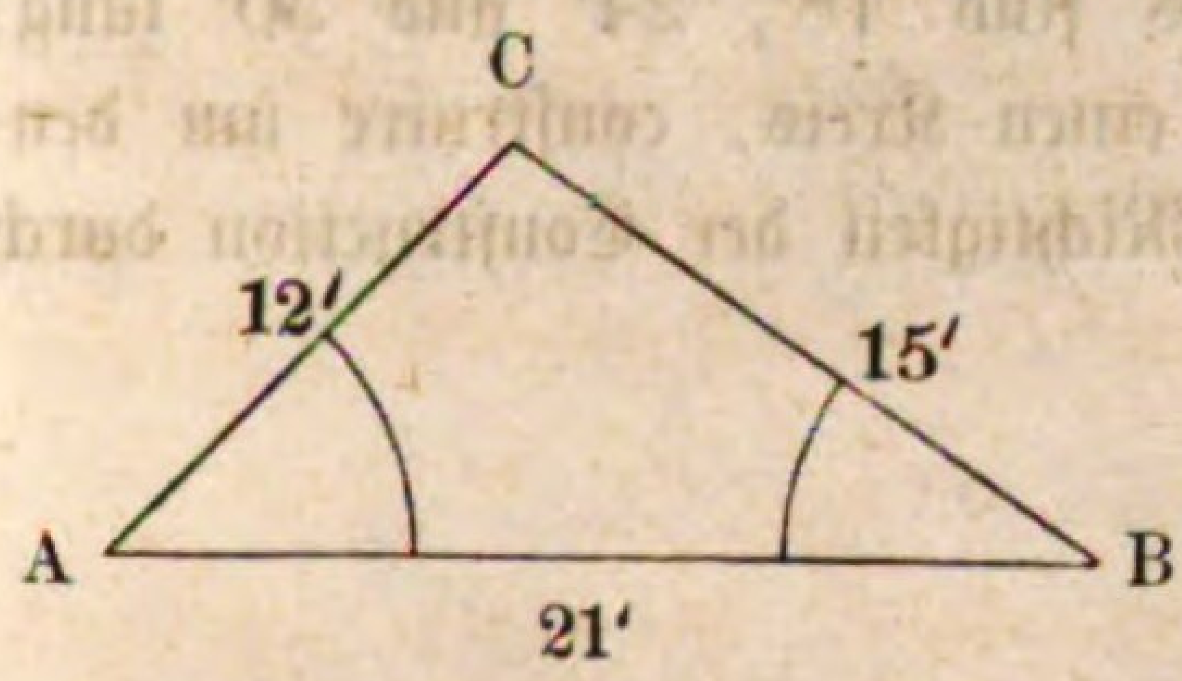
folglich A = a.

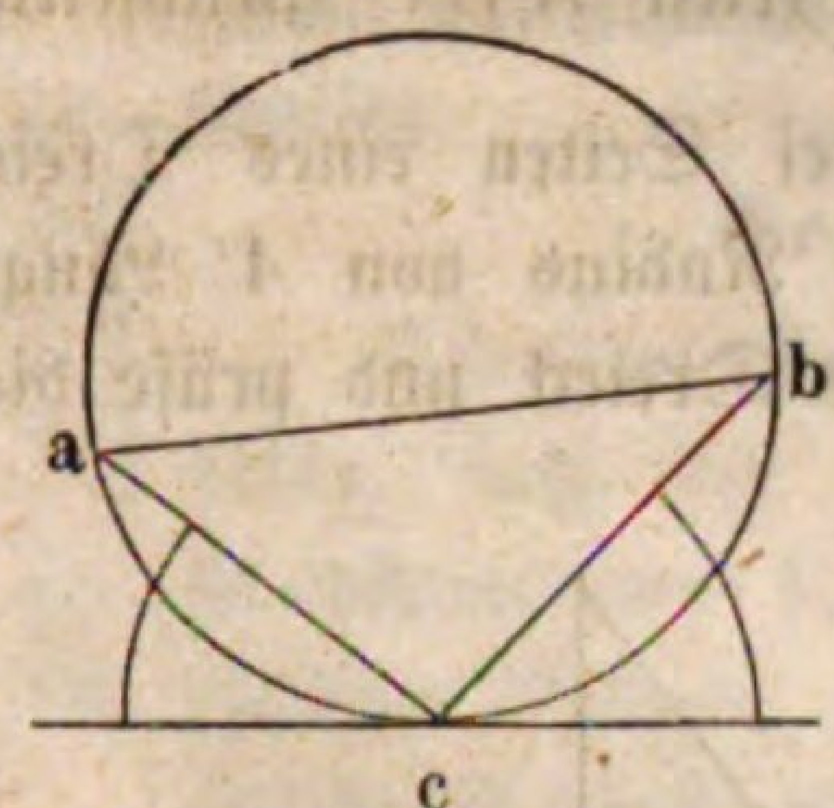
Ebenso ist $\sphericalangle$ B = b; folglich Dreieck ABC $\sim$ abc.

Wird ein gleichschenkliges Dreieck in einem Kreise verlangt, so nehme man ABC gleichseitig; alsdann wird es auch abc.

IV. Die drei Seiten eines Dreiecks sind 21′, 15′ und 12′ lang; schlage mit einem Radius von 7′ Länge einen Kreis; construire in denselben ein ähnliches Dreieck und prüfe die Richtigkeit der Construction durch Rechnung.

1. Zeichnung:



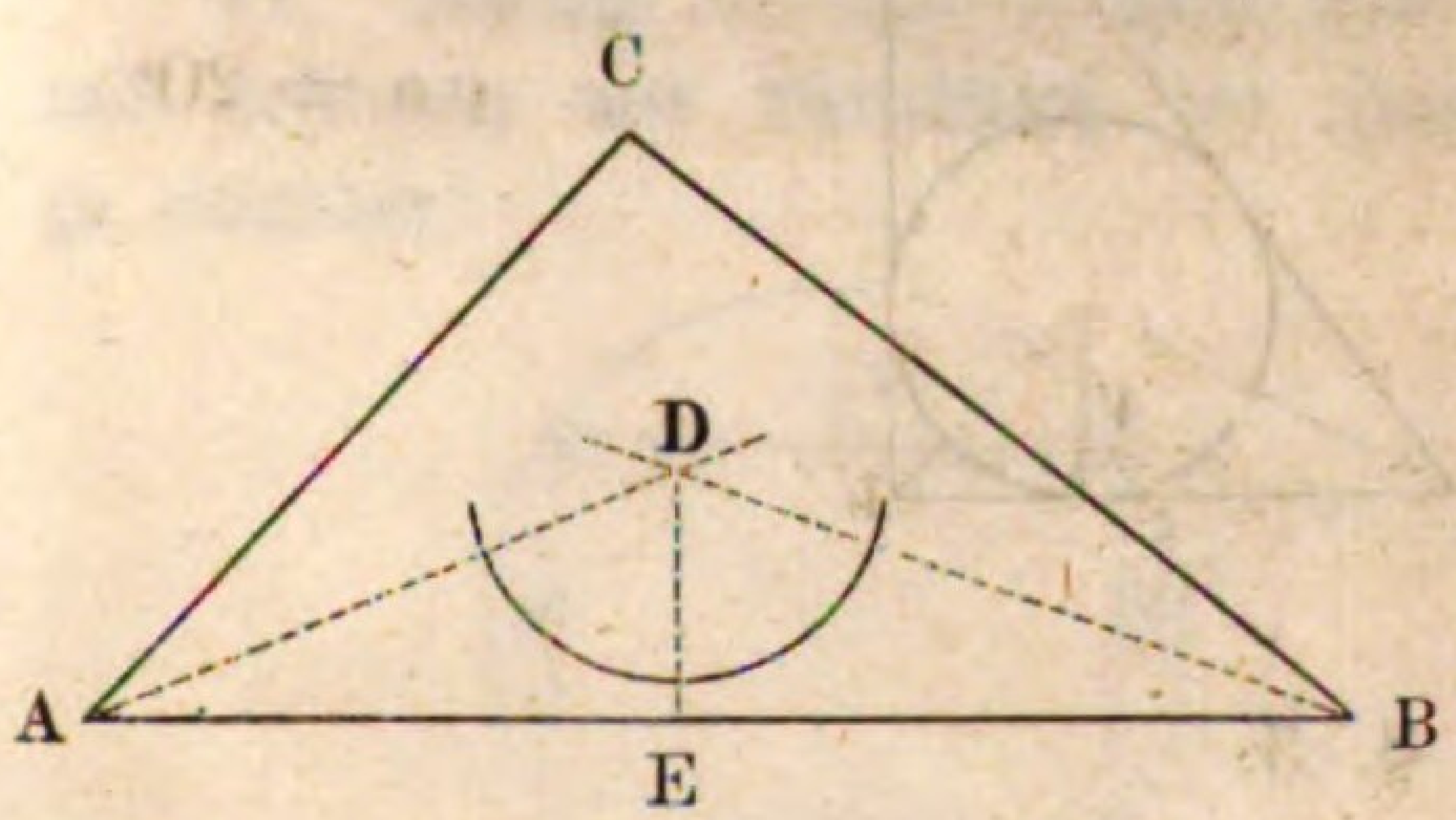


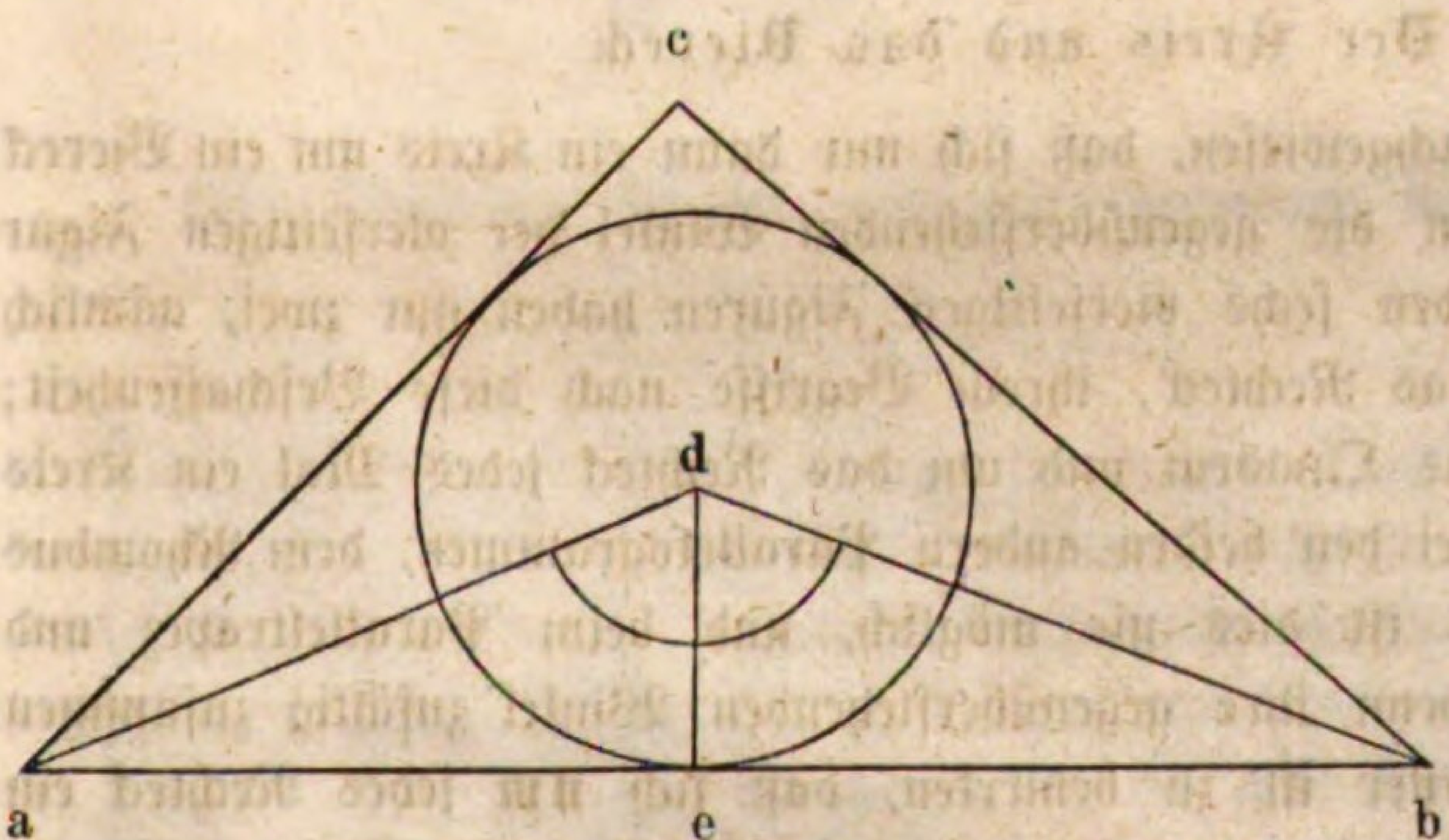
2. Rechnung:

Seite ab = 14′
" bc = 10′
" ca = 8′
21 : 14 = 15 : 10
= 3 : 2 = 3 : 2
12 : 15 = 8 : 10
= 4 : 5 = 4 : 5.

V. Um einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, das einem gegebenen ABC ähnlich ist.

Auflösung:





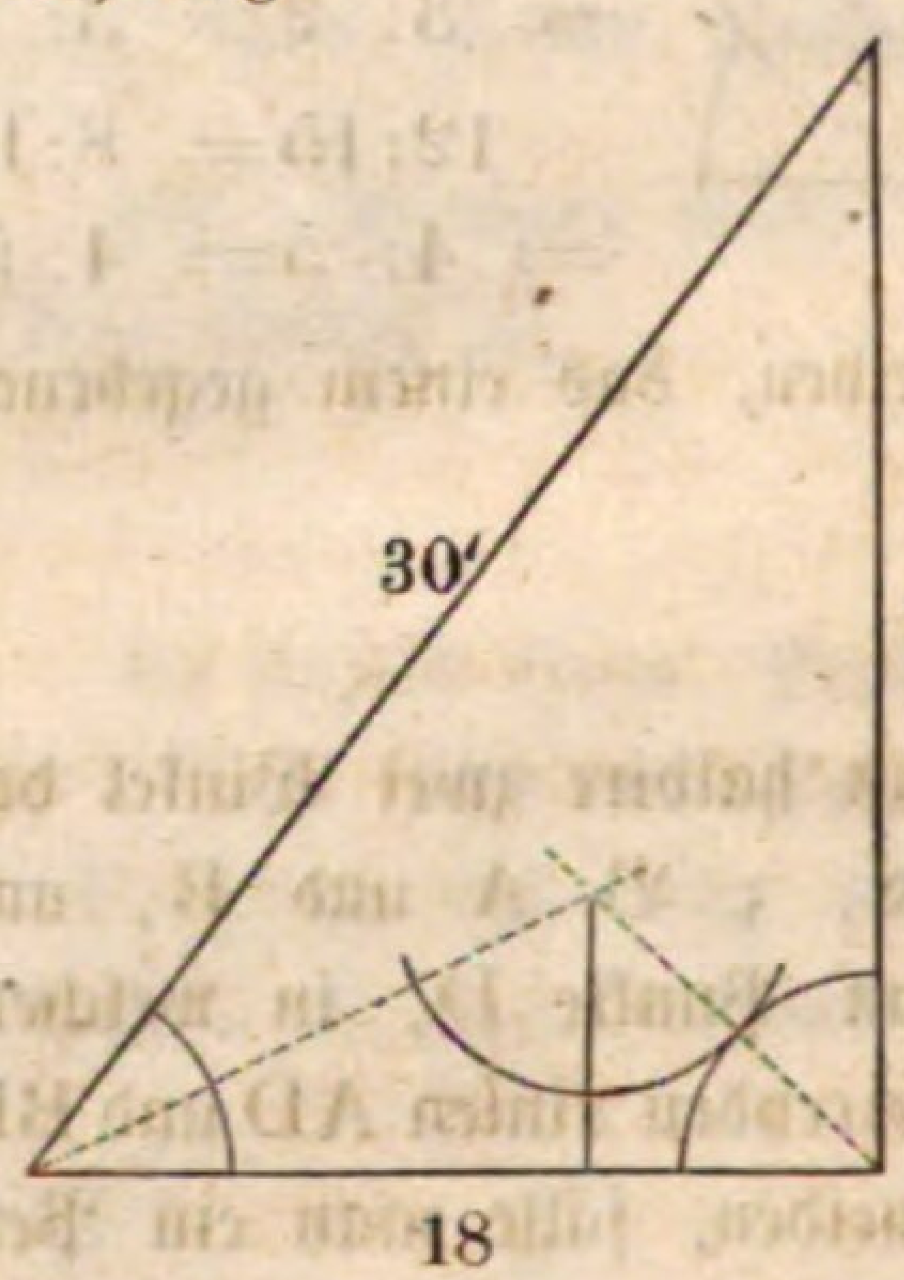
Man halbire zwei Winkel des Dreiecks, z. B. A und B, und aus dem Punkte D, in welchem die halbirenden Linien AD und BD sich schneiden, fälle man ein Perpendikel DE; alsdann ziehe man von einem beliebigen Punkte e des gegebenen Kreises eine Tangente ab; aus dem Mittelpunkte d ziehe man de, ferner trage man an ed in d auf die eine Seite den Winkel eda = EDA und auf die andere den Winkel edb = EDB und ziehe aus a und b die Tangenten ac und bc; so ist abc das verlangte Dreieck.

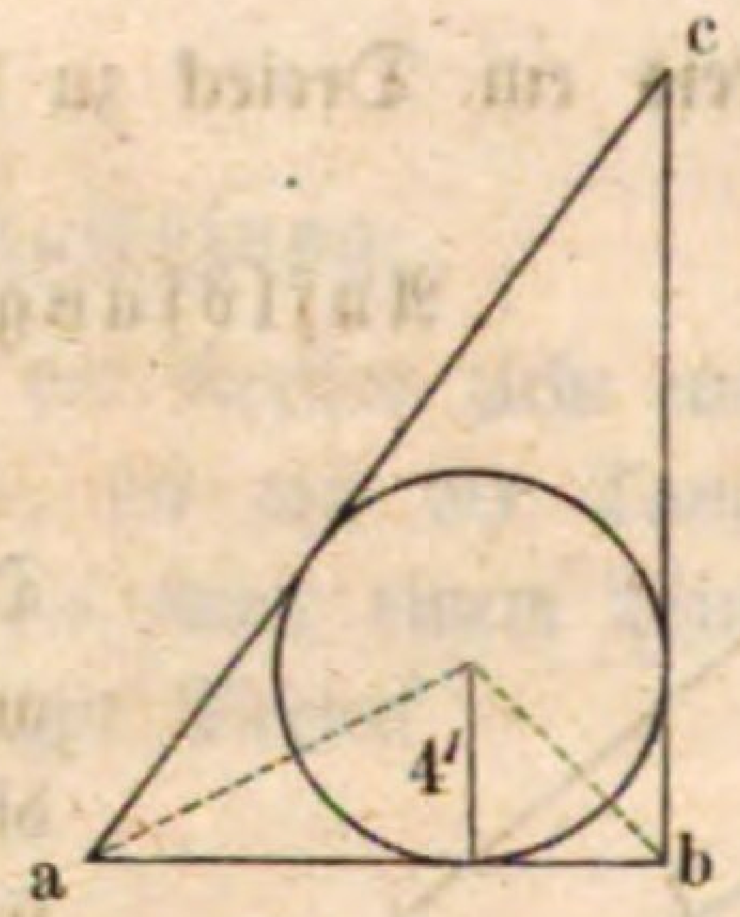
Beweis:

Es ist der Winkel DEA = dea = R; ferner
" EDA = eda, also auch
" EAD = ead. Es ist aber nach der Construction EAD = $\frac{1}{2}$ A und ead = $\frac{1}{2}$ a; mithin $\frac{1}{2}$ A = $\frac{1}{2}$ a, also auch A = a. Ganz auf ähnliche Art ergiebt sich, daß B = b ist, folglich ist Dreieck ABC ∾ abc.

Soll ein gleichseitiges Dreieck um einen Kreis beschrieben werden, so nehme man das Dreieck ABC gleichseitig.

VI. Die drei Seiten eines Dreiecks sind 18′, 24′ und 30′ lang; schlage mit einem Radius von 4′ Länge einen Kreis, construire um denselben ein ähnliches Dreieck und prüfe die Richtigkeit der Construction durch Rechnung!





Seite ab = 12′
" bc = 16′
" ca = 20′.

§. 3.

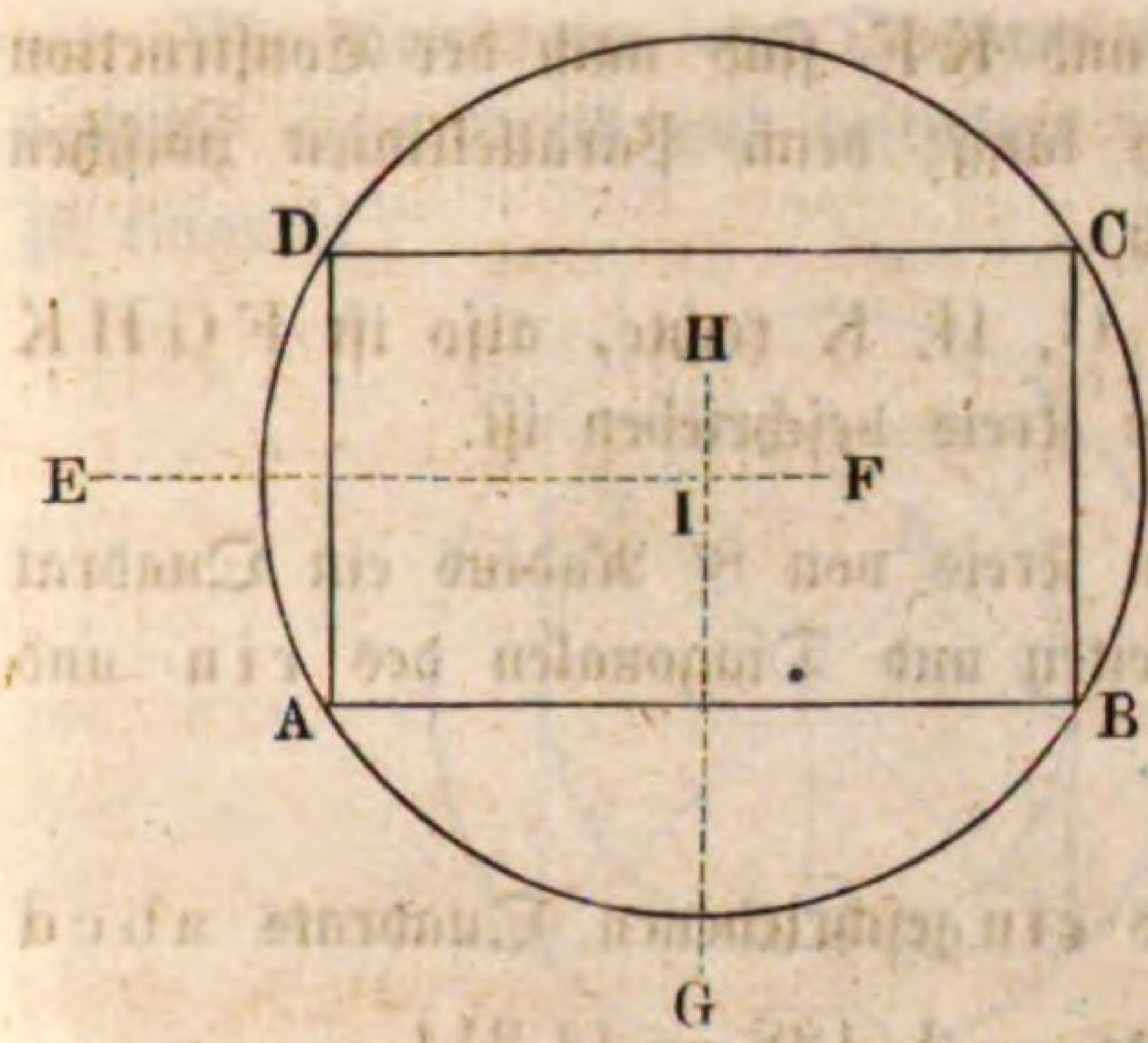
Der Kreis und das Viereck.

Es ist früher nachgewiesen, daß sich nur dann ein Kreis um ein Viereck beschreiben läßt, wenn die gegenüberstehenden Winkel der vierseitigen Figur = 2R sind. Von den sechs vierseitigen Figuren haben nur zwei, nämlich das Quadrat und das Rechteck, ihrem Begriffe nach diese Beschaffenheit; also kann nur um das Quadrat und um das Rechteck jedes Mal ein Kreis beschrieben werden; bei den beiden andern Parallelogrammen, dem Rhombus und der Rhomboide, ist dies nie möglich, und beim Paralleltrapez und Trapez nur dann, wenn ihre gegenüberstehenden Winkel zufällig zusammen 180⁰ groß sind. Ferner ist zu bemerken, daß sich **um** jedes Rechteck ein Kreis beschreiben läßt; nie aber kann **in** ein Rechteck ein Kreis construirt werden, weil das Rechteck seinem Wesen nach zwei ungleiche Seiten hat, und daher die vier Seiten desselben nicht Tangenten desselben Kreises werden können.

I. Construire um das Rechteck ABCD einen Kreis!

Auflösung:

Halbire durch Perpendikel zwei ungleiche Seiten des Rechtecks und verlängere die Halbirungslinien EF und GH, bis sie sich schneiden. Der

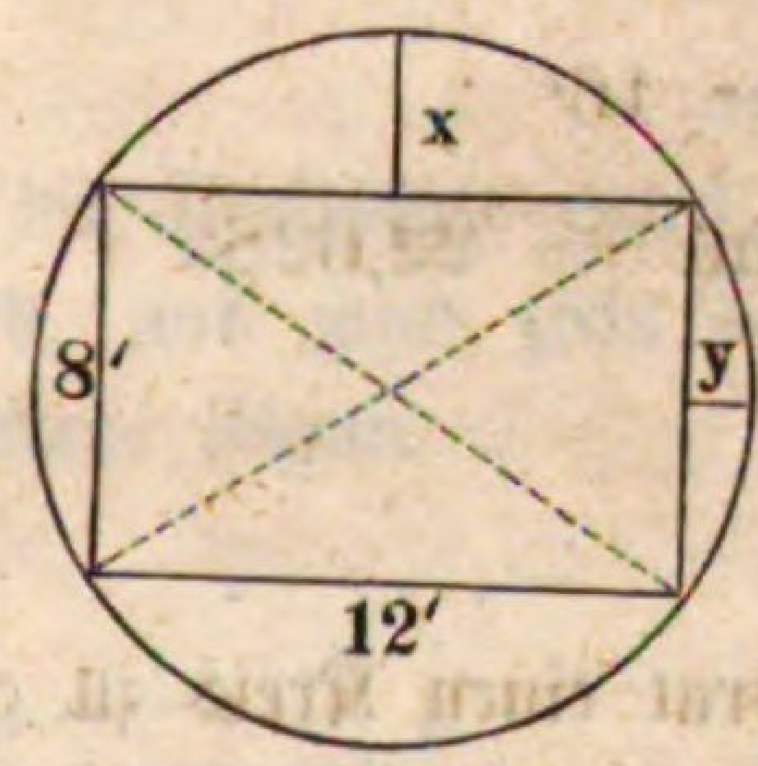


Durchschnittspunkt I beider ist der gesuchte Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises.

Beweis:

Die drei Punkte A, D und C fallen nach der Construction in die Peripherie um I, da AD und BC halbirte Sehnen sind, und der vierte Punkt B muß gleichfalls in den Umkreis desselben Kreises fallen, weil $\sphericalangle D + B = 2R$ sind.

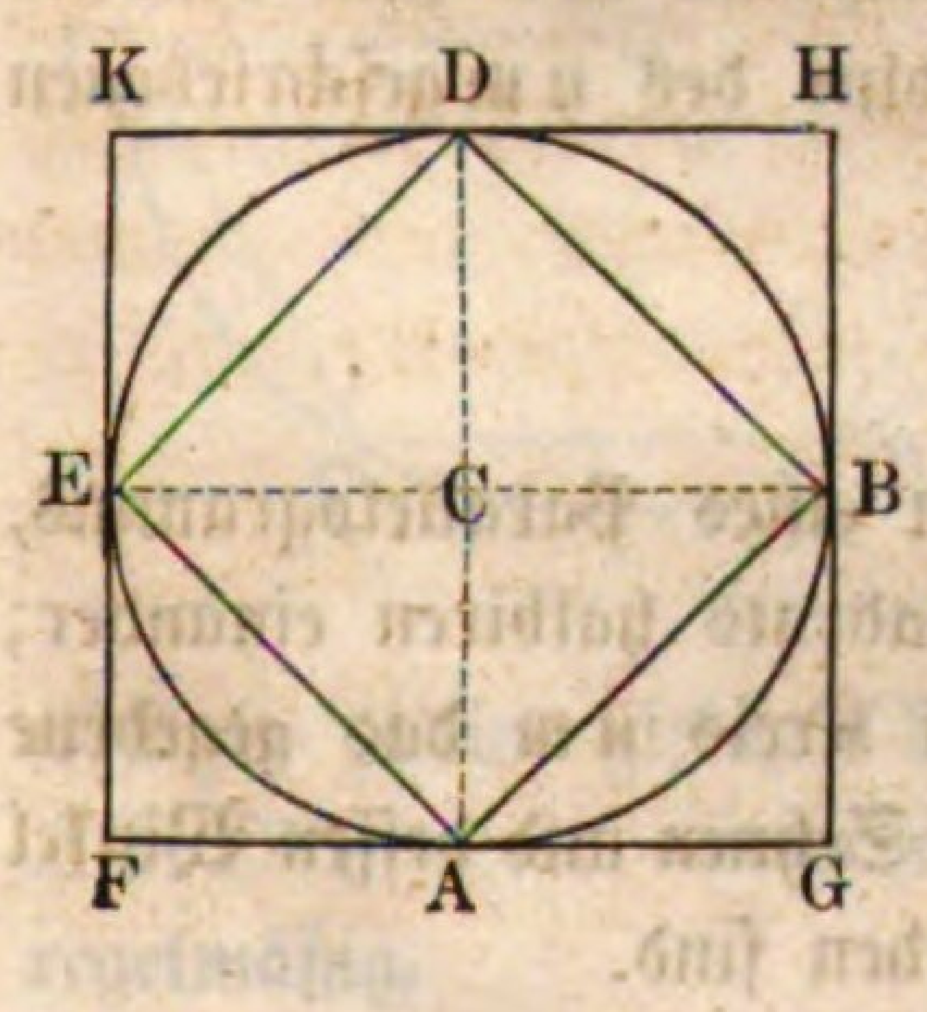
II. Schlage um das Rechteck von 12′ und 8′ Seitenlänge einen Kreis und bestimme das Verhältniß der Höhen der beiden ungleichen Segmente zu einander!



Segmente x = 3,4′ hoch
" y = 1,4′ hoch.

III. Construire **in** und **um** einen gegebenen Kreis ein Quadrat!

Auflösung:



Lege die beiden Durchmesser EB und DA so über einander, daß sie sich in C rechtwinklig schneiden, und ziehe zwischen den Punkten A, B, D, E Sehnen und durch die Punkte A, B, D, E Tangenten; so ist ABDE ein Quadrat **in** dem gegebenen Kreise und FGHK ein Quadrat **um** den gegebenen Kreis.

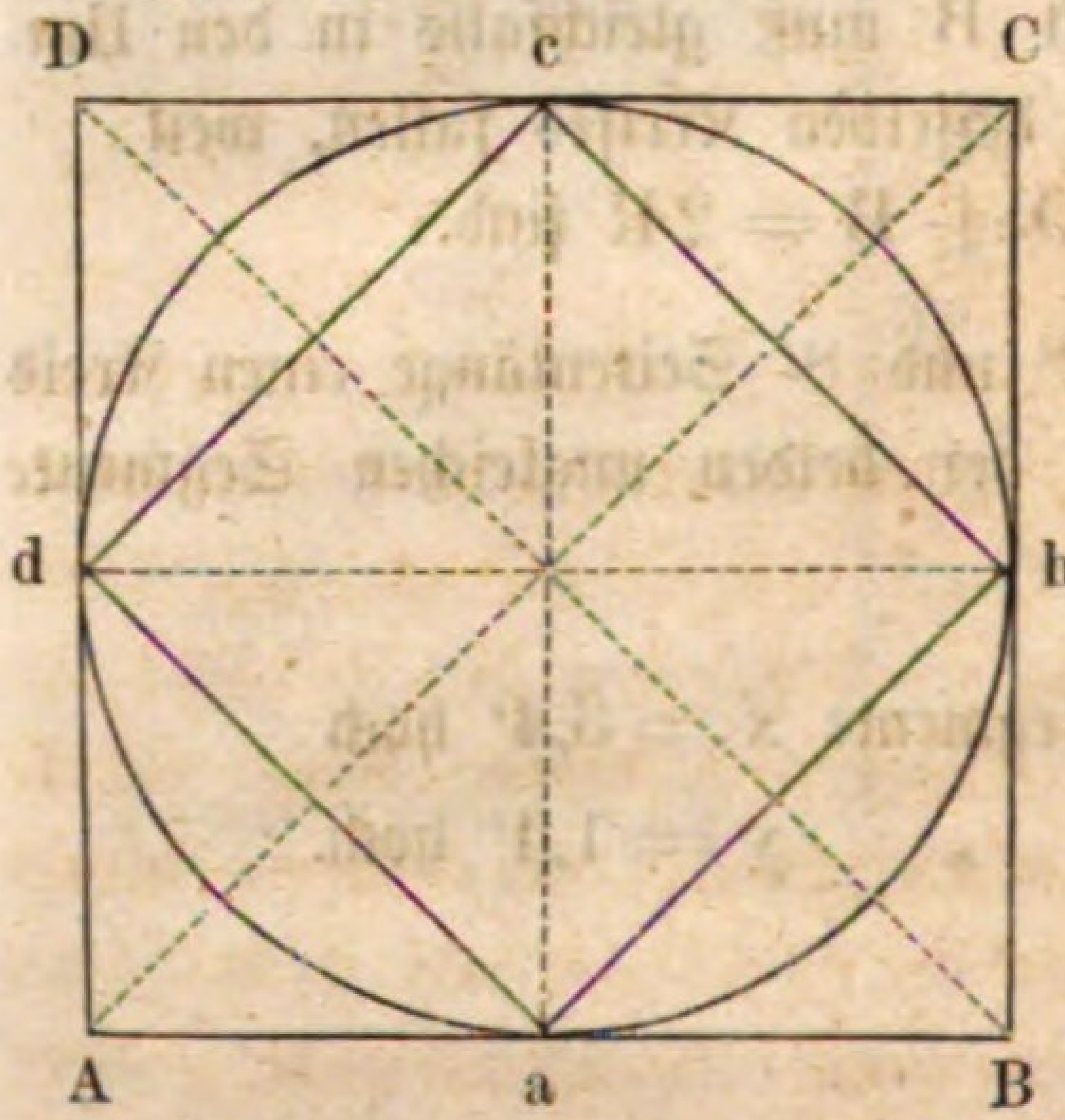
Beweis:

1) Die Peripheriewinkel A, B, D, E stehen auf einem Halbkreise, jeder ist also 90⁰ groß, und die Sehnen AB, BD, DE und EA sind gleich lang; denn in congruenten Dreiecken liegen den gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber; mithin ist ABDE ein Quadrat, dessen Seiten Sehnen und dessen Winkel Peripheriewinkel des Kreises sind.

2) Die Linien FG, GH, HK und KF sind nach der Construction Tangenten am Kreise und dazu gleich lang; denn Parallellinien zwischen denselben Parallelen sind einander gleich.

Endlich sind die vier Winkel F, G, H, K rechte, also ist FGHK ein Quadrat, welches um den gegebenen Kreis beschrieben ist.

IV. Construire **in** und **um** einen Kreis von 8′ Radius ein Quadrat und bestimme die Verhältnisse der Seiten und Diagonalen des **ein**- und **um**geschriebenen Quadrats zu einander.



Des **ein**geschriebenen Quadrats abcd

Seite $= \sqrt{128} = 11{,}314$

Diagonale $= 16$.

Des **um**geschriebenen Quadrats ABCD

Seite $= 16'$

Diagonale $= 22{,}628'$.

V. **In** und **um** ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu construiren.

Auflösung:

Man ziehe in dem gegebenen Quadrat ABCD die beiden Diagonalen AC und BD und nehme die halbe Seite des Quadrats Ea zum Radius des **ein**- und die halbe Diagonale EA zum Radius des **um**geschriebenen Kreises, so ist die gestellte Aufgabe gelöſ't.

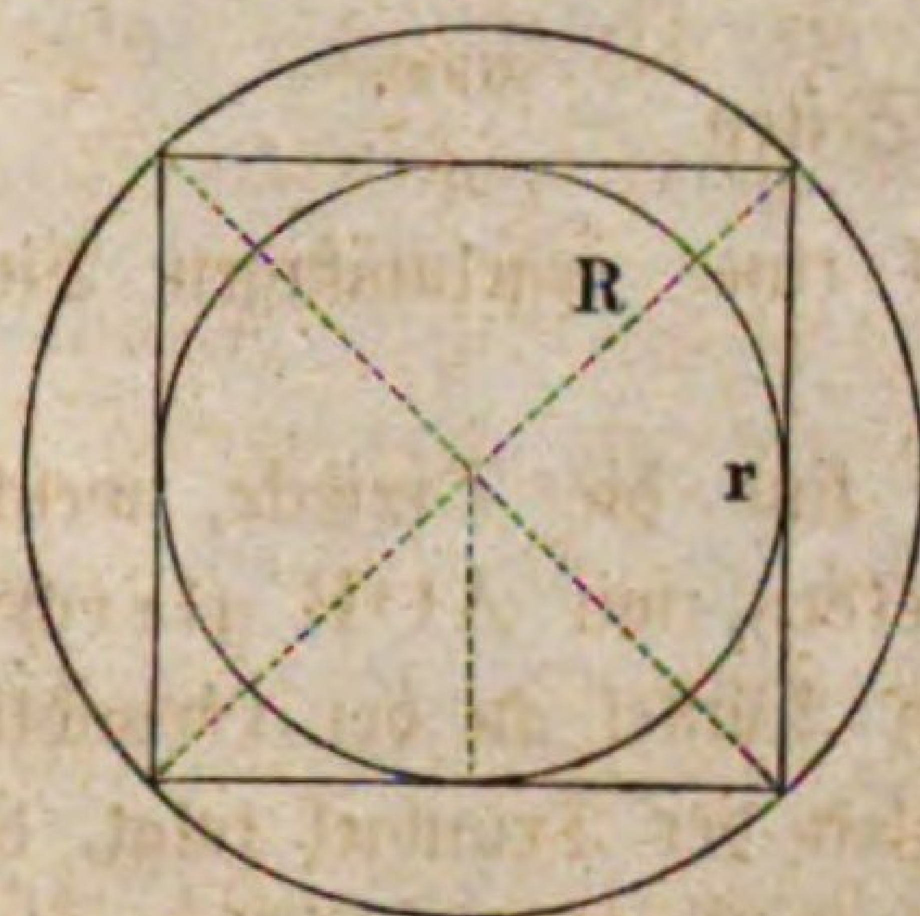
Beweis:



1) Die Diagonalen eines Parallelogramms, also auch die eines Quadrats halbiren einander; mithin ist ABCD ein Kreis **um** das gegebene Quadrat, dessen Seiten Sehnen und dessen Winkel Peripheriewinkel geworden sind.

2) Der Radius des eingeschriebenen Kreises Ea halbirt die Seite des Quadrats und steht also auf dieser senkrecht; folglich sind die Seiten des gegebenen Quadrats Tangenten am eingeschriebenen Kreise; mithin ist abcd ein Kreis **in** dem gegebenen Quadrate.

VI. Construire ein Quadrat von 7′ Seitenlänge, zeichne **in** und **um** dasselbe einen Kreis und bestimme das Verhältniß der Radien beider Kreise zu einander!



$$R : r = \sqrt{2} : 1$$
$$4{,}9 : 3{,}5 = 1{,}414 : 1$$

§. 4.

Der Kreis und das Vieleck.

Lehrsatz:

Wenn die Peripherie eines Kreises in irgend eine Anzahl gleicher Theile getheilt wird, und man zieht die Sehnen dieser Bogen, so entsteht daraus eine regelmäßige Figur.

Beweis:



Es sei z. B. der Kreis um O in sechs gleiche Theile getheilt, und zu diesen gleichen Bogen seien die Sehnen gezogen, so schließen diese

1) die zwischen ihnen liegende Fläche von allen Seiten ein, weil in jedem Theilungspunkte zwei Sehnen zusammentreffen;

2) sind alle Seiten einander gleich, weil gleiche Bogen gleiche Sehnen haben;

3) sind die Bogen B D F, C E A u. s. w. einander gleich, weil sie den ganzen Kreis, weniger zweier gleichen Abtheilungen ausmachen; mithin sind auch die Winkel A B C u. s. w. einander gleich; folglich ist das Sechseck A B C D E F regelmäßig.

Ist die Peripherie in n gleiche Theile getheilt, so ist ein jeder derselben $= \frac{360^0}{n}$, folglich der Bogen, auf welchem ein Winkel des Vielecks steht, $= 360^0 - \left(2 \cdot \frac{360^0}{n}\right)$ und daher der Winkel selbst

$= [360^0 - \left(2 \cdot \frac{360^0}{n}\right) : 2] = 180^0 - \frac{360^0}{n}$.

Zieht man aus O nach jedem Winkelpunkte A, B u. s. w. einen Halbmesser, so entstehen Dreiecke, die alle einander congruent sind; auch die Winkel um den Mittelpunkt sind einander gleich und daher jeder $= \frac{360^0}{6}$ $= 60^0$, und in einem Vieleck von n Seiten $= \frac{360^0}{n}$.

Der Polygon- und Centriwinkel eines regelmäßigen Vielecks machen daher zusammen 180^0 aus.

In einem regelmäßigen Sechseck sind die Dreiecke, welche durch eine Seite und zwei Halbmesser gebildet werden, wie AOB gleichseitig, weil der Centriwinkel $= 60^0$ und jeder der Winkel an der Grundlinie ebenfalls $= 60^0$ groß ist. Aus der Gleichseitigkeit der Triangel folgt, daß die Seite des regulären Hexagons im Kreise dem Halbmesser desselben gleich ist. Man kann daher ein regelmäßiges Sechseck in einen Kreis verzeichnen, wenn man vermittelst des Halbmessers die Peripherie in sechs gleiche Theile theilt und die Sehnen derselben zieht.

Kehren wir den eben entwickelten Lehrsatz um, so erhalten wir: die Seiten einer regulären Figur im Kreise theilen den Umkreis in so viele gleiche Bogen, wie die Figur Seiten hat.

Durch das Halbiren der Seiten einer regulären Figur im Kreise läßt sich die doppelte Anzahl gleicher Bogen im Umkreise gewinnen; verbindet man dagegen im stetigen Zuge je zwei zusammenstoßende Seiten durch Diagonalen, so entstehen aus einer regulären Figur im Kreise von gerader Seitenzahl halb so viele gleiche Sehnen und Bogen.

Eine reguläre n seitige Figur im Kreise hat zur Seite die Sehne eines Centriwinkels, der gleich $\frac{4}{n} . R$ ist.

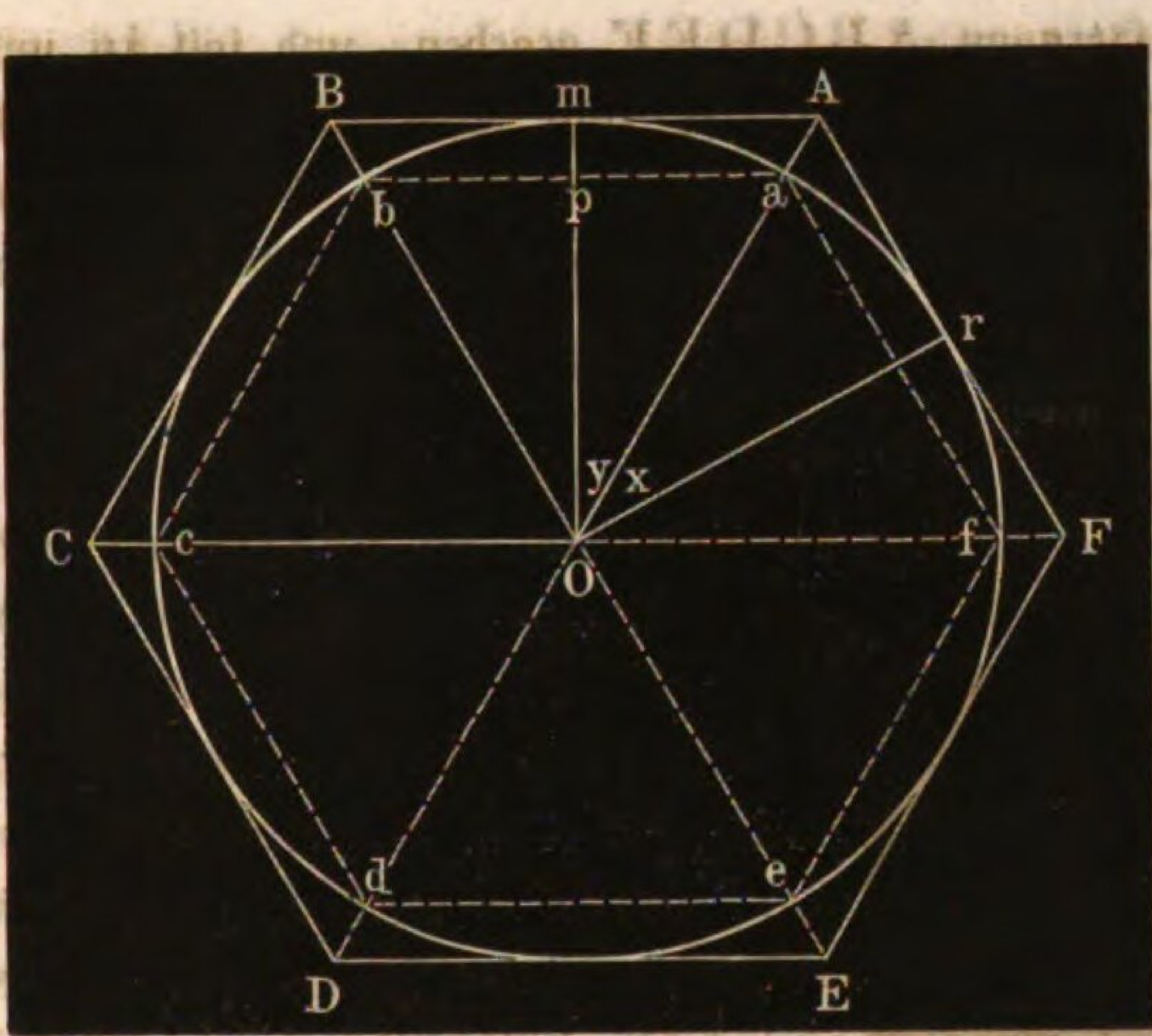
Der Unterschied der Centriwinkel einer regulären n seitigen und einer regulären m seitigen Figur im Kreise ist $= \frac{m-n}{mn} . 4R$.

Erste Aufgabe:

Um einen gegebenen Kreis ein reguläres Sechseck, sowie **in** und **um** ein reguläres Sechseck einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung:

1) Man beschreibe in den Kreis ein regelmäßiges Sechseck und ziehe durch die Mitte der Bogen ab, bc u. s. w. die Parallelen AB, BC u. s. w., so ist ABCDEF die verlangte Figur.



Beweis:

Man ziehe den Halbmesser O m senkrecht durch a b, so ist m die Mitte des Bogens a b, und A B senkrecht auf O m, also eine Tangente. Dasselbe läßt sich von den übrigen Seiten BC, CD u. s. w. darthun.

Ferner ziehe man den Halbmesser O a und verlängere ihn, bis er die Seiten A B und A F trifft. Er trifft sie aber in dem Punkte A, denn gesetzt, er träfe die Seite A F in einem andern Punkte, A'; so ziehe man O r an die Mitte des Bogens a f; alsdann ist der Bogen a r = a m, folglich $\sphericalangle x = \sphericalangle y$; ebenso $\sphericalangle$ O r A' = O m A = R und O r = O m; mithin $\triangle$ O r A' $\cong$ O m A, also auch O A' = O A, folglich ist Punkt A' von A nicht verschieden.

Sowie O a verlängert in A trifft, ebenso trifft auch O b verlängert in B, C c verlängert in C u. s. w., und Dreieck O A B ist congruent O B C, weil O B beiden gemein ist, und Winkel A O B = B O C, ferner die Winkel bei B als correspondirende der Winkel bei b einander gleich sind; folglich ist A B = B C. Auf gleiche Art zeigt sich auch, daß B C = C D = D E u. s. w. ist; mithin sind alle Seiten einander gleich. Endlich ist auch der Winkel A = B = C u. s. w, da jeder von diesen aus zwei Winkeln besteht, welche die correspondirenden der Winkel sind, aus welchen die Winkel a, b, c u. s. w. zusammengesetzt sind; und da diese einander gleich sind, so sind es auch jene.

Es ist nicht nothwendig, das innere Sechseck erst zu construiren; sondern man kann gleich an die Mitte der Bogen a b, b c u. s. w. die Tangenten A B, B C u. s. w. ziehen. Hier ist noch zu bemerken, daß sich verhält

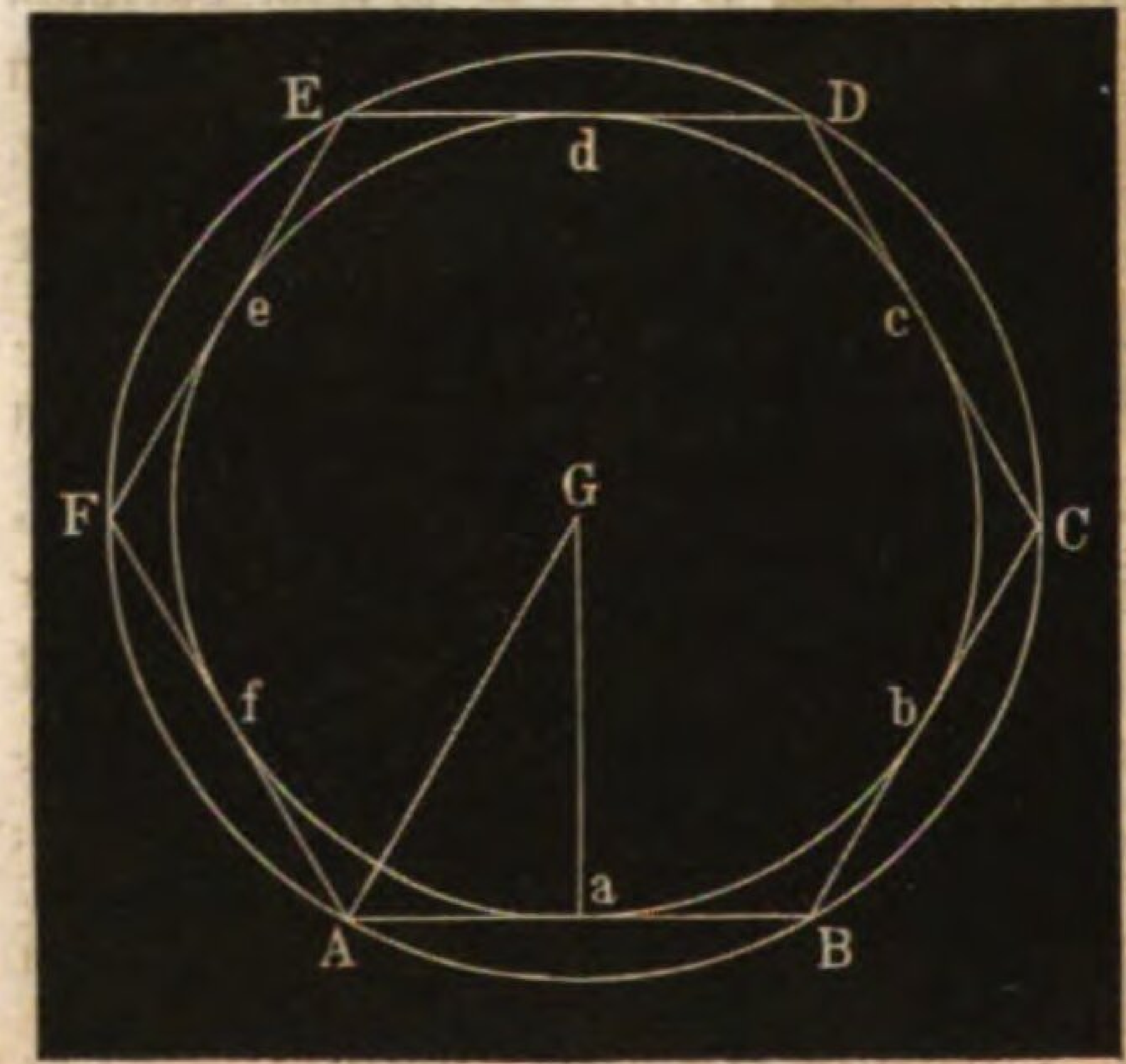
$$Oa : OA = ab : AB \text{ und}$$
$$Oa : OA = Op : Om, \text{ folglich}$$
$$\overline{}$$
$$ab : AB = Op : Om, \text{ also auch}$$
$$n.ab : n.AB = Op : Om; \text{ d. h.,}$$

der Umfang des innern Vielecks von n Seiten verhält sich zum Umfange des äußern, wie die Höhe eines Dreiecks der innern Figur zum Halbmesser.

2) Ist das reguläre Hexagon ABCDEF gegeben, und soll **in** und **um** dasselbe ein Kreis beschrieben werden; so fälle man aus dem Mittelpunkte desselben das Perpendikel Ga auf die Polygonseite AB und ziehe AG, so ist Ga der Radius des **ein**- und GA des **umgeschriebenen** Kreises.

Beweis:

Die Seiten AB, BC, CD u. s. w. sind nach der Bedingung gleich lang und stehen in den Punkten a, b, c u. s. w. senkrecht auf den Halbmessern des innern Kreises um G, also ist der Kreis abcdef in das reguläre Hexagon hinein gezeichnet. Alle gerade Linien von G nach den Winkelpunkten des gegebenen regelmäßigen Sechsecks, wie AG, sind gleich lang; folglich ist der mit AG geschlagene Kreis ABCDEF, in welchem die Seiten des gegebenen Sechsecks Sehnen und seine Winkel Peripheriewinkel geworden sind, um das reguläre Hexagon beschrieben.



Zweite Aufgabe:

In einen gegebenen Kreis jedes reguläre Polygon zu beschreiben.

Diese Aufgabe kommt darauf hinaus, den Umkreis in so viele gleiche Theile zu theilen, als das verlangte Polygon Seiten haben soll. Die Planimetrie war vor Anfang des 19ten Jahrhunderts nicht im Stande, durch geometrische Construction die Kreislinie in jede beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, und konnte nur auf gemeinfaßliche Weise und unabhängig von andern regulären Polygonen drei-, vier-, fünf- und sechsseitige regelmäßige Figuren beschreiben. Sie lehrte aber ein zweifaches Verfahren, aus diesen regelmäßigen Figuren andere regelmäßige Vielecke zu construiren:

1) Durch fortgesetztes Halbiren der Bogen, welche zu den Seiten eines gegebenen regelmäßigen Polygons gehören, bildete man Vielecke von doppelter Seitenanzahl, also Drei-, Sechs-, Zwölfecke u. s. w., Vier-, Acht-, Sechszehnecke u. s. w., Fünf-, Zehn-, Zwanzigecke u. s. w.

2) Beschreibt man in denselben Kreis von einerlei Punkten der Peripherie aus ein reguläres Polygon von n Seiten und ein anderes von m Seiten, so bestimmt der Unterschied der den Polygonseiten zugehörenden Bogen

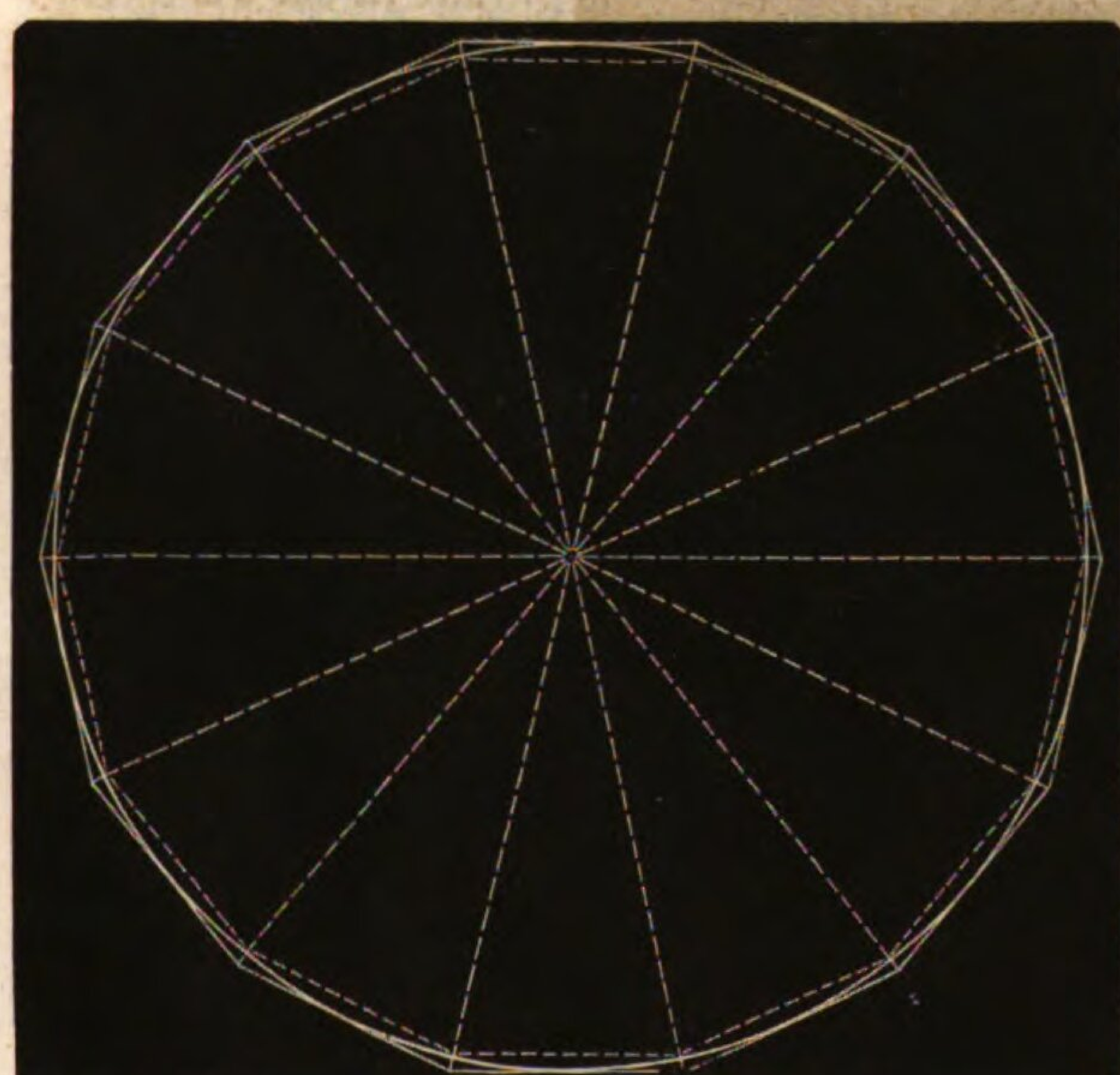
$\frac{m-n}{m.n}.4R$ die Seite eines regulären Polygons, wenn $m-n$ eine Potenz von 2 oder ein Maß für $m.n$ ist. Im letztern Falle gehört zu jedem Unterschiede die Sehne eines Polygons von $\frac{mn}{m-n}$ Seiten. Im erstern Falle ist jener Unterschied so oft zu halbiren, als der Exponent von 2 angibt, um die Sehne eines Polygons von mn Seiten zu gewinnen, z. B. der Unterschied zwischen den Bogen, welche den Seiten eines regulären Hexagons und Dekagons zugehören, d. i. $\frac{10-6}{60}.4R$ oder $\frac{1}{15}.4R$, gibt die Sehne der regulären fünfzehnseitigen Figur. Demnach läßt sich jedes reguläre Polygon in einen Kreis beschreiben, dessen Seitenzahl eine Potenz von 2, oder das drei-, fünf- oder fünfzehnfache einer solchen Potenz ist.

Erst in neuerer Zeit hat Gauß gezeigt, daß man jede reguläre $n$seitige Figur durch planimetrische Construction in einen Kreis beschreiben kann. Soll nun in einen gegebenen Kreis ein reguläres Siebenzehneck gezeichnet werden, so theile man den Umfang des gegebenen Kreises nach der früher angegebenen Methode in 17 gleiche Theile und ziehe zu den gleichen Bogen die gleichen Sehnen.

Dritte Aufgabe:

Um einen gegebenen Kreis jedes reguläre Polygon zu beschreiben.

Auflösung:



Ist zuerst das verlangte reguläre Polygon in den Kreis geschrieben, so erfolgt die Lösung dieser Aufgabe, wenn man entweder durch alle Winkelspitzen des eingeschriebenen Polygons oder durch die Halbirungspunkte der gleichen Kreisbogen Tangenten an den Kreis zieht; es werde hiernach ein reguläres Vierzehneck um einen Kreis geschrieben.

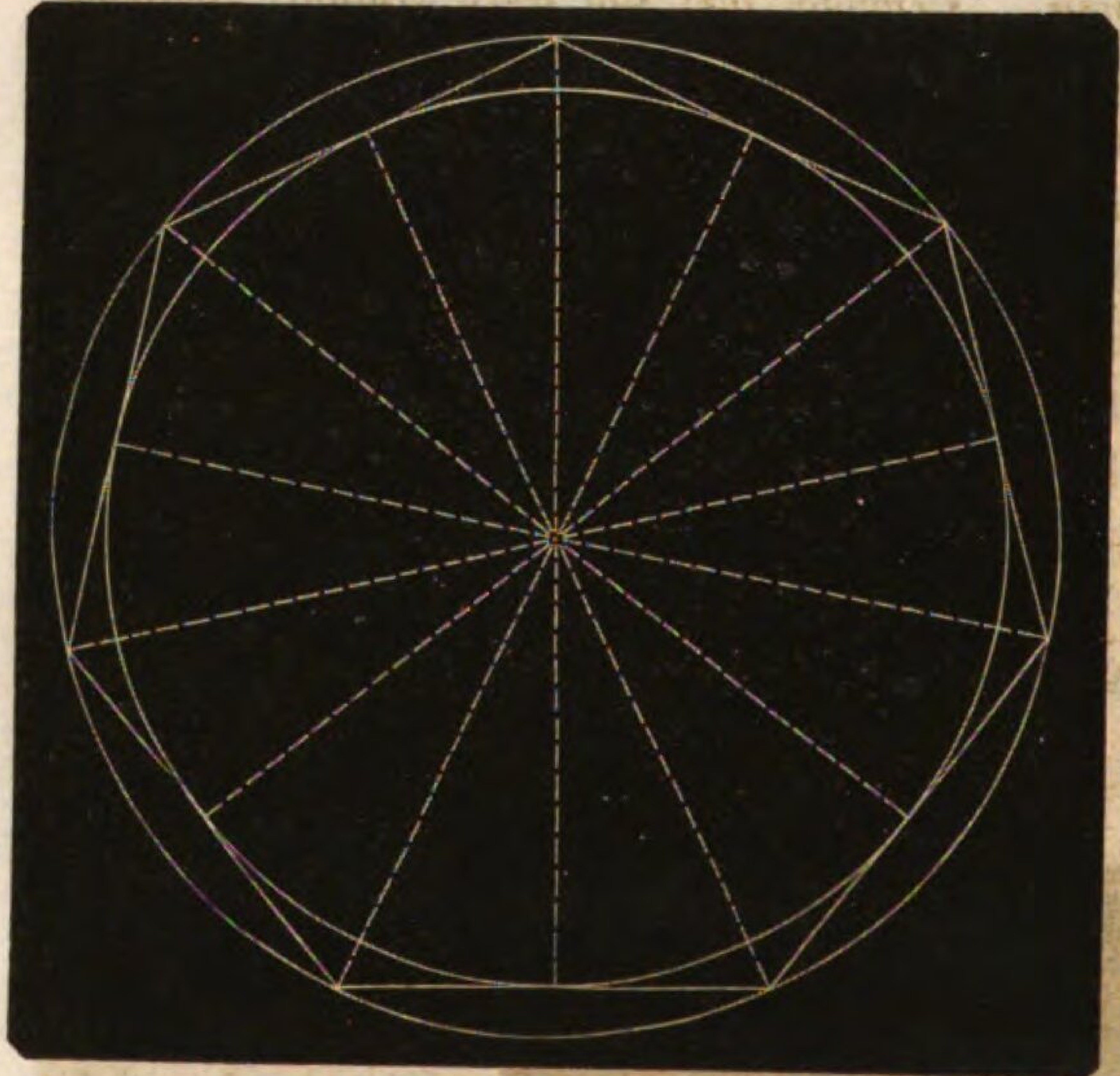
Vierte Aufgabe:

In und um jedes reguläre Polygon einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung:

1) Man halbire zwei derselben Seite anliegende Winkel und fälle vom Durchschnittspunkte der Halbirungslinien Perpendikel auf die Polygonseiten, so sind diese Perpendikel alle gleich, mithin die Polygonseiten Tangenten am eingeschriebenen Kreise.

2) Man halbire ferner zwei derselben Seite anliegende Winkel und ziehe vom Durchschnittspunkte der Halbirenden gerade Linien nach allen Winkelspitzen, so sind diese Linien einander gleich, folglich geht eine Kreislinie aus dem Durchschnittspunkte durch alle Winkelspitzen des gegebenen Vielecks, und die Seiten desselben werden Sehnen des umgeschriebenen Kreises. Nach dieser Auflösung construire **in** und **um** ein regelmäßiges Siebeneck einen Kreis.



Zusätze zu den regulären Polygonen.

1) Das reguläre Polygon im Kreise wird durch die nach den Winkelspitzen des Polygons gezogenen Halbmesser in so viele congruente Triangel getheilt, als es Seiten hat.

2) Die Halbmesser halbiren die Winkel eines solchen Polygons und bilden eben so viele gleiche Winkel am Mittelpunkte, als das Polygon Seiten hat.

3) Jeder Winkel eines regulären n seitigen Polygons ist $= \frac{2n-4}{n} . R.$

4) Ein reguläres Polygon **im** Kreise hat gleichen Flächeninhalt mit einem Triangel, dessen Grundlinie dem Umfange des Polygons und dessen Höhe dem Perpendikel aus dem Mittelpunkte auf eine Polygonseite gleich ist.

5) Das reguläre Polygon **um** den Kreis hat gleichen Flächeninhalt mit einem Triangel, dessen Höhe der Halbmesser und dessen Grundlinie der Umfang des Polygons ist.

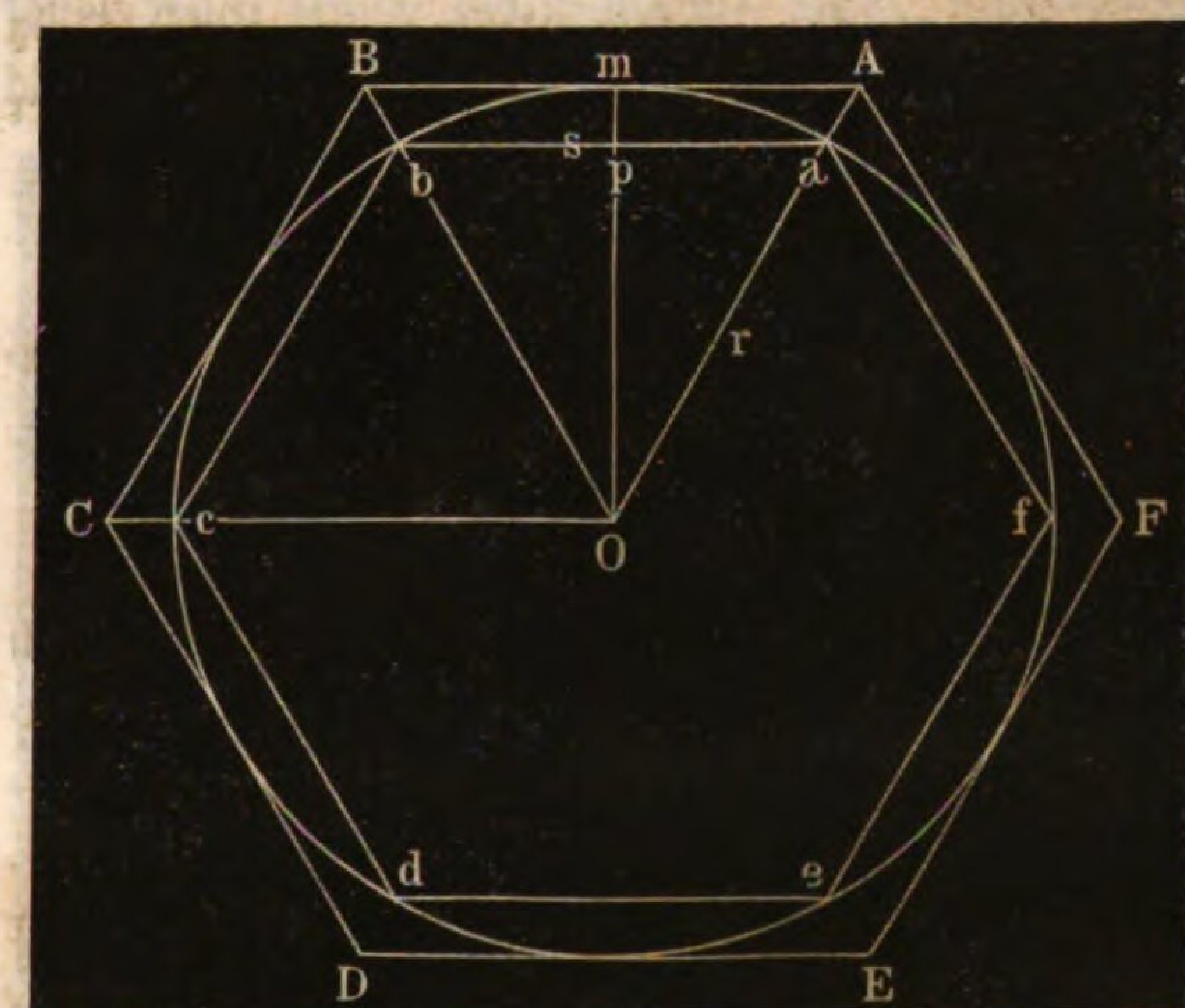
6) Zwei reguläre Polygone von gleich vielen und gleichen Seiten sind congruent.

§. 5.

Aufgaben.

I. Den Inhalt eines regelmäßigen Vielecks von n Seiten zu finden, wenn eine Seite $= s$ und der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises $= r$ gegeben ist.

Auflösung:



Man zertheile das Vieleck durch Linien aus dem Mittelpunkte nach den Winkelpunkten in lauter Dreiecke, wie a O b, b O c u. s. w., suche den Inhalt eines dieser Dreiecke und multiplicire ihn mit der Anzahl der Seiten; dies gibt den Inhalt des n ecks $= \frac{ns}{2} \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} s^2)}$.

Beweis:

Die Dreiecke, welche man auf diese Art erhält, sind alle einander gleich, und die Anzahl derselben ist der Anzahl der Seiten des Vielecks gleich. Der Inhalt eines Dreiecks, wie a O b, ist $= \frac{ab \cdot Op}{2}$. Nun ist $Op = \sqrt{Oa^2 - ap^2)}$. Setzt man also $ab = s$ und $Oa = r$, so ist $\frac{ab \cdot Op}{2} = \frac{s}{2} \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} s)}$; mithin ist der Inhalt von n solchen Dreiecken oder von dem ganzen n eck $= \frac{ns}{2} \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} s^2)}$.

Da n s den ganzen Umfang des Vielecks ausdrückt, so findet sich auch der Inhalt, wenn man den halben Umfang des Vielecks mit der ganzen Höhe, oder den ganzen Umfang mit der halben Höhe seiner Dreiecke multiplicirt.

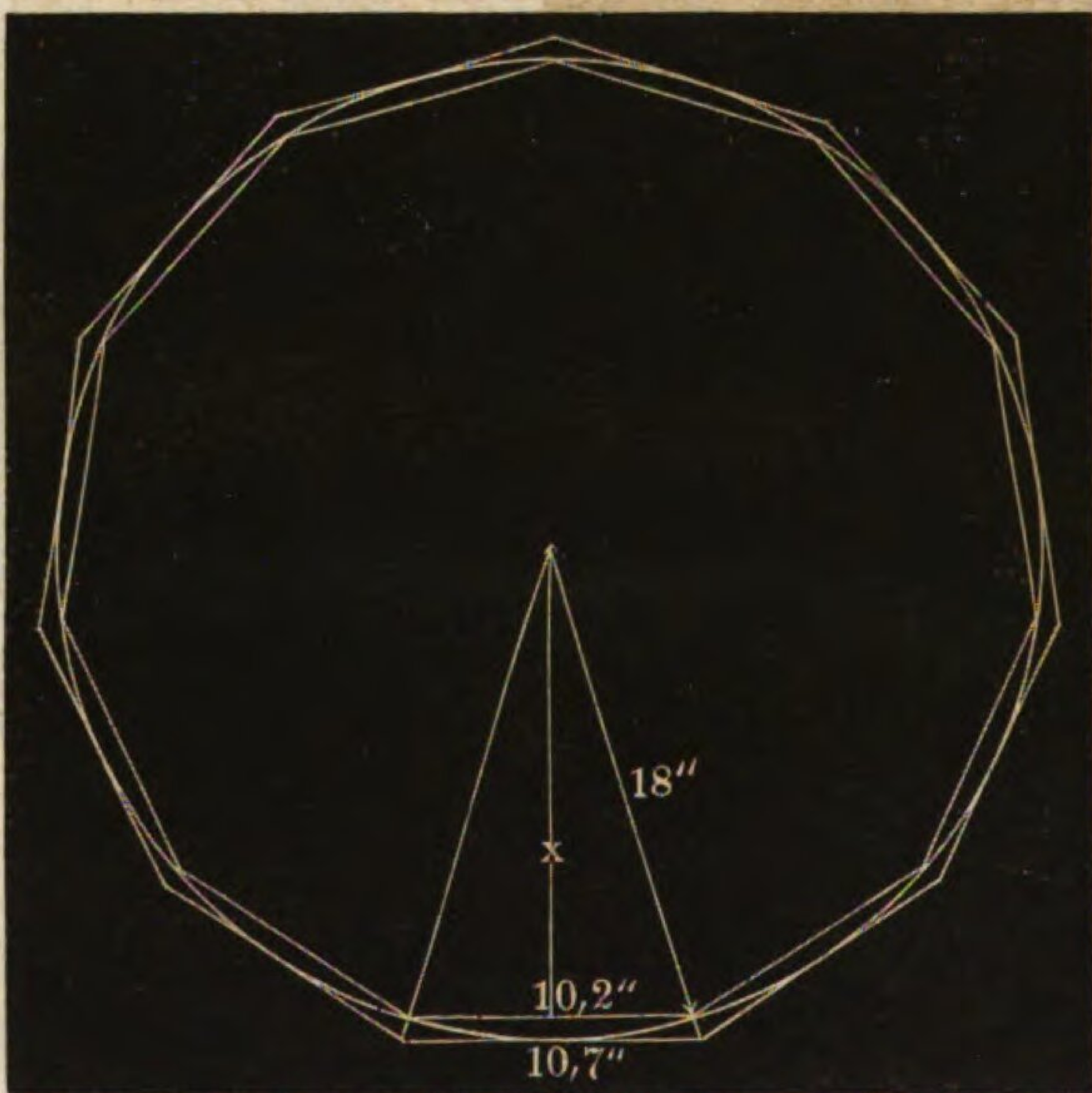
Ein regelmäßiges Vieleck ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie

dem Umfange des Vielecks und dessen Höhe der Höhe eines seiner Dreiecke gleich ist.

Drückt s die Seite des um den Kreis geschriebenen Vielecks aus, so wird r = der Höhe eines seiner Dreiecke, und daher der Inhalt des ganzen Vielecks $= \frac{n s r}{2}$, das ist gleich dem Umfange des Vielecks, multiplicirt mit der Hälfte des Halbmessers.

Die Trigonometrie lehrt den Inhalt eines regelmäßigen Vielecks blos aus der Anzahl der Seiten und dem Halbmesser, oder aus einer Seite finden.

II. Zeichne **in** und **um** einen Kreis von 18″ Radius ein regelmäßiges Elfeck und bestimme durch Construction und Rechnung das Verhältniß der Umfänge und der Flächeninhalte beider Figuren zu einander.



Es ist nach der Construction

$s = 10{,}2''$

$S = 10{,}7''$.

Demnach verhalten sich die Umfänge des ein- und umgeschriebenen Elfecks wie 112,2 : 117,7. Um die Richtigkeit dieser Angabe zu prüfen, berechnen wir das Perpendikel x von einem der elf congruenten Dreiecke des eingeschriebenen regelmäßigen Elfecks.

Dieses ist $\sqrt{(18^2 - (5{,}1)^2)} = \sqrt{297{,}99} = 17{,}26''$. Es muß sich demnach verhalten $17{,}26 : 18 = 112{,}2 : 117{,}7$; also soll

$$17{,}26 \times 117{,}7 = 18 \times 112{,}2, \text{ das ist}$$

$$2031{,}5 = 2019{,}6 \text{ sein.}$$

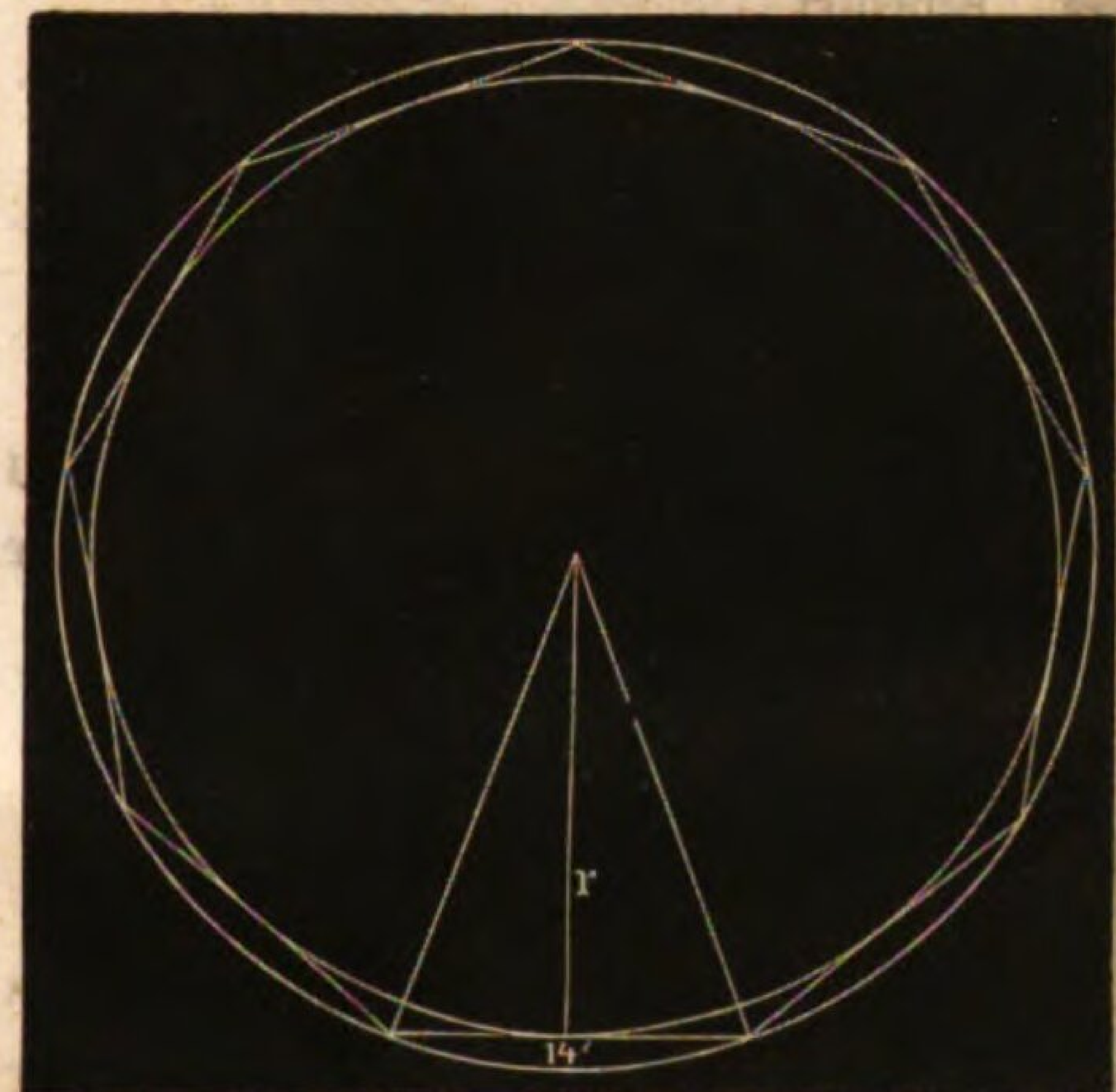
Da man von den vier Gliedern einer Proportion jedes Mal ein Glied durch Rechnung finden kann, so brauchen für die Praxis nur drei Glieder bekannt zu sein.

Der Flächeninhalt des eingeschriebenen regelmäßigen Elfecks ist $= \frac{11 . 10,2}{2}$ $\sqrt{(18^2 - 5,1^2)}$, d. i. $56,1 \sqrt{297,99} = 968,286$ □fuß.

Der Flächeninhalt des umgeschriebenen regelmäßigen Elfecks ist $= \frac{11 . 10,7 . 18}{2}$ $= 1059,3$ □fuß.

Ist also die Construction richtig gewesen, so muß sich verhalten $17,26^2 : 18^2 = 968,286 : 1059,3$, und folglich muß $17,26^2 \times 1059,3 = 18^2 \times 968,286$, das ist $315573,5 = 313724,664$ sein.

III. Beschreibe **in** und **um** ein regelmäßiges Neuneck von 14′ Seitenlänge einen Kreis und bestimme durch Construction und Rechnung das Verhältniß der Radien und Flächeninhalte beider Kreise zu einander!



Der Radius des eingeschriebenen Kreises ist $= 19,3'$; der Radius des umgeschriebenen Kreises 20,4′. Wenn also die Construction richtig ist, so muß sich verhalten $r^2 : R^2 = r^2\pi : R^2\pi$, das ist $19,3^2 : 20,4^2 = 19,3^2 \times 3,14 : 20,4^2 \times 3,14$.

§. 6.

Lehrsatz.

Regelmäßige Vielecke von gleich vielen Seiten sind ähnliche Figuren.

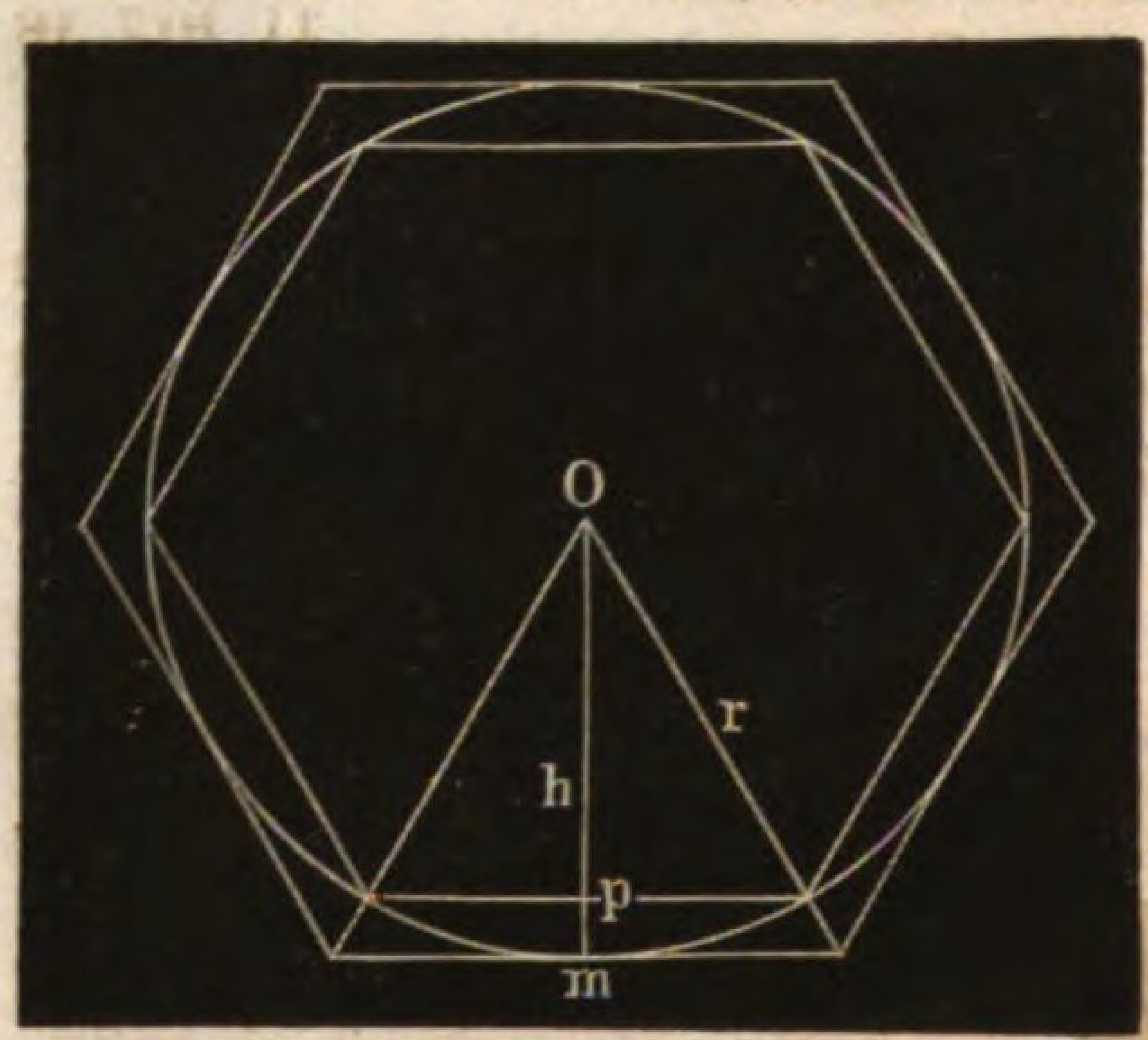
Beweis:

1) sind ihre Winkel einander gleich, da die Größe eines Polygonwinkels nicht von der Größe der Seiten, sondern von der Anzahl derselben abhängt;

2) da die Seiten eines jeden unter sich gleich sind, so haben sie gegen einander einerlei Verhältniß; folglich sind die Figuren einander ähnlich.

Zertheilt man ähnliche regelmäßige Vielecke aus dem Mittelpunkte der **in** und **um** sie beschriebenen Kreise in Dreiecke, so sind auch die Dreiecke des einen den Dreiecken des andern ähnlich, und daher verhalten sich die Umfänge solcher Vielecke, wie die Halb- oder Durchmesser der **in** oder **um**

sie beschriebenen Kreise. Die Flächeninhalte regelmäßiger Vielecke von gleich vielen Seiten verhalten sich wie die Quadrate der Halb- oder Durchmesser der **in** oder **um** sie beschriebenen Kreise.



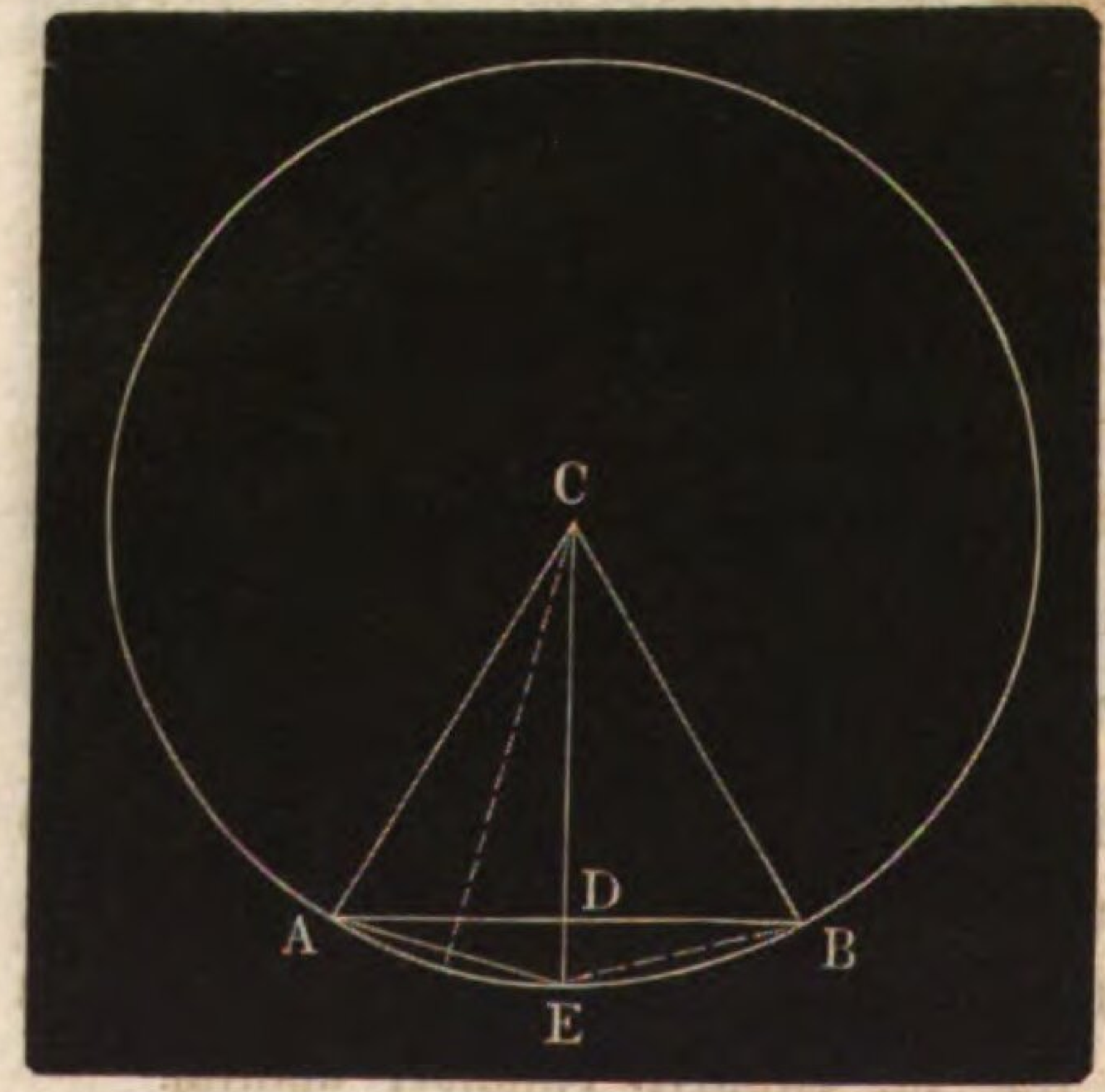
Der Flächeninhalt des innern regelmäßigen Vielecks in einem Kreise verhält sich zu dem Flächeninhalt des äußern regelmäßigen von gleich vielen Seiten, wie $Op^2 : Om^2$, oder allgemeiner ausgedrückt, wie $h^2 : r^2$, wenn h die Höhe eines der innern Dreiecke und r den Halbmesser des Kreises bedeutet.

§. 7.

Aufgaben.

I. Aus der Seite eines regelmäßigen Vielecks von n Seiten und dem Halbmesser des umgeschriebenen Kreises einen allgemeinen Ausdruck für die Seite eines Vielecks von 2n Seiten zu finden.

Auflösung:



Es sei AB, $= s$, die Seite des n ecks, und CA, $= r$ der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises. Man ziehe CE senkrecht durch AB und darauf die Sehne AE, so ist diese die gesuchte Seite, und sie ist gleich

$$\sqrt{2r\,[r - \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}s^2)}]}$$

Beweis:

Es ist $AE^2 = AD^2 + DE^2$
$$= \tfrac{1}{2}AB + (CE - CD)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}s^2 + r^2 - 2rCD + CD^2$$

Nun ist $CD^2 = AC^2 - AD^2$

$= r^2 - \frac{1}{4}s^2$; daher

$CD = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}$; also ist

$AE^2 = \frac{1}{4}s^2 + r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)} + r^2 - \frac{1}{4}s^2$

$= 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}$,

$= 2r[r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}]$; mithin ist

$AE = \sqrt{2r[r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}s^2)}]}$

Wenn $n = 6$ und $r = 1$ gesetzt wird, so ist auch $s = 1$, und AE als die Seite des Zwölfecks

$= \sqrt{2.1[1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{4})}]} = \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} =$ 0,5176380 . . ., also ist der ganze Umfang des Zwölfecks $= 12 \times 0{,}5176380 = 6{,}2116560$.

Hieraus folgt, daß der Durchmesser des Kreises sich zum Umfang des in ihm beschriebenen Zwölfecks verhält, wie 1 : 3,1058280 . . . Da sich der Umfang des innern Vielecks von n Seiten zum Umfange des äußern, wie die Höhe eines Dreiecks der innern Figur zum Halbmesser verhält, so kann man aus dem Umfange des **in** den Kreis beschriebenen Zwölfecks den Umfang des **um** ihn beschriebenen finden.

Das Perpendikel aus C auf AE wäre $= \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{3})}}{2}$ für den Halbmesser $= 1$. Hiernach ist der Umfang des umgeschriebenen Zwölfecks $= 6{,}430776$; also das Verhältniß des Durchmessers zu diesem Umfang $= 1 : 3{,}215388$ . . .

Denkt man sich noch eine gerade Linie von E nach B gezogen, so zeigt sich, daß der Flächeninhalt des Vielecks von 2 n Seiten (p') gleich ist dem Vieleck von n Seiten (p) + n Mal AEB. Man setze also $CD = h$, so ist

$$p' = \frac{ns}{2}h + \frac{ns}{2}(r - h) = \frac{nsr}{2};$$

folglich verhält sich $\quad p : p' = h : r$.

Nennt man P das äußere Vieleck von n Seiten, so verhält sich

$$P : p = r^2 : h^2, \text{ ferner}$$

$$p : p' = h : r$$

$$P : p' = r : h \text{ oder}$$

$$= p' : p.$$

Es ist also das innere Vieleck von 2 n Seiten die mittlere Proportionalgröße zwischen dem innern und äußern Vieleck von n Seiten, und daher $p' = \sqrt{P \cdot p}$. Wird endlich das äußere n eck von 2 n Seiten mit P' und die Höhe eines der Dreiecke von p' durch h' bezeichnet, so verhält sich $p' : P' = h'^2 : r^2$. Es ist aber $h'^2 = r^2 - \frac{1}{4} AE^2 = \frac{1}{2} r (r + h)$ und daher verhält sich

$$p' : P' = \tfrac{1}{2} r (r + h) : r^2$$
$$= \tfrac{1}{2} (r + h) : r.$$

Ferner ergibt sich aus der frühern Proportion

$$P : p' = r : h$$
$$= p' : p,$$ daß sich verhält

$(r + h) : r = (p + p') : p'$; folglich verhält sich

$p' : P' = \frac{1}{2} (p + p') : p'$ und daher ist

$$P' = \frac{2 p'^2}{p + p'} = \frac{2 P p}{p + p'}.$$

II. Die Seite eines regulären Neunecks mißt 7′ 6″; wie lang ist der Radius des umgeschriebenen Kreises und wie lang die Seite eines hineingeschriebenen, regelmäßigen Achtzehnecks?

Auflösung:

r ist $= \frac{90''}{0{,}68} = 132{,}353'' = 11'\ 0{,}353''$; mithin ist die Seite des hineingeschriebenen regelmäßigen Achtzehnecks

$$= \sqrt{2 \times 132{,}353 [132{,}353 - \sqrt{(132{,}353^2 - 45^2)}]}$$
$= 45{,}685''$ oder $3'\ 9{,}685''$.

III. Die Seite eines im Kreise beschriebenen, regelmäßigen Sechsecks ist 4′ 9″ lang; wie lang sind die Seiten des in- und umgeschriebenen regelmäßigen Zwölfecks?

Antwort:

Die Seite des hineingeschriebenen, regelmäßigen Zwölfecks ist

$$= \sqrt{2 . 57 [57 - \sqrt{(57^2 - 28{,}5^2)}]} = 29{,}506'' = 2'\ 5{,}506''.$$

Da sich nun die Seiten der eingeschriebenen, regelmäßigen Vielecke zu den Seiten der umgeschriebenen, regelmäßigen Vielecke verhalten, wie h : r, so muß hier zunächst die Höhe eines der zwölf congruenten Dreiecke des hineingeschriebenen, regelmäßigen Zwölfecks berechnet werden; diese ist

$$= \sqrt{(57^2 - 14{,}753^2)} = 55{,}057''.$$

Es verhält sich also 55,057 : 57 = 29,506 : x, folglich

$$x = \frac{57 \times 29{,}506}{55{,}057}.$$

IV. Der Radius des umgeschriebenen Kreises eines regulären Siebenecks mißt 8′ 4″; wie lang ist die Seite der Figur, und wie verhält sich der Flächeninhalt des eingeschriebenen, regelmäßigen Siebenecks zum Flächeninhalt des eingeschriebenen, regelmäßigen Vierzehnecks?

Antwort:

Die Seite des hineingeschriebenen Siebenecks ist = 0,87 × 100″ = 87″.

Die Seite des hineingeschriebenen, regelmäßigen Vierzehnecks dagegen ist

$$= \sqrt{2 \,.\, 100[100 - \sqrt{(100^2 - 43{,}5^2)}]} = 44{,}625''.$$

Aus den Seitenlängen und aus den Radien der umgeschriebenen Kreise lassen sich aber die Flächeninhalte der hineingeschriebenen, regelmäßigen Vielecke durch Rechnung finden. Der Flächeninhalt unsers Siebenecks ist

$$\frac{7 \times 87}{2} \sqrt{(100^2 - 43{,}5^2)} = 27418{,}093 \square'';$$

der Flächeninhalt des Vierzehnecks ist

$$\frac{14 \,.\, 44{,}625}{2} \sqrt{(100^2 - 22{,}313^2)} = 30449{,}69025 \square'';$$

also verhält sich der Flächeninhalt des eingeschriebenen, regelmäßigen Siebenecks zu dem Flächeninhalte des eingeschriebenen, regelmäßigen Vierzehnecks, wie 27418,093 : 30449,69025.

V. Der Radius eines Kreises mißt 7′; wie lang sind die Seiten eines hineingeschriebenen, regelmäßigen Acht- und Sechszehnecks, wie lang ist die Seite eines umgeschriebenen regulären Achtecks, und wie verhalten sich die Flächeninhalte dieser drei Figuren zu einander?

Antwort:

Die Seite des regelmäßigen Achtecks ist = 0,76 × 7′ = 5,32′, mithin ist die Seite des hineingeschriebenen, regelmäßigen Sechszehnecks.

$$= \sqrt{2 \,.\, 7[7 - \sqrt{(7^2 - 2{,}66^2)}]} = 2{,}711'.$$

Um die Seite des umgeschriebenen regelmäßigen Achtecks zu finden, berechnen wir erst die Höhe eines Dreiecks des eingeschriebenen regelmäßigen

Achtecks; diese ist $= \sqrt{(7^2 - 2,66^2)} = \sqrt{41,9244} = 6,475'$, also verhält sich $6,475 : 7 = 5,32 : x$

$$x = \frac{7 \times 5,32}{6,475} = 5,751'.$$

Nun ist der Flächeninhalt des hineingeschriebenen, regelmäßigen Achtecks $= \frac{8 \times 5,32}{2} \sqrt{(7^2 - 2,66^2)} = 137,788 \square'$.

Ferner verhalten sich die Flächeninhalte der eingeschriebenen, regelmäßigen Vielecke zu den Flächeninhalten der umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke, wie $h^2 : r^2$, das ist wie $6,475^2 : 7^2 = 137,788 : x$

$$x = \frac{49 \times 137,788}{41,9244} = 161,036 \square';$$

folglich ist der Flächeninhalt des umgeschriebenen regelmäßigen Achtecks $= 161,036 \square'$.

Endlich wissen wir, daß der Flächeninhalt des innern Vielecks von 2n Seiten die mittlere Proportionalgröße ist zwischen dem innern und äußern Vieleck von n Seiten; folglich verhält sich $137,788 : x = x : 161,036$

$$x^2 = 137,788 \times 161,036$$

$$x = \sqrt{22188,8283} = 148,959 \square'.$$

Demnach verhalten sich die Flächeninhalte dieser drei Figuren, wie

$$137,788 : 148,959 : 161,036.$$

VI. Zeichne in einen Kreis von 8' Radius ein regelmäßiges Fünf- und Zehneck und ebenso um den Kreis ein regelmäßiges Fünf- und Zehneck, berechne sodann die Umfänge und Flächeninhalte dieser vier Figuren und bestimme demnach das Verhältniß derselben zu einander.

Auflösung:

Die Seite des hineingeschriebenen, regelmäßigen Fünfecks ist $= 1,17 \times 8 = 9,36'$, die Seite des hineingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks ist

$$= \sqrt{2 . 8[8 - \sqrt{(8^2 - 4,68^2)}]} = 4,918'.$$

Die Seite des umgeschriebenen regelmäßigen Fünfecks erhält man aus der Proportion: $6,488 : 8 = 9,36 : x$

$$x = \frac{8 \times 9,36}{6,488} = 11,541'.$$

Die Seite des umgeschriebenen regelmäßigen Zehnecks endlich ist $= \frac{8 \times 4,918}{7,063} = 5,57'$; mithin verhalten sich die Umfänge dieser vier Figuren,

wie $(5 \,.\, 9{,}36) : (10 \,.\, 4{,}918) : (5 \,.\, 11{,}541) : (10 \,.\, 5{,}57)$
$= 46{,}80 \;:\; 49{,}18 \;:\; 57{,}705 \;:\; 55{,}7.$

Zur Bestimmung der Flächeninhalte dieser vier Figuren berechnen wir zuerst den Flächeninhalt des eingeschriebenen, regelmäßigen Fünfecks; dieser ist $= \frac{5 \,.\, 9{,}36}{2} \sqrt{(8^2 - 4{,}68^2)} = 151{,}8192$ □'; dann den Flächeninhalt des umgeschriebenen, regelmäßigen Fünfecks; dieser ist aus der Proportion, $6{,}488^2 : 8^2 = 151{,}8192 : x$, zu erhalten und ist also $= \frac{64 \times 151{,}8192}{42{,}0976}$ $= 230{,}807$ □'.

Der Flächeninhalt des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks ist die mittlere Proportionalgröße zwischen den Flächeninhalten des ein- und umgeschriebenen Fünfecks und wird also gefunden, wenn wir setzen:

$$151{,}819 : x = x : 230{,}807$$
$$x^2 = 151{,}819 \times 230{,}807 = 35040{,}7361$$
$$x = \sqrt{35040{,}7361} = 187{,}191 \text{ □'}.$$

Der Flächeninhalt des umgeschriebenen Zehnecks endlich wird gefunden, wenn man die Flächeninhalte des eingeschriebenen und umgeschriebenen Fünfecks mit einander multiplicirt und dies Resultat zwei Mal nimmt, das erhaltene Produkt aber durch die Summe der Flächeninhalte des eingeschriebenen Fünf- und Zehnecks dividirt, also ist der Flächeninhalt des umgeschriebenen, regelmäßigen Zehnecks $= \frac{2 \,.\, 230{,}806 \,.\, 151{,}819}{151{,}819 + 187{,}191} = 206{,}724$ □'.

Demnach verhalten sich die Flächeninhalte dieser vier Figuren wie:

$$151{,}819 : 187{,}191 : 230{,}806 : 206{,}724.$$

IV. Abschnitt.

Berechnung des Kreises und seiner Theile.

§. 1.

Einleitung.

Ein Kreis kann als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet werden.

Beweis:



Man beschreibe in einen Kreis irgend ein regelmäßiges Vieleck und verdoppele darauf die Anzahl der Seiten desselben, so sind die Bogen, deren Sehnen die Seiten des letztern ausmachen, nur halb so groß, als die Bogen der Seiten des erstern, und daher kommen die Sehnen des letztern ihren Bogen näher und sind folglich an Größe weniger von ihnen verschieden, als die Sehnen des erstern. Durch fortgesetzte Verdoppelung der Anzahl der Seiten hat man also in seiner Gewalt, die Sehnen ihren Bogen immer näher und folglich so nahe zu bringen, als man nur immer will.

Wird aber der Unterschied zwischen der Sehne und ihrem Bogen desto kleiner, je kleiner beide werden, d. h. je größer die Anzahl der Theile ist, in welche die Peripherie getheilt wird; so kann man mit Recht schließen, daß, wenn beide unendlich klein wären, oder wenn die Peripherie in unendlich viele gleiche Theile getheilt würde, der Unterschied zwischen ihnen noch kleiner als unendlich klein, d. h., daß er so gut als Nichts sein müßte; mithin kann man den Kreis einem Vieleck von unendlich vielen Seiten gleich setzen. Aus diesen begreiflichen Bestimmungen können wir folgende Sätze herleiten:

1) Kreise, als regelmäßige Vielecke von unendlich vielen Seiten, sind ähnliche Figuren.

2) Die Peripherieen der Kreise verhalten sich wie ihre Halb- oder Durchmesser.

3) Die Kreisflächen verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser.

4) Ein Kreis ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie der Peripherie des Kreises und dessen Höhe seinem Halbmesser gleich ist.

5) Der Flächeninhalt eines Kreises wird daher gefunden, wenn man seine Peripherie mit dem halben Radius multiplicirt.

6) Der Flächeninhalt des Kreises verhält sich zum Flächeninhalt des umgeschriebenen regelmäßigen Vielecks, wie die Peripherie zum Umfange des Vielecks.

7) Man könnte den Inhalt des Kreises aus dem des äußern Vielecks finden, wenn das Verhältniß der Peripherie zu dem Umfange des Vielecks bekannt wäre. Dieses Verhältniß aber aufzufinden, hat dieselbe Schwierigkeit, als das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie zu bestimmen, wodurch

man eben so gut in den Stand gesetzt würde, den Inhalt des Kreises zu finden. Man hat sich daher viele Mühe gegeben, dieses Verhältniß aufzufinden; man kennt aber hierzu keinen directen Weg. Indessen kann man durch mancherlei Mittel dem wahren Verhältniß so nahe kommen, als man nur immer will. Man kann ein regelmäßiges Vieleck **in** und **um** den Kreis beschreiben, und das Verhältniß des Durchmessers zu dem Umfange beider berechnen. Darauf muß man die Anzahl ihrer Seiten verdoppeln und die Größe der Umfänge und ihr Verhältniß zum Durchmesser von Neuem bestimmen, und so mit der Verdoppelung der Anzahl der Seiten und der Berechnung der Umfänge und des Verhältnisses derselben zum Durchmesser fortfahren, bis man beide Vielecke einander so sehr genähert hat, daß sie nicht mehr merklich von einander abweichen. Alsdann ist man sicher, daß das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie mit den Verhältnissen desselben zu den Umfängen dieser Vielecke so weit übereinstimmend sein müsse, als diese beiden unter einander selbst übereinstimmen, da die Peripherie von dem Umfange eines jeden Vielecks weniger verschieden ist, als beide von einander selbst abweichen.

Ludolph van Ceulen, gewöhnlich Ludolph von Köln genannt, hat auf diese mühsame Weise zuerst das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie = 1 : 3,14159265358979323846264338327950 u. s. w. gefunden. Auf 32 Decimalstellen berechnete er diese Zahl, die noch immer nach ihm die Ludolphische Zahl genannt und in den Rechnungen gewöhnlich durch π bezeichnet wird. Man hat sie aber in neuern Zeiten durch bequemere Methoden noch weiter berechnet und besitzt sie jetzt bis auf 156 Decimalstellen.

Diese Aufgabe, das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie zu bestimmen, ist mit dem Problem der Quadratur des Cirkels gleich, weil die Ausmessung der Kreisflächen auf diesem Verhältnisse beruht. Es gehört dieses zu den berüchtigten Problemen der Mathematik, indem Viele sich vergebens bemüht haben, das gedachte Verhältniß durch ein Paar ganze Zahlen auszudrücken, und Manche wegen des Strebens, Etwas zu finden, was sie nicht zu suchen verstanden, dasjenige verloren, was sie hatten, nämlich ihren Verstand. Unstreitig ist jenes Verhältniß irrational, wie Lambert in seinen „Beiträgen zum Gebrauch der Mathematik“ und Schulz in seiner Schrift „Sehr leichte und kurze Entwickelung einiger der wichtigsten mathematischen Theorieen“ gezeigt haben. Daher ist es unmöglich, es durch ganze Zahlen auszudrücken. Die Ludolphische Zahl dient allen andern Zahlen dieses Verhältnisses, z. B. 1 : 3, 7 : 22 u. s. w. zur Prüfung, und ist zur genauesten Berechnung des Kreises mehr als hinreichend.

§. 2.

Berechnung des Kreisumfanges.

Erste Aufgabe:

Die Größe der Peripherie eines Kreises in irgend einem Längenmaße zu finden, wenn der Halb- oder Durchmesser gegeben ist.

Auflösung:

Es sei der Halbmesser nach dem Längenmaße, in welchem man die Peripherie verlangt, $= r$ und die Ludolphische Zahl $= \pi$, so ist die Peripherie $= 2r\pi$.

Beweis:

Man setze die gesuchte Peripherie $= p$; der Durchmesser ist der Bedingung zufolge $= 2r$, und daher verhält sich $1 : \pi = 2r : p$; folglich ist $p = 2r\pi$. Ist der Durchmesser d gegeben, so ist $p = d\pi$. Aus der Gleichung: $p = 2r\pi$ folgt $r = \frac{p}{2\pi}$ und aus der Gleichung $p = d\pi$ folgt: $d = \frac{p}{\pi}$. Dies lehrt den Halb- und Durchmesser finden, wenn die Peripherie gegeben ist.

Wenn der Halbmesser eines Kreises der Summe der Halbmesser zweier andern Kreise gleich ist, so ist auch die Peripherie desselben so groß, als die Peripherieen der beiden andern zusammen genommen; denn man setze die Halbmesser der beiden letztern Kreise $= R$ und r und den des erstern $= \rho$, also $\rho = (R + r)$; so sind die Peripherieen jener $= 2R\pi + 2r\pi$ und die Peripherie von diesem $= 2\rho\pi = 2(R + r)\pi = 2R\pi + 2r\pi$.

Zweite Aufgabe:

Der Durchmesser eines Kreises ist $= 9' \; 7''$ lang; wie lang ist der Umfang des Kreises?

Antwort: $p = 115'' \times 3{,}14 = 361{,}1''$.

Dritte Aufgabe:

Der Umfang eines Kreises ist $25' \; 4''$ lang; wie lang ist der Radius desselben?

Antwort: $r = \frac{304}{6{,}28} = 48{,}407''$.

§. 3.

Berechnung des Kreisinhaltes.

Erste Aufgabe:

Den Flächeninhalt eines Kreises zu finden, wenn der Halbmesser $= r$ gegeben ist.

Auflösung:

Man setze den Flächeninhalt im Quadrate des Maßes, in welchem der Halbmesser gegeben ist, $= a$; so ist $a = r^2\pi$.

Beweis:

Der Flächeninhalt eines Kreises ist $= \frac{rp}{2}$; nun ist $p = 2r\pi$, also $a = \frac{r.2r\pi}{2} = r^2\pi$.

Ist anstatt des Halbmessers der Durchmesser gegeben, so ist $a = \frac{1}{4}d^2\pi$. Aus der Gleichung $a = r^2\pi$ folgt: $r = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$ und daher ist $p = \sqrt{a\pi}$.

Wenn der Halbmesser eines Kreises der Summe der Halbmesser zweier anderer Kreise gleich ist, so ist der Flächeninhalt desselben größer, als der Flächeninhalt der beiden andern zusammen genommen; denn man bezeichne die Halbmesser der Kreise, wie im vorhergehenden Paragraphen, so ist der Flächeninhalt der beiden kleinern Kreise $= R^2\pi + r^2\pi$, der Inhalt des größern Kreises aber $= R^2\pi = (R + r)^2\pi = (R^2 + 2Rr + r^2)\pi$, welches Produkt offenbar größer, als jene Summe ist.

Zweite Aufgabe:

Der Radius eines Kreises ist 15′ 7″ lang; wie groß ist der Flächeninhalt des Kreises?

Antwort: Flächeninhalt $= (187'')^2 . 3{,}14 = 109802{,}66\,\square''$
$= 762\,\square'\ 74{,}66\,\square''$.

Dritte Aufgabe:

Wie groß ist die Tragkraft eines Hanfseiles von $\frac{3}{4}''$ Durchmesser, wenn eine □linie Hanfgarn 50 ℔ trägt?

Antwort: Tragkraft $= (\frac{1}{2} \times 9''')^2 . 3{,}14 \times 50 = 3179{,}25$ ℔.

Vierte Aufgabe:

Der Flächeninhalt eines Kreises ist 543 □fuß; wie lang ist der Durchmesser des Kreises?

Antwort: Durchmesser $= 2\sqrt{\frac{543}{3{,}14}} = 2\sqrt{172{,}93} = 2 \times 13{,}15 = 26{,}3'$.

Fünfte Aufgabe:

Wie lang muß der Durchmesser eines Drahtseils genommen werden, welches 7500 ℔ tragen soll, wenn eine □linie Eisendraht 420 ℔ trägt?

Antwort: Durchmesser $= 2\sqrt{\frac{7500:420}{3,14}} = 2\sqrt{5,6869} = 2 \times 2,38$ $= 4,76'''$.

Sechste Aufgabe:

Der Umfang eines Kreises ist 27′ 9″ lang; wie groß ist der Flächeninhalt desselben?

Antwort: Fl: $= \left(\frac{333''}{6,28}\right)^2 \times 3,14 = 8828,481$ □″ $= 61$ □′ $44,27$ □″.

Siebente Aufgabe:

Der Flächeninhalt eines Kreises ist 987 □′; wie lang ist der Umfang des Kreises?

Antwort: Umfang $2 . 3,14 \sqrt{\frac{987}{3,14}} = 111,156'$.

Achte Aufgabe:

Ein runder eichener Stab hat einen Umfang von 11″; wie groß ist seine Tragkraft, wenn eine □linie Eichenholz 180 ℔ trägt?

Antwort: $\left(\frac{132'''}{6,28}\right)^2 . 3,14 \times 180$ ℔ $= 249687,36$ ℔ = Tragkraft.

Neunte Aufgabe:

Zwei Kreise haben einen Radius von 17 und 9′, ein dritter Kreis hat einen Radius von 26′; wie verhalten sich die Flächeninhalte der beiden ersten zusammen genommen zu dem Flächeninhalte des letztern Kreises?

Antwort: $(17^2 \times 3,14 + 9^2 \times 3,14) : 26^2 \times 3,14$
$=$ 1161,8 □′ : 2122,64 □′ oder
wie $(17^2 + 9^2) : 26^2$, d. i.
wie 370 : 676 oder
185 : 338.

§. 4.

Berechnung des Kreisbogens.

Erste Aufgabe:

Die Länge eines Bogens von n Graden zu finden, wenn der Halbmesser = r gegeben ist.

Auflösung und Beweis:

Da die Länge eines solchen Bogens sich zur Länge der ganzen Peripherie, wie n : 360 verhält, so gibt die Proportion $360 : n = 2r\pi : x$ die gesuchte Bogenlänge x; also ist $x = \frac{2nr\pi}{360} = \frac{nr\pi}{180}$.

Zweite Aufgabe:

Der Radius eines Kreises ist 15′ 2″ lang; wie lang ist der Bogen eines Winkels von 47⁰?

Antwort: $x = \frac{182'' \times 3{,}14 \times 47}{180} = 149{,}22'' = 12'\ 5{,}22''$.

Dritte Aufgabe:

Der Bogen eines Winkels von 135⁰ ist 83′ 7″ lang; wie lang ist der Durchmesser des Kreises?

Antwort: $2r = \frac{360 \times 1003''}{135 \times 3{,}14} = \frac{361080}{423{,}9} = 851{,}8'' = 70'\ 11{,}8''$.

Vierte Aufgabe:

Der Durchmesser eines Kreises ist 72′ 5″ lang; wie groß ist der Centriwinkel eines Bogens, welcher 45′ 4″ lang ist?

Antwort: Centriwinkel $= \frac{360 \times 544}{869 \times 3{,}14} = 71^0\ 46'$.

§. 5.

Berechnung des Kreisausschnittes.

Erste Aufgabe:

Den Flächeninhalt eines Sectors von n Graden zu finden, wenn der Halbmesser = r gegeben ist.

Auflösung und Beweis:

Da sich $360 : n = r^2\pi : x$ verhält, so ist $x = \frac{nr^2\pi}{360}$.

Auch kann man den Flächeninhalt eines Sectors durch das Produkt des Bogens mit der Hälfte des Halbmessers ausdrücken.

Zweite Aufgabe:

Wie groß ist der Flächeninhalt eines Sectors, dessen Radius 9′ 5″ lang und dessen Winkel 82⁰ groß ist?

Antwort: $x = \frac{82 \times 113^2 \times 3{,}14}{360} = 9132{,}67 \square''$
$= 63 \square' \, 60{,}67 \square''$

Dritte Aufgabe:

Der Flächeninhalt eines Sectors ist $5 \square' \; 122 \square''$ und er hat einen Radius von 19″; wie groß ist der Winkel und wie lang der Bogen desselben?

Antwort: Winkel $= \frac{842 \times 360}{19^2 \times 3{,}14} = 267^0 \, 24'$.

Bogenlänge $= \frac{842}{9{,}5} = 88{,}63''$.

Vierte Aufgabe:

Der Flächeninhalt eines Sectors ist $7 \square' \; 96 \square''$, sein Bogen mißt 2′ 8″; wie lang ist sein Radius und wie groß sein Winkel?

Radius $= \frac{1104 \square''}{\frac{1}{2} \cdot 32''} = 69{,}5''$

Winkel $= \frac{1104 \times 360}{(69{,}5)^2 \times 3{,}14} = 26^0 \, 35'$.

Fünfte Aufgabe:

Ein Stück Tannenholz hat einen Kreisausschnitt zur Grundfläche, dessen Radius 8″ lang und dessen Winkel 56⁰ groß ist; wie viel kann dieses Stück Holz tragen, wenn auf eine $\square$linie 100 ℔ gerechnet werden?

Antwort: Tragkraft $= \frac{56^0 \times 8'' \times 3{,}14 \times 2}{360^0} \times 4'' \times 144 \times 100$ ℔
$= 449856$ ℔.

Sechste Aufgabe:

Ein buchener Baumstamm hat einen Umfang von 17″; hieraus soll ein Stempel, dessen Grundfläche ein Sector ist, geschlagen werden, der 60000 ℔ tragen kann; wie lang ist der Bogen des Kreisausschnitts zu nehmen, wenn die Tragkraft zu 140 ℔ auf 1 $\square$linie gerechnet wird?

Antwort: $\frac{60000}{140} = 428{,}55 \square'''$ muß der Stempel im Querschnitt halten.

$\left(\frac{17}{6{,}28}\right)^2 \times 3{,}14 = 23{,}009 \square'' = 3313{,}36 \square'''$ hält der ganze Baumstamm im Querschnitt.

$3313{,}36 : 428{,}55 = 17'' : x$

Bogenlänge also $= \frac{428{,}55 \times 17}{3313{,}36} = 2{,}38''$.

§. 6.

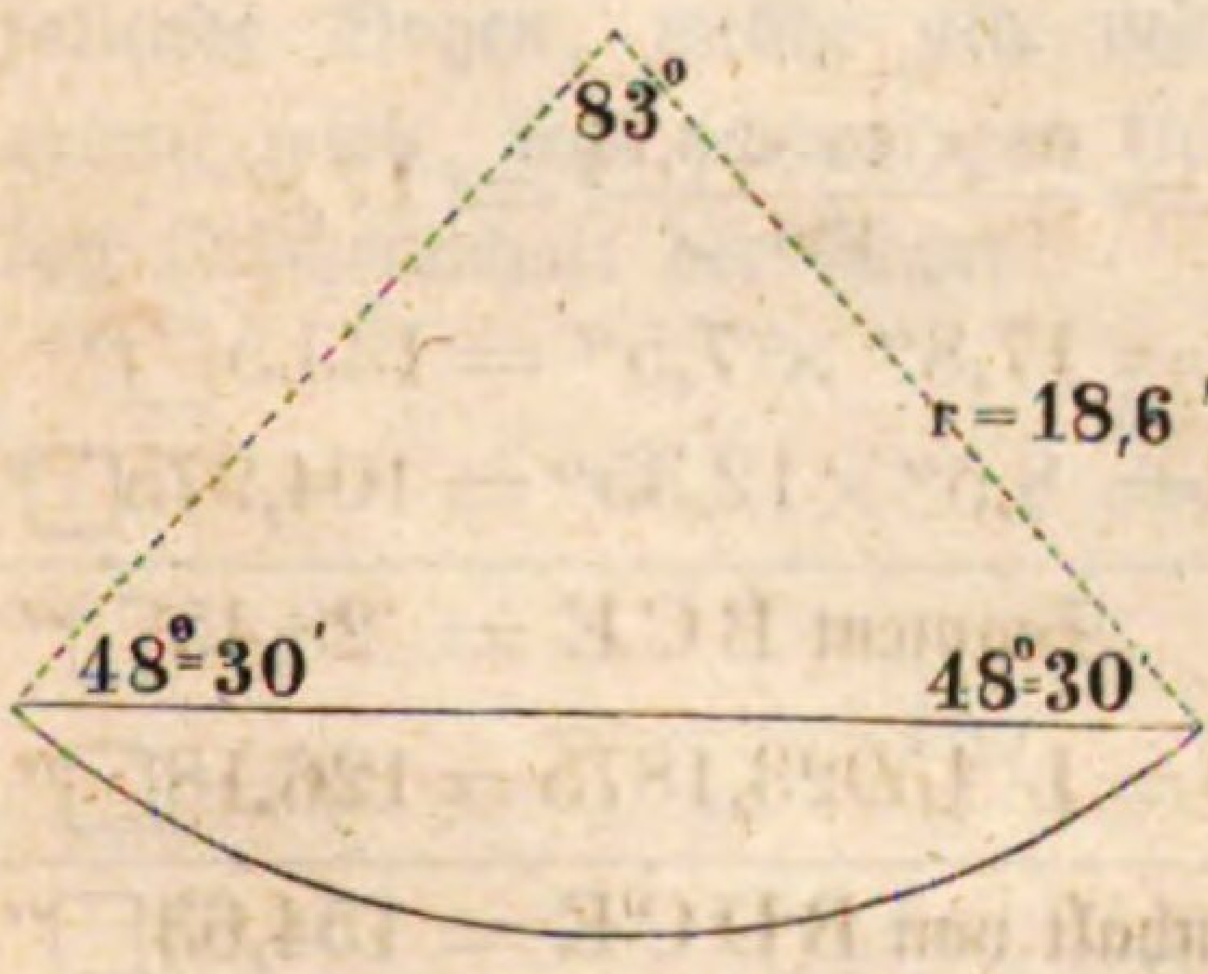
Berechnung des Kreisabschnitts.

Wenn man von dem Kreisausschnitt das gleichschenklige Dreieck abzieht, dessen ungleiche Grundlinie die Sehne des Bogens ist, und dessen gleiche Seiten Radien des Kreises sind, so erhält man den Flächeninhalt des Kreisabschnitts.

Erste Aufgabe:

Wie groß ist der Flächeninhalt eines Segments, dessen Bogen 83^0 groß und dessen Sehne 25″ lang ist?

Auflösung:



Der gleiche Winkel ist

$$= \frac{180^0 - 83^0}{2} = 48^0\ 30'.$$

Die Bogenlänge ist

$$= \frac{83 \times 18{,}6 \times 3{,}14 \times 2}{360} = 26{,}93''.$$

Der Flächeninhalt des Sectors ist $= 250{,}449 \square''$

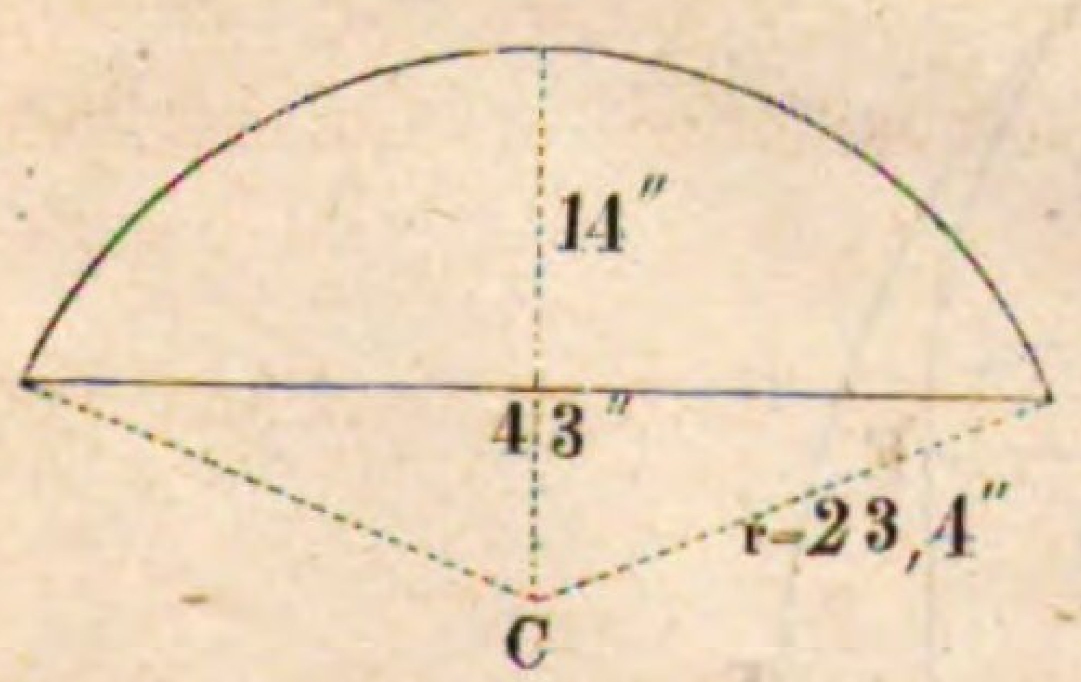
Der Flächeninhalt des Dreiecks ist $= 171{,}25 \square''$.

Segment $= 79{,}2 \square''$.

Zweite Aufgabe:

Ein Segment ist 3′ 7″ breit und 1′ 2″ hoch; wie groß ist der Flächeninhalt der Figur?

Auflösung:



Winkel C $= 132^0$

Bogenlänge $= 53{,}88''$

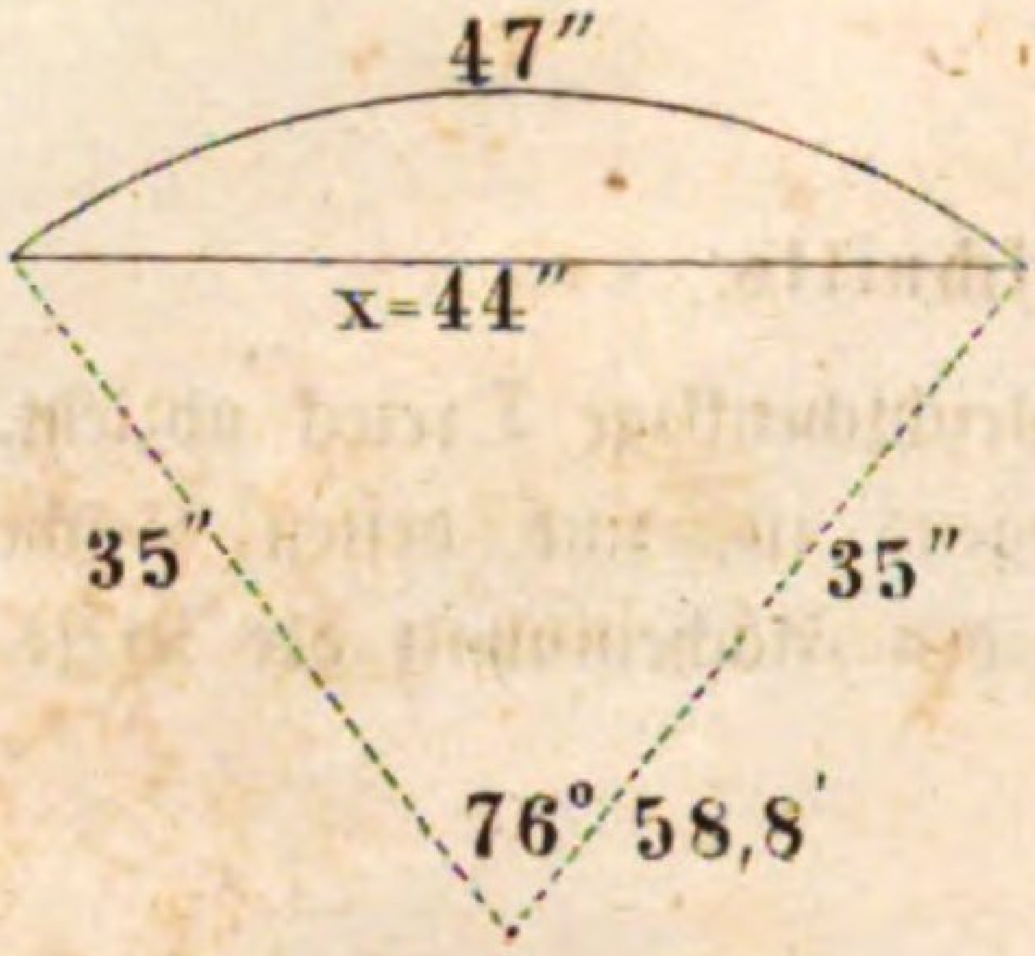
Sector $= 53{,}88'' \times 11{,}7'' = 630{,}396 \square$ zoll.

Dreieck $= 43'' \times 4{,}7'' = 202{,}1$ „

Segment $= 428{,}296 \square$ zoll.

Dritte Aufgabe:

Der Bogen eines Segments ist 47″ lang, der Radius seines Kreises mißt 35″; wie groß ist sein Winkel, wie lang seine Sehne und wie groß sein Flächeninhalt?



$$\text{Winkel} = \frac{47 \times 180}{3{,}14 \times 35} = 76^0\ 58{,}8'$$

$$\text{Sehne} = 44''$$

$$\text{Sector} = 47'' \times 17{,}5'' = 822{,}5 \,\square\,\text{zoll}$$

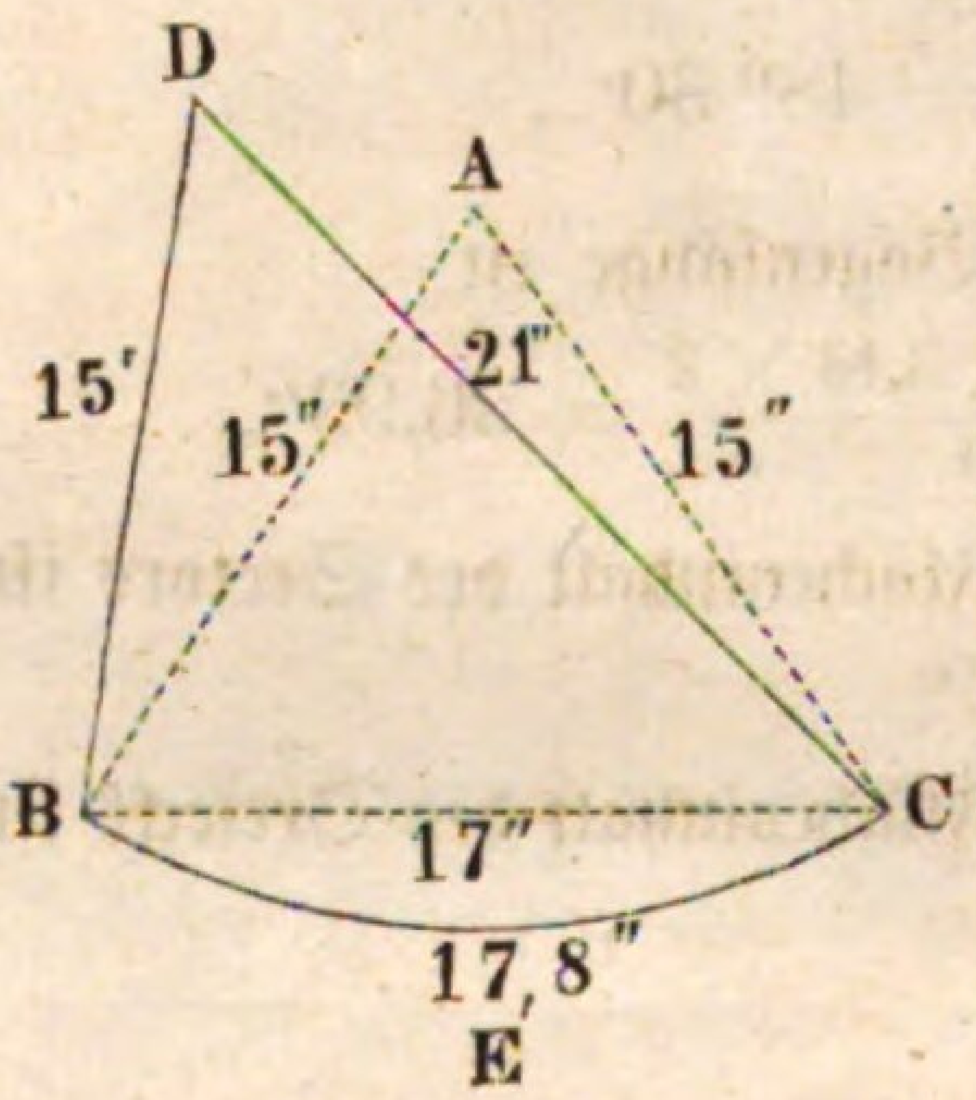
$$-\ \text{Dreieck} = \sqrt{358644} = 598{,}84 \ „$$

$$\text{Segment} = 223{,}66 \,\square\,\text{zoll.}$$

Vierte Aufgabe:

Eine Fläche ist von einem ausfallenden Bogen von 68⁰ und von zwei geraden Linien von 21 und 15′ lang begränzt; wie groß ist der Flächeninhalt der Figur?

Auflösung:



$$\text{Bogenlänge} = \frac{68 \times 15 \times 3{,}14}{180} = 17{,}8''$$

$$\text{Sector ABC} = 17{,}8'' \times 7{,}5'' = 133{,}5\,\square''$$

$$-\text{Dreieck ABC} = 8{,}5'' \times 12{,}35'' = 104{,}975\,\square''$$

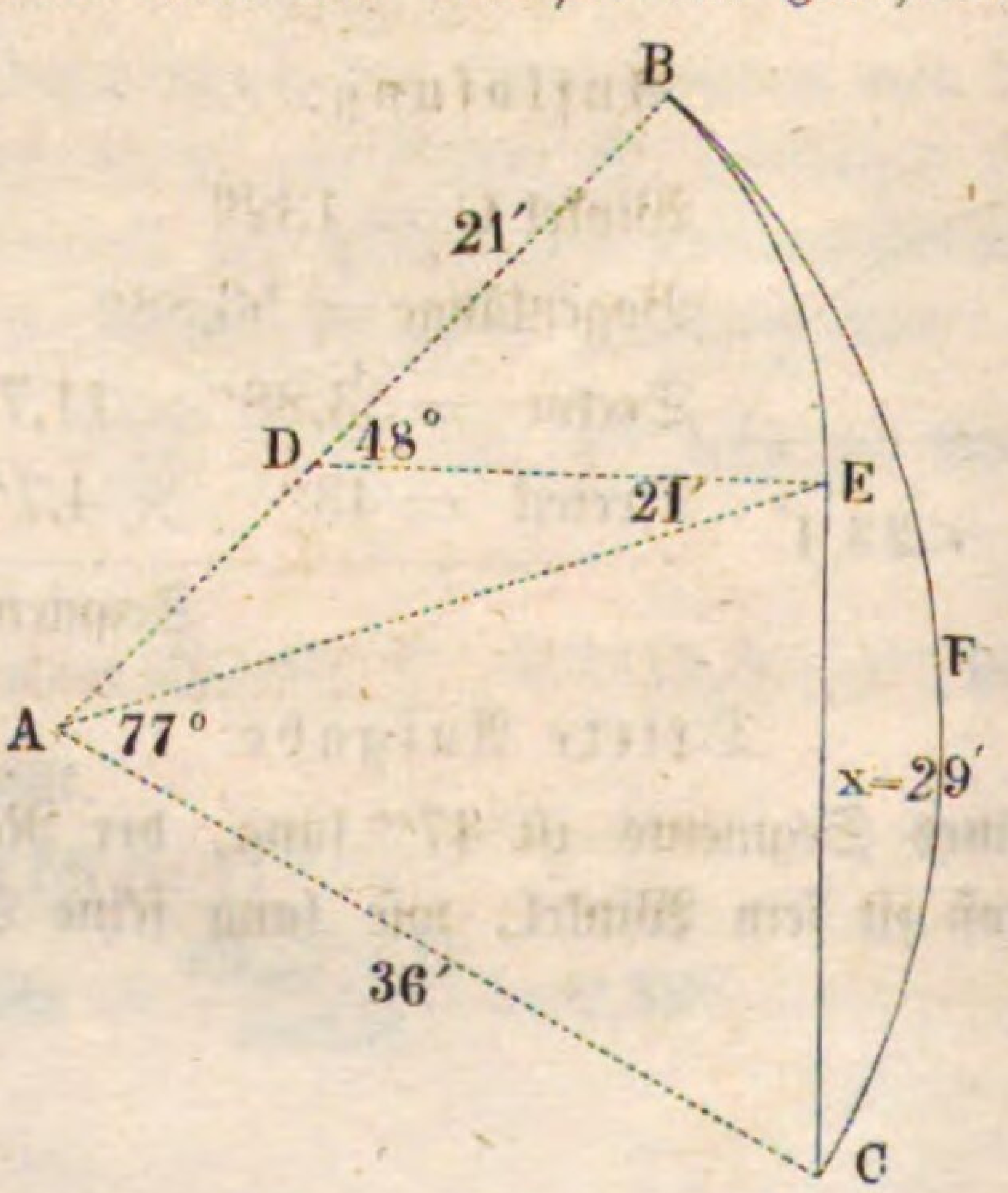
$$\text{Segment BCE} = 28{,}45\,\square''$$

$$+\text{Dreieck BCD} = \sqrt{15923{,}1875} = 126{,}18\,\square''$$

$$\text{Flächeninhalt von BDCE} = 154{,}63\,\square''.$$

Fünfte Aufgabe:

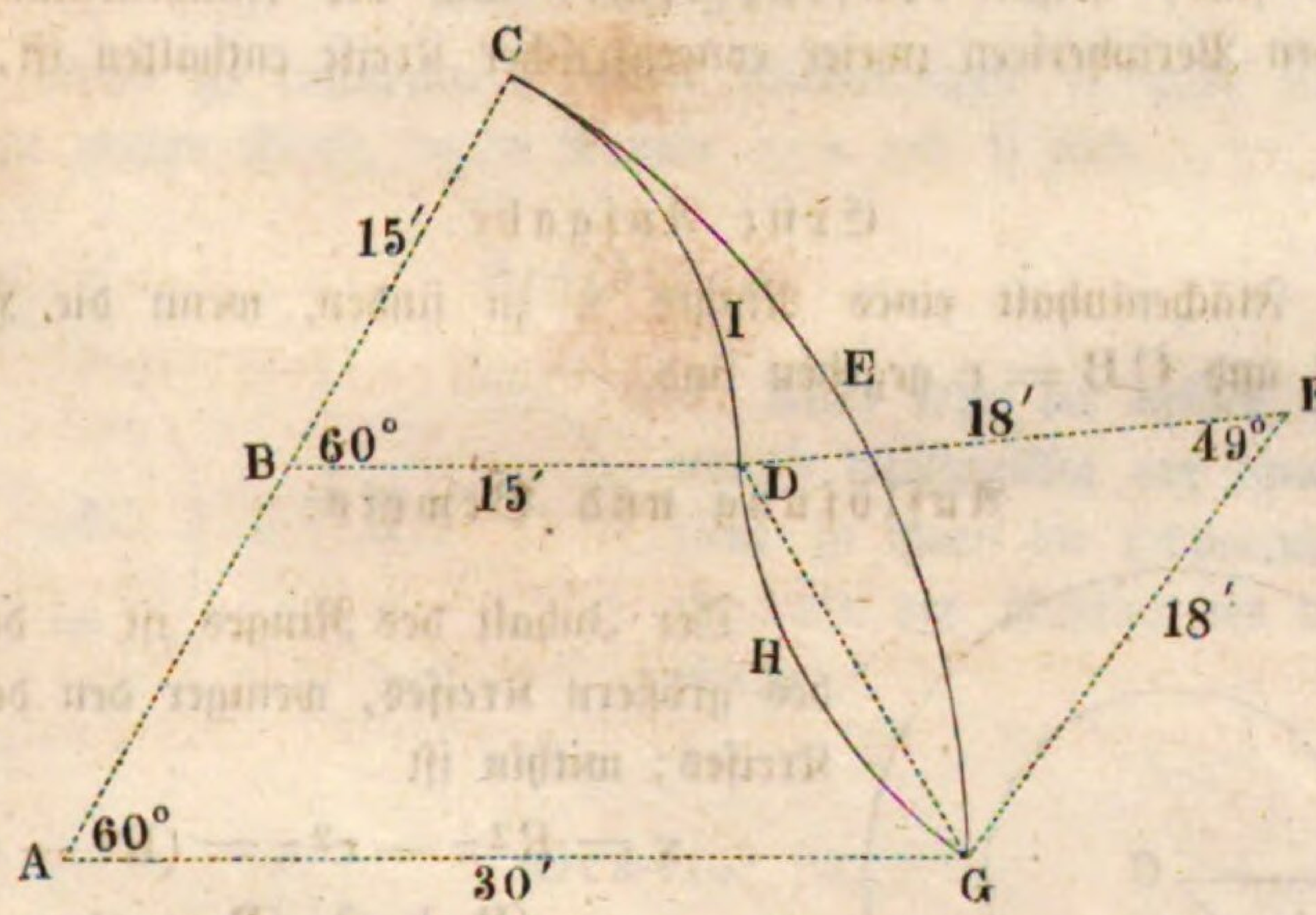
Begränze eine Fläche durch einen ein- und einen ausfallenden Bogen von 48⁰ und 77⁰ mit Radien von 21′ und 36′ lang, schließe sodann die Figur durch eine gerade Linie und berechne den Flächeninhalt derselben!



Bogenlänge B C	$= \frac{2 . 77 \times 36 \times 3{,}14}{360}$	$= 48{,}356'$
Sector A B C	$= 48{,}356' \times 18'$	$= 870{,}408 \square'$
— Sector B D E	$= 17{,}584' \times 10{,}5'$	$= 184{,}632 \square'$
+ Trapez A D E C	$= 115{,}5 \square' + 439{,}2$	$= 554{,}7 \square'$.
Figur A B E C	=	$739{,}332 \square'$
Figur B F C E	=	$131{,}076 \square'$.

Sechste Aufgabe:

Construire eine Figur, die durch einen einfallenden und zwei ausfallende Bogen, welche alle mit verschiedenen Radien geschlagen sind, begränzt wird, setze sodann den kleinsten Radius = 15′ und bestimme daraus den Flächeninhalt der Figur!



Bogenlänge C I D

$$= \frac{15 \times 3{,}14}{3} = 15{,}7'$$

Bogenlänge D H G

$$= \frac{49 \times 18 \times 3{,}14}{180} = 15{,}386'$$

Bogenlänge C E G

$$= \frac{30 \times 3{,}14}{3} = 31{,}4'.$$

Der Flächeninhalt des Sectors A C G ist $= 15' \times 31{,}4' = 471 \square'$

Sector B C D $= 7{,}5' \times 15{,}7' = 117{,}75 \square$ fuß.

Paralleltrapez A B D G $= \frac{30 + 15}{2} \times 13 = 292{,}5$

Figur A C I D G $= 410{,}25 \square$ fuß.

— Segment D H G $= 138{,}474 - 122{,}72 = 15{,}754$

Figur A B C I D H G $= 394{,}496 \square$ fuß; folglich ist die übrig bleibende Figur C I D H G E $= 471 \square' - 394{,}496 \square' = 76{,}504 \square'$.

§. 7.

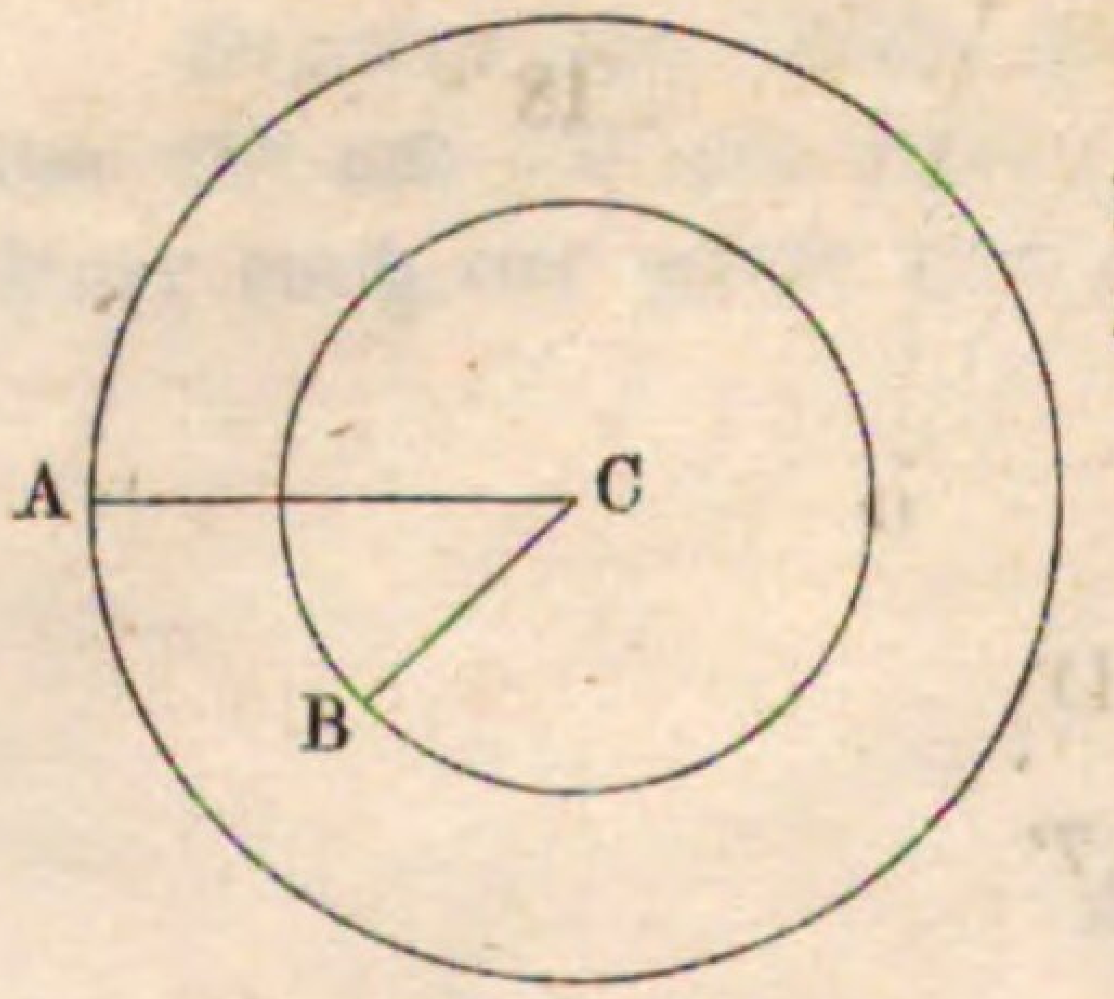
Berechnung des Ringes.

Kreise, die aus demselben Mittelpunkt mit verschiedenen Halbmessern beschrieben sind, heißen concentrische, und der Flächenraum, welcher zwischen den Peripherieen zweier concentrischer Kreise enthalten ist, heißt ein Ring.

Erste Aufgabe:

Den Flächeninhalt eines Ringes x zu finden, wenn die Halbmesser C A = R und C B = r gegeben sind.

Auflösung und Beweis:



Der Inhalt des Ringes ist = dem Inhalt des größern Kreises, weniger den des kleinern Kreises; mithin ist

$$x = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$$
$$= (R + r) \,.\, (R - r)\,\pi.$$

Zweite Aufgabe:

Der große Radius eines Ringes ist 19′ 5″, der kleine 10′ 9″ lang; wie groß ist der Flächeninhalt des Ringes?

Antwort: Inhalt $= (233 + 129)(233 - 129) \times 3{,}14$
$= 118214{,}72 \square'' = 820 \square'\ 134{,}72 \square''$.

Dritte Aufgabe:

Der Flächeninhalt eines Ringes beträgt $37\square' \; 123\square''$; der kleine Radius ist $26''$; wie breit ist der Ring?

Antwort: $37\square' \; 123\square'' = 5451\square''$

Breite $x = 26^2 . 3{,}14 = 2122{,}64 + 5451 = 7573{,}64$

$$x = \sqrt{\frac{7573{,}64}{3{,}14}} - 26 = \sqrt{2411{,}98} = 49{,}1 - 26 = 23{,}1''.$$

§. 8.

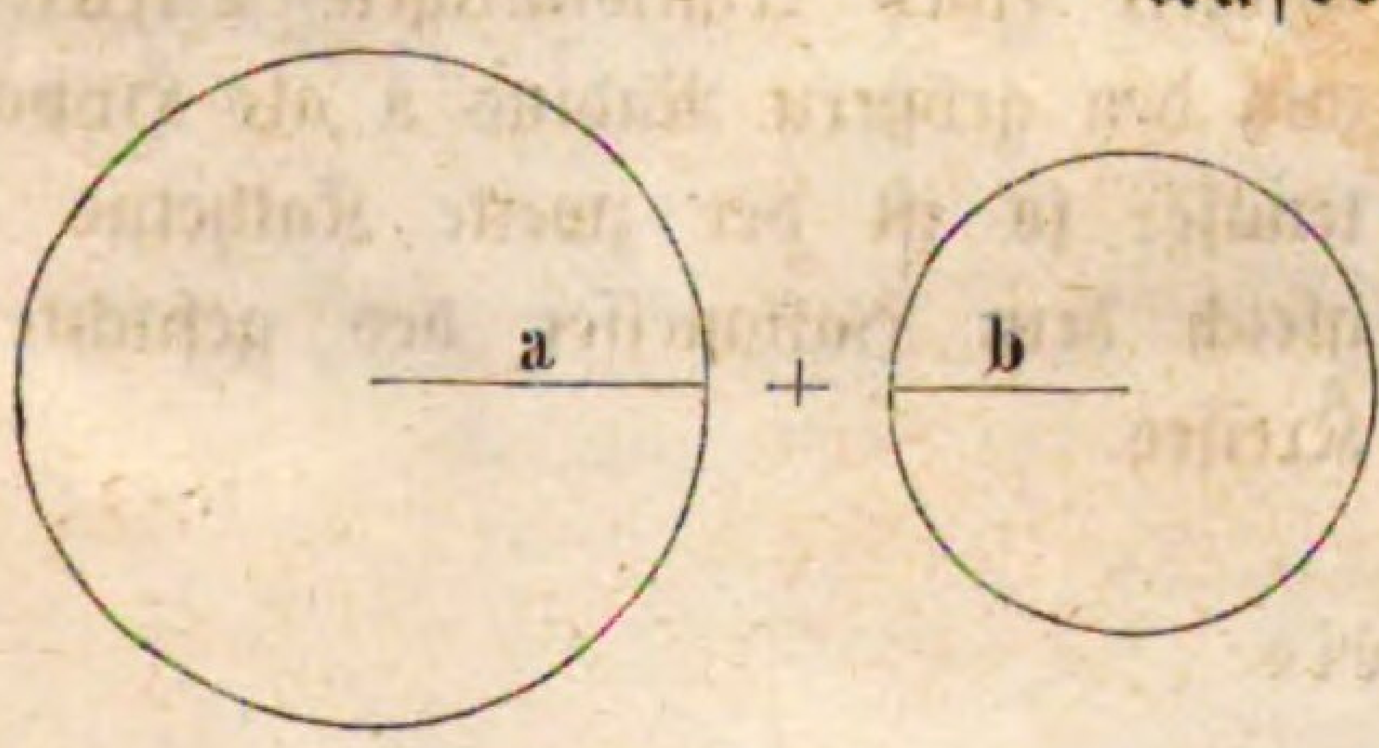
Der Kreis und die vier Rechnungsarten.

Was in den Aufgaben zum pythagoräischen Lehrsatze über die Addition, Subtraction, Multiplication und Division der Quadrate gesagt ist, läßt sich ganz genau auch auf die Kreise anwenden, wenn man statt der Seiten der Quadrate die Halbmesser der Kreise setzt.

Erste Aufgabe:

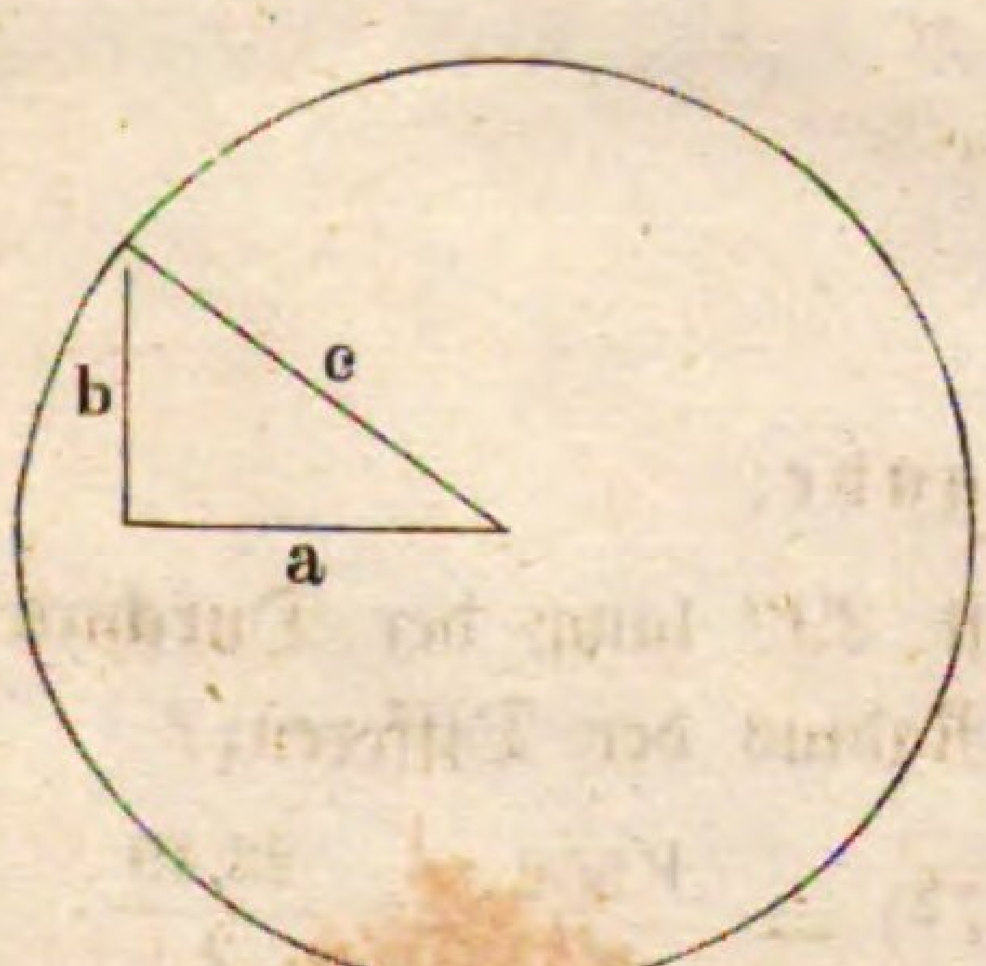
Einen Kreis zu construiren, dessen Flächeninhalt so groß ist als der Flächeninhalt zweier Kreise, deren Radien = a und b sind.

Auflösung:



Man setze die beiden Radien a und b rechtwinklig auf einander und ziehe zu ihnen die Hypotenuse c, so ist diese der Radius des verlangten Kreises:

Beweis:



Es ist $a^2 + b^2 = c^2$; mithin ist auch

$$(a^2 + b^2)\pi = c^2\pi.$$

Zweite Aufgabe:

Die drei Radien eines Kreises sind 5″, 7″ und 11″ lang; wie lang ist der Radius eines Kreises, der diesen dreien an Flächeninhalt gleich ist?

Antwort: Radius $x = \sqrt{5^2 + 7^2 + 11^2} = \sqrt{195} = 13{,}9''$.

Dritte Aufgabe:

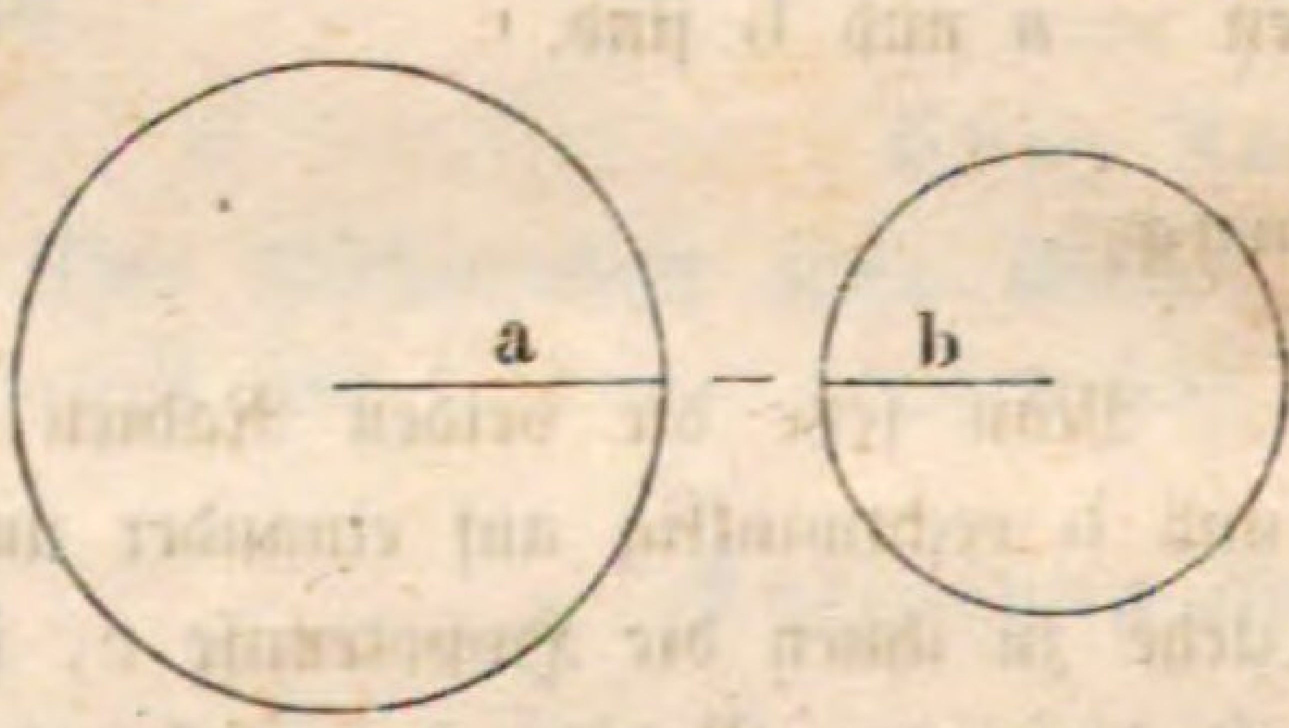
Zwei Pumpen haben einen Durchmesser von 10″ und 13″; wie lang muß der Radius einer Pumpe genommen werden, deren Querdurchschnitt den Flächeninhalten dieser beiden Pumpen gleich ist?

Antwort: Radius $x = \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 13^2} = \frac{1}{2}\sqrt{269}$
$= \frac{1}{2} \times 16{,}4 = 8{,}2''$.

Vierte Aufgabe:

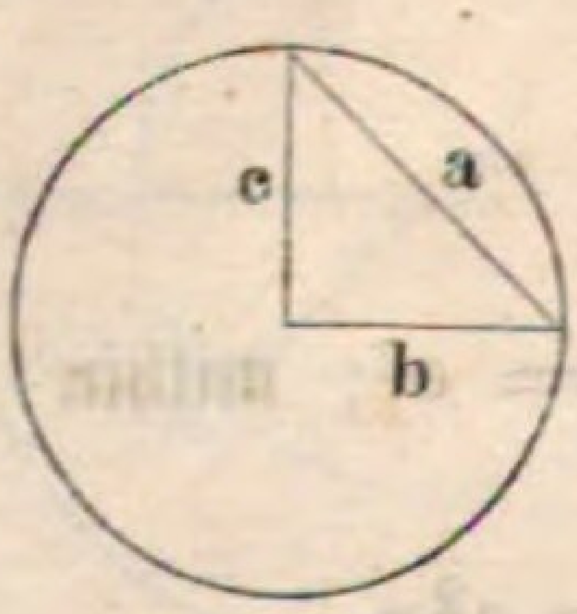
Construire einen Kreis, dessen Flächeninhalt gleich ist der Differenz der Flächeninhalte zweier Kreise, deren Halbmesser a und b sind!

Auflösung:



Nimm den kleinern Radius b als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks und den größern Radius a als Hypotenuse; so ist der zweite Kathetus c gleich dem Halbmesser des gesuchten Kreises.

Beweis:



Es ist $a^2 - b^2 = c^2$, mithin auch $(a^2 - b^2)\pi = c^2\pi$.

Fünfte Aufgabe:

Der Durchmesser des Minuendus ist 29″ lang, der Durchmesser des Subtrahendus = 17″; wie lang ist der Radius der Differenz?

Antwort: $r = \frac{1}{2}\sqrt{(29^2 - 17^2)} = \frac{\sqrt{552}}{2} = \frac{23{,}49}{2}$
$= 11{,}745''$.

Sechste Aufgabe:

In einem Schacht steht eine Pumpe von 15″ Durchmesser, in einem andern eine von 11″ Durchmesser; zu dieser soll eine zweite Pumpe hineingebaut werden, welche mit der vorhandenen in gleicher Zeit und bei gleicher Hubhöhe ebenso viel Wasser fördern kann, wie die 15zöllige allein fördert; wie lang ist der Durchmesser der einzubauenden Pumpe zu nehmen?

Antwort: $\sqrt{(15^2 - 11^2)} = \sqrt{104} = 10{,}19''$.

Siebente Aufgabe.

Einen Kreis zu construiren, dessen Flächeninhalt noch ein Mal so groß, als der eines gegebenen ist.

Auflösung:

Man setze zwei Halbmesser des gegebenen Kreises rechtwinklig an einander und ziehe die Hypotenuse, so ist dieses der Halbmesser des gesuchten Kreises.

Beweis:

Man setze die Hypotenuse = R und die Fläche des damit beschriebenen Kreises = A, ferner sei die Fläche des gegebenen Kreises = a und der Halbmesser desselben = r, so verhält sich

$A : a = R^2 : r^2$; ferner ist

$R^2 = 2r^2$ folglich verhält sich

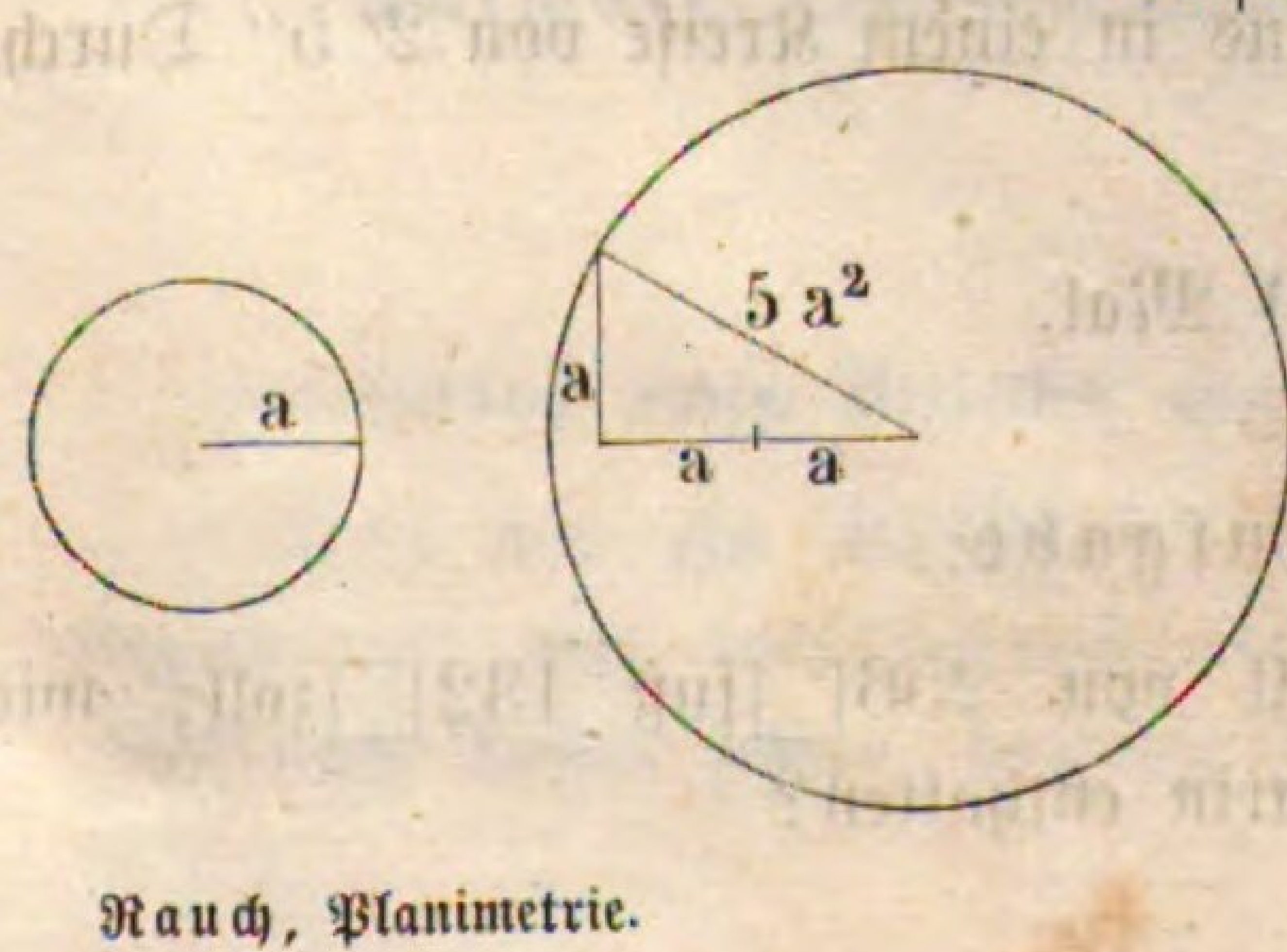
$A : a = 2r^2 : r^2$

$= 2 : 1$ und mithin ist $A = 2a$.

Achte Aufgabe:

Construire einen Kreis, dessen Flächeninhalt 5 Mal so groß ist, als der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Radius = a ist.

Auflösung:



5 ist $= 2^2 + 1^2$. Man legt also 2a hin, setzt a senkrecht darauf und zieht die Hypotenuse, so ist diese der gesuchte Radius.

Neunte Aufgabe:

Wie lang muß der Durchmesser eines Circus angelegt werden, wenn dieser an Flächeninhalt 3 Mal so groß sein soll, als der Inhalt eines Circus von 47′ Durchmesser?

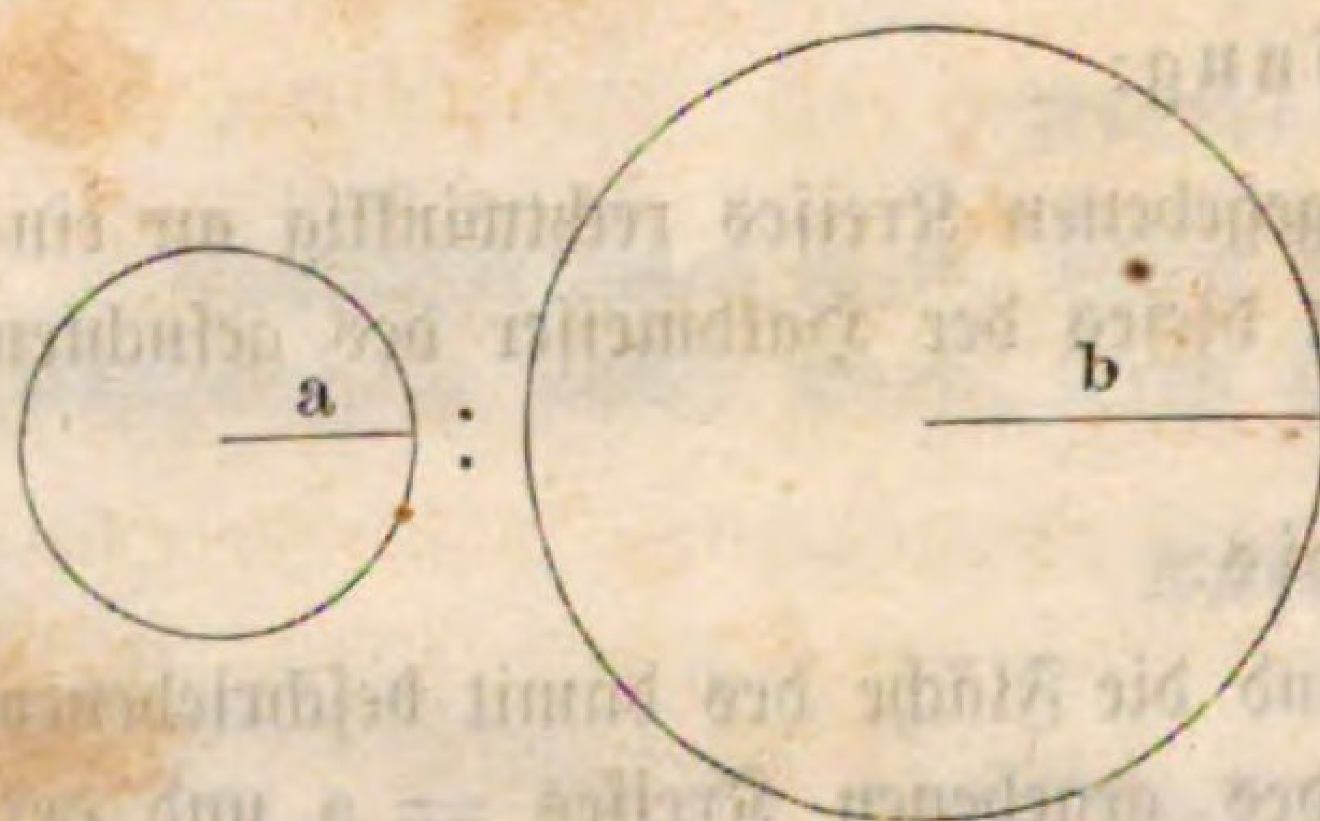
Antwort: Der gesuchte Durchmesser ist

$$= \sqrt{3 \cdot 47^2} = \sqrt{6627} = 81{,}4'.$$

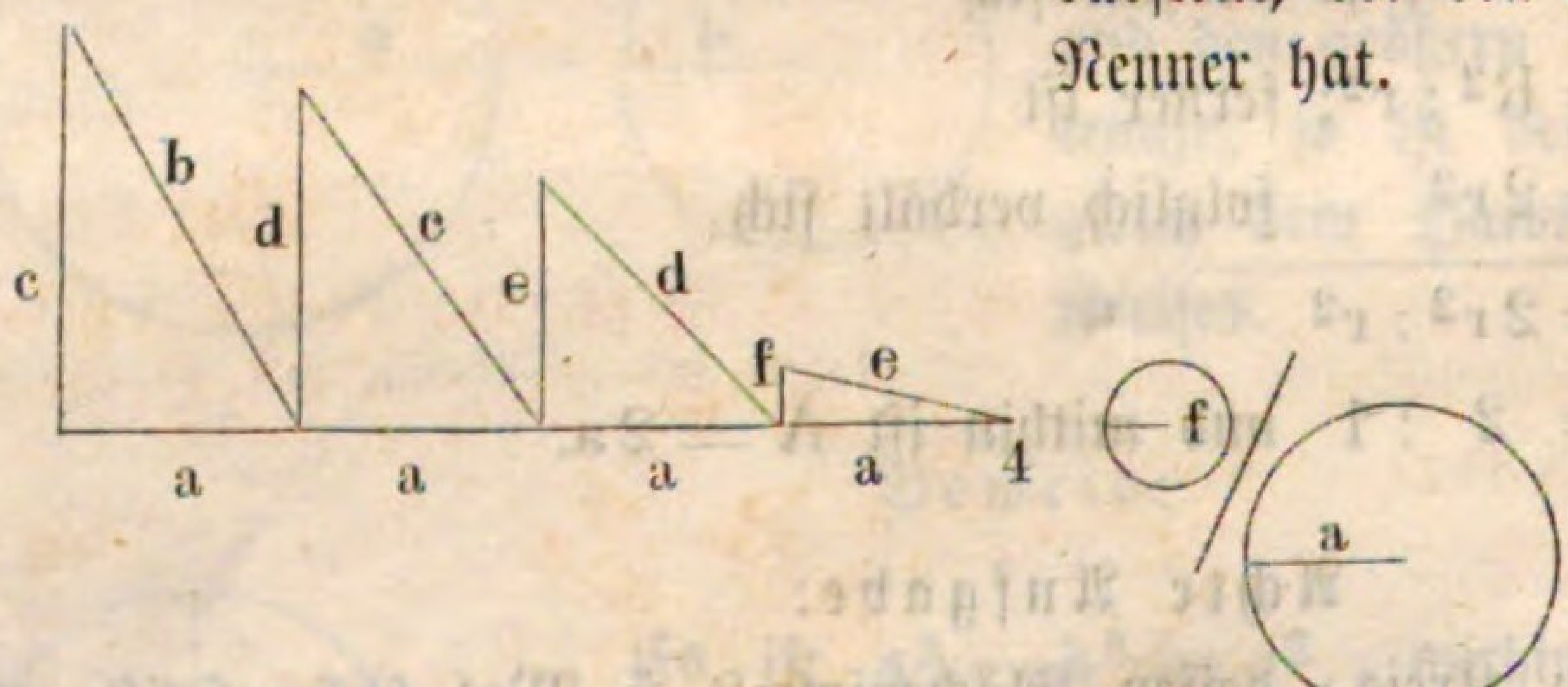
Zehnte Aufgabe:

Dividire den Kreis um a in den Kreis um b!

Auflösung und Beweis:



Da die Division nichts als eine fortgesetzte Subtraction ist, so ziehe man den Kreis um a so lange von dem Kreise um b ab, bis ein Halbmesser übrig bleibt, der kleiner ist als der Radius des Kreises um a; dieser Rest wird dann der Radius eines Kreises, welcher den Zähler des Bruches darstellt, der den Kreis um a zu seinem Nenner hat.



Mal.

Elfte Aufgabe:

Wie oft ist ein Kreis von 7′ Radius in einem Kreise von 2′ 5″ Durchmesser enthalten?

Antwort: $\frac{29^2}{14^2} = \frac{841}{196} = 4{,}29$ Mal.

Zwölfte Aufgabe:

Ein Kreis hat einen Flächeninhalt von 256 □ Fuß 132 □ Zoll; wie viele Kreise von 5′ Durchmesser sind darin enthalten?

Antwort: $256\square' \; 132\square'' = 36996\square''$.

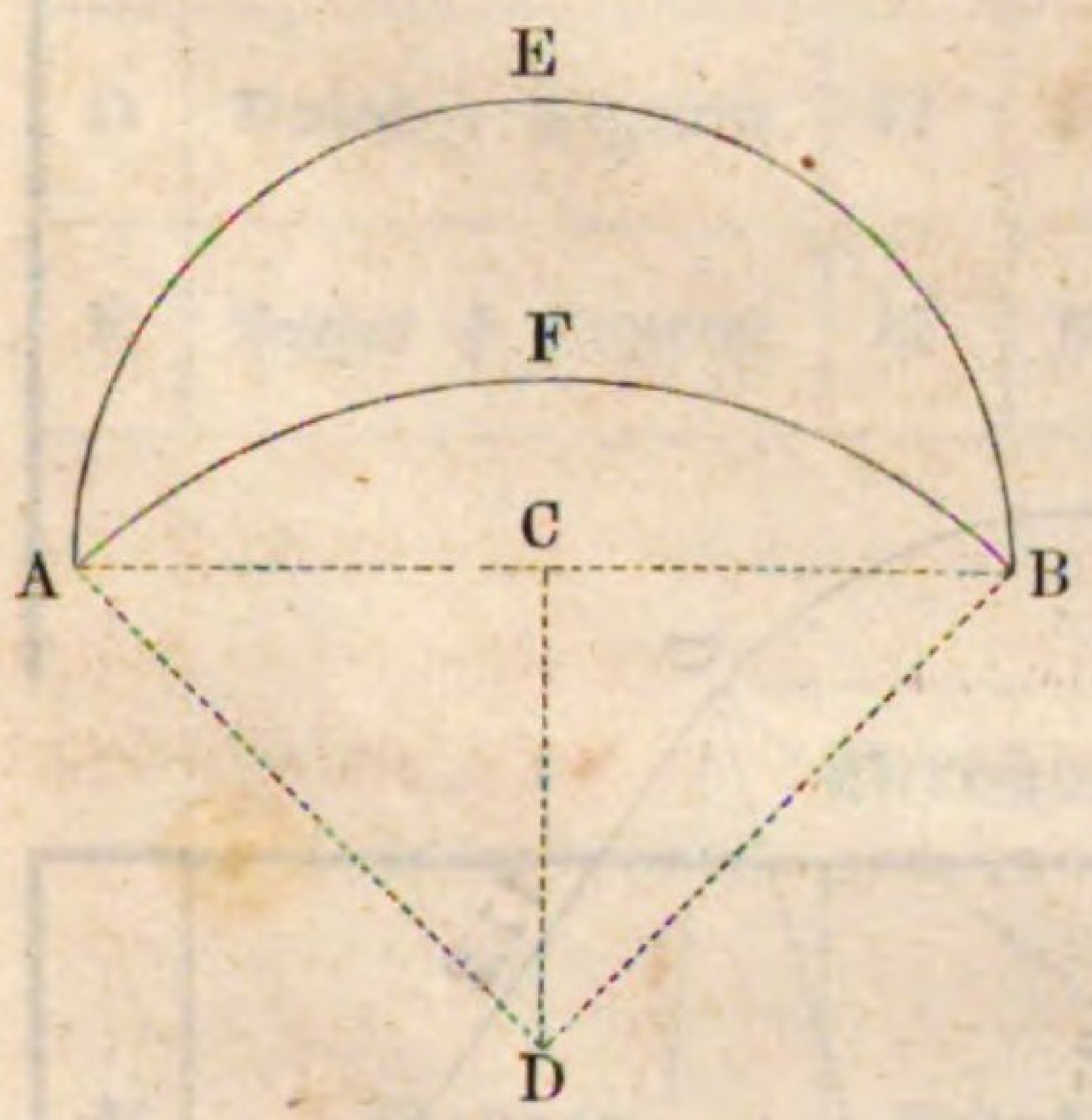
Der Flächeninhalt des Divisors ist $= 30^2 . 3{,}14 = 2826\square''$, also $\frac{36996}{2826} = 13{,}09$ Mal.

§. 9.

Berechnung der lunula Hippocratis.

Die Erfindung dieses Satzes wird dem Hippokrates von Chios zugeschrieben, und da die zwischen den Bogen AEB und AFB eingeschlossene Figur der Gestalt eines Mondes beim Zu- und Abnehmen ähnlich ist, so hat man sie die lunula Hippocratis genannt.

Auflösung und Beweis:



Es sei AEB ein Halbkreis, dessen Mittelpunkt C ist, CD = AC senkrecht auf AB und der Bogen AFB mit AD beschrieben, so ist AEBF = ABD; denn der Punkt D liegt in der Peripherie des Kreises um C, und daher ist der Winkel ADB = R, folglich der Bogen AFB ein Quadrant. Ferner ist die Fläche des Kreises mit AD noch ein Mal so groß, als die des Kreises mit AC; mithin ist die Fläche des Quadranten ADBF gleich der Fläche des Halbkreises AEBC; zieht man daher von beiden das gemeinschaftliche Stück AFBC ab, so bleibt AEBF = ABD.

Aufgabe:

Wie groß ist der Flächeninhalt einer Mondsichel, welche mit einem Radius von 7′ construirt ist?

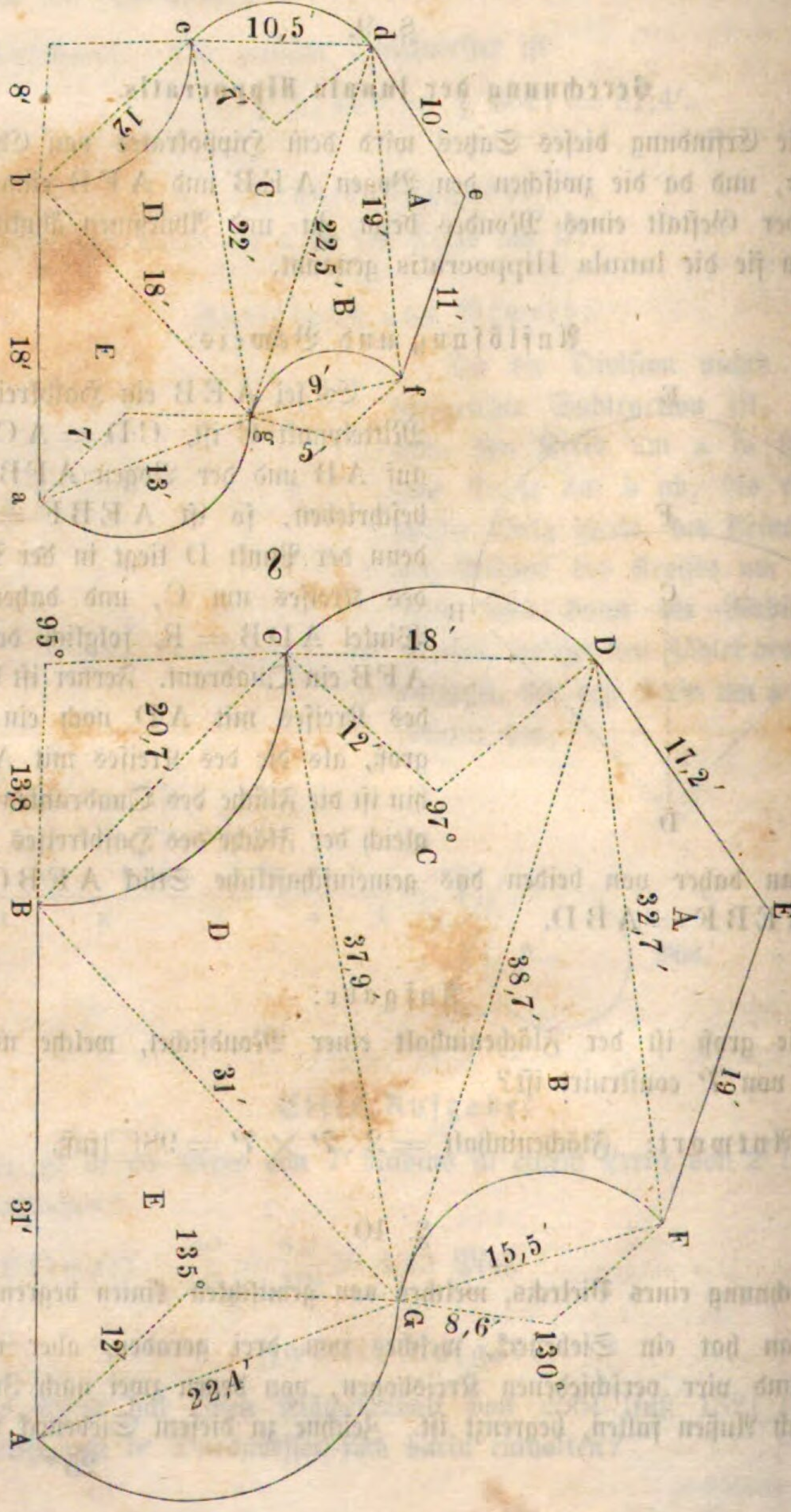
Antwort: Flächeninhalt $= 2 . 7' \times 7' = 98\square$ fuß.

§. 10.

Berechnung eines Vielecks, welches von gemischten Linien begrenzt ist.

Man hat ein Siebeneck, welches von drei geraden, aber ungleichen Linien und vier verschiedenen Kreisbogen, von denen zwei nach Innen und zwei nach Außen fallen, begrenzt ist. Zeichne zu diesem Siebeneck nach dem

Verhältniß von 18 : 31 ein ähnliches, berechne sodann die Flächeninhalte beider ähnlicher Figuren und prüfe die Richtigkeit der Zeichnung und Rechnung nach dem Satze, daß die Flächeninhalte ähnlicher Figuren sich zu einander verhalten, wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.



Berechnung der Figur 1.

№.	Figuren.	Seitenlängen.			Flächeninhalt. Im Einzelnen. der Dreiecke	der Segmente plus	minus	Im Ganzen.
A	Dreieck	10	11	19	42,42	—	—	42,42 □ fuß.
B	Dreieck — Segment	9	19	22,5	80,06	—	18,7	61,36 „
C	Dreieck + Segment	10,5	22	22,5	113,40	17,15	—	130,55 „
D	Dreieck — Segment	12	18	22	107,88	—	21,28	86,60 „
E	Dreieck + Segment	13	18	18	109,07	40,82	—	149,89 „
					452,83	57,97	39,98	470,82 □ fuß.

Berechnung der Figur 2.

№	Figuren.	Seitenlängen.			Flächeninhalt. Im Einzelnen der Dreiecke	der Segmente plus	minus	Im Ganzen.
A	Dreieck	17,2	19	32,7	125,86	—	—	125,86 □ fuß.
B	Dreieck — Segment	15,5	32,7	38,7	237,46	—	55,46	182,00 „
C	Dreieck + Segment	18	37,9	38,7	336,36	50,86	—	387,22 „
D	Dreieck — Segment	20,7	31	37,9	320,01	—	63,12	256,89 „
E	Dreieck + Segment	22,4	31	31	324,12	121,08	—	445,20 „
					1343,81	171,94	118,58	1397,17 □ fuß.

Es verhalten sich demnach diese Figuren zu einander, wie 470,82 : 1397,17; um nun die Richtigkeit der Zeichnung und Rechnung zu prüfen, setze man $18^2 : 31^2 = 470,82 : 1397,17$.

Es muß sich aber verhalten

$$18^2 : 31^2 = 470,82 \square \text{Fuß} : x, \text{ wonach}$$

$$x = \frac{961 \times 470,82}{324} = 1396,48; \text{ folglich ist die Differenz}$$

$$= 1397,17 - 1396,48 = 0,69 \square \text{Fuß}.$$

Staatl. Bibliothek Passau

Im Verlage von **Carl Rümpler** in Hannover erscheint:

Gerding's
sieben Bücher der Naturwissenschaft

in groß Octav-Format,

auf feinstem Velinpapiere gedruckt,

in 10 Lieferungen à 8 Sgr.

Bis jetzt sind 5 Lieferungen ausgegeben.

Zahlreiche in den Text gedruckte Holzschnitte, so wie viele lithographirte Tafeln illustriren den reichen Inhalt dieses für jeden Gebildeten empfehlungswerthen Werkes, das noch in diesem Jahre vollendet sein wird.

☛ Subscribentensammler erhalten auf 6 + 1 Freiexemplar.

Das herrliche Weltall mit seinem geheimnißvollen Inhalte, die wunderbare Werkstätte eines allmächtigen Meisters, ist überall mit den kunstvollsten Schätzen ausgerüstet; nicht allein die Tropenwelt mit ihrem herrlich geschmückten Teppich, sondern jede Himmelsgegend, selbst der hohe Norden bietet überall die kostbarsten Werke einer weisen Schöpfung, theils als eigenthümliche, kürzer oder länger dauernde Gebilde, theils als rasch vorübergehende räthselhafte Erscheinungen.

Jeder Freund der Natur, selbst der oberflächlichste Beobachter wird daher durch das Ebenmaß und durch die schöne Gestalt der vollkommeneren Wesen, durch malerisch ausgestattete Wiesengründe und liebliche Thäler, durch majestätisch aufgethürmte Felsmassen, durch ein Heer prächtig funkelnder Sterne, durch die großartigen Revolutionen des Weltalls mächtig angezogen und dauernd gefesselt; aber das spähende Auge des Naturforschers, sei es bewaffnet oder unbewaffnet, schauet tiefer in die innere Thätigkeit des Einzelnen, um die Vorgänge mit dem großen Ganzen in Zusammenhang zu bringen.

Der rastlos weiter strebende Forschergeist wird von den scheinbar unbedeutendsten Kindern der Natur noch dauernder gefesselt als der gewöhnliche Beobachter, und oft lange Zeit in Anspruch genommen, um den geheimnißvollen Schleier zu lüften, das Unsichtbare durch künstliche Vergrößerung zu Tage zu fördern, zu zergliedern, zu zerlegen, zu berechnen, um so die Geheimnisse der Schöpfung und deren Bedeutung zu enthüllen. Hiervon liefert uns die Neuzeit die herrlichsten Beweise.

Von Tag zu Tag steigert sich der Durst nach Aufklärung über das unendlich feine Gewebe des umfangreichen Weltgebäudes, und in siegreicher Belohnung sehen wir eine gedrängte Reihenfolge zahlreicher Entdeckungen zu neuen, mehr haltbaren Schlüssen führen, wodurch die einzelnen Zweige der allgemeinen Naturwissenschaft unter Riesenfortschritten mit staunenswerther, unaufhaltsam fortströmender Schnelle einer blühenden Entwickelung und festeren Begründung sich erfreuen.

Sind wir auch noch weit davon entfernt, alle die geheimen und verwickelten Fäden des wunderbar vereinten, großartigen Geflechtes unseres Erdenrundes zu kennen, so sind wir doch der Zeit bodenloser Hypothesen mehr

entrückt und auf den Standpunkt einer naturgemäßen Betrachtung gelangt. Wir haben ferner eine Periode erreicht, welche es nicht mehr duldet, daß die Resultate emsiger Beobachtung und Forschung dem engen Kreise strenger Wissenschaft aufbewahrt werden, sondern einen regen Eifer hervorgerufen hat, die Sprache der Natur Jedermann verständlich zu machen und zu verallgemeinern, wie es bereits in musterhafter Weise geschehen ist.

Es möchte daher fast gewagt erscheinen, wenn die schon so reichhaltige naturwissenschaftliche Literatur noch mit einem Werke beschenkt werden soll, welches, wie der Titel sagt, die „sieben Bücher der Naturwissenschaft" umfaßt. Dennoch aber dürfte sowohl den Jüngern der Naturwissenschaft, so wie überhaupt jedem weniger Eingeweihten, als auch denen, die sich einen genaueren Ueberblick über das ganze Weltall, die wunderbaren Erscheinungen, die Vorgänge in der Natur, die wichtigsten und interessantesten Wesen einen Ueberblick verschaffen wollen, nicht unwillkommen sein, wenn ihnen ein Skelet des Bereiches der naturwissenschaftlichen Disciplinen und ein praktischer Leitfaden für speciellere Studien des Wissenswürdigsten der Natur in die Hände gegeben wird. So mag denn die gute Absicht, zur Verbreitung der naturwissenschaftlichen Kenntnisse beitragen zu wollen, nicht verkannt und den „sieben Büchern der Naturwissenschaft" eine nachsichtige und freundliche Aufnahme vergönnt werden. — Damit aber der Leser dieses zugleich einen Ueberblick über den wesentlichsten Inhalt derselben erhalte, so ist ein solcher in Nachstehendem mitgetheilt worden.

Eine Einleitung enthält einige Worte über das Studium der Naturwissenschaften im Allgemeinen, besonders hinsichtlich des Einflusses auf geistige Entwickelung und Veredelung; ferner Definitionen über Begriffe und Gebiete der einzelnen Naturwissenschaften, so wie ihre besonderen Zweige und deren verwandtschaftliche Verhältnisse zu einander. — Sodann folgen die einzelnen sieben Bücher.

Erstes Buch: Specielle Charakteristik der wichtigeren Thierfamilien und Einzelwesen (ein Ueberblick der speciellen Zoologie).

Zweites Buch: Specieller Ueberblick der in Deutschland wildwachsenden wichtigeren vollkommeneren Pflanzen (oder Phanerogamen), nebst kurzer Berücksichtigung der Kryptogamen (Grundriß der beschreibenden Botanik). Ein Leitfaden zum Bestimmen und auf Excursionen.

Drittes Buch: Besondere Charaktere der wichtigeren Mineralkörper, ihre physikalischen Eigenschaften und chemische Zusammensetzung, ihr Vorkommen oder ihre Fundorte 2c. (Grundriß der speciellen Mineralogie). Ebenfalls ein Leitfaden zum Bestimmen und für den Unterricht.

Viertes Buch: Die Gebirgs- oder Gesteinsarten mit Rücksicht auf Versteinerungen, oder die Elemente der Geognosie, unter kurzer Berücksichtigung der Petrefactenkunde.

Fünftes Buch: Grundzüge der unorganischen und organischen Chemie, oder die Lehren von den wichtigsten chemischen Verbindungen unorganischer und organischer Natur. Ein Leitfaden oder Compendium, mit bildlichen Erläuterungen von Apparaten, beim Unterricht für Lehrer und Lernende.

Sechstes Buch: Grundriß der Physik oder der Naturlehre in engerem Sinne. Ebenfalls ein Leitfaden für den Unterricht.

Siebentes Buch: Das Wissenswürdigste aus dem Gebiete der Sternkunde, oder Grundzüge der Astronomie.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Rauch, Christian

Planimetrie und Constructionslehre für Real-, Berg-, Gewerbe- und Fortbildungsschulen

Hannover 1861

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 86
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346080-0